This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

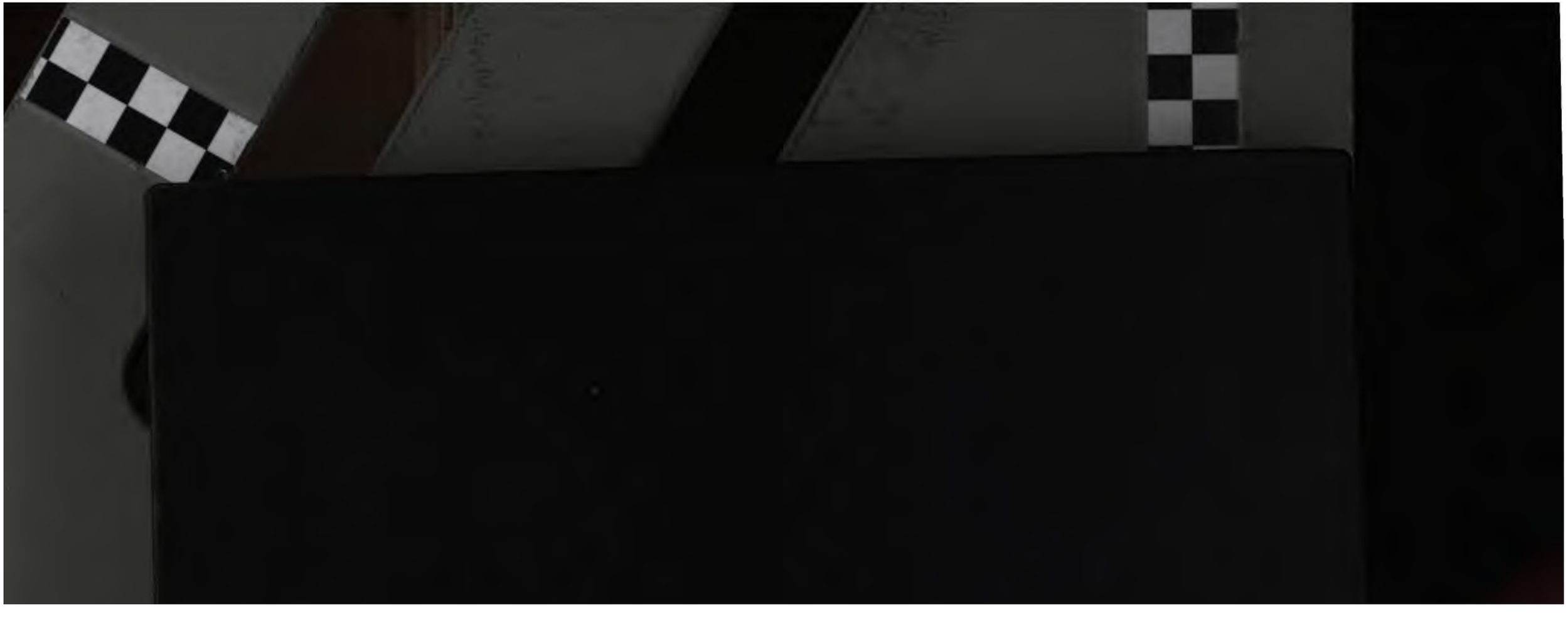
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Leroy
20

Die darstellende Geometrie

(Géométrie descriptive).

Mit 62 Tafeln in Steindruck.

Von

C. F. A. Leroy,
Professor an der polytechnischen Schule zu Paris, Ritter der Ehrenlegion ꝛc.

Deutsch mit Anmerkungen

von

C. K. Kauffmann,
Professor am Gymnasium in Stuttgart.

Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Stuttgart.
Ad. Becher's Verlag.
1853.

TO NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
243157A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1926 L

Schnellpressendruck von J. Kreuzer in Stuttgart.

Vorwort des Ueberſetzers

zur zweiten Auflage.

Dieſe zweite Auflage meiner Ueberſetzung der darſtellenden Geometrie von **Leroy** iſt nach der zweiten Auflage des franzöſiſchen Originals bearbeitet und mit den meiſten zum Theil ſehr intereſſanten Zuſätzen derſelben bereichert worden. Nur die Anwendung der ebenen und ſphäriſchen Epicycloiden auf Verzahnungen, welche den Anhang des Originals bildet, wurde hier weggelaſſen, weil ich dieſelbe ſchon früher in beſonderer Bearbeitung *) herausgegeben habe.

Statt des Wortes „Grundſchnitt" habe ich in dieſer zweiten Auflage die dem Wortſinn des franzöſiſchen trace entſprechende und unterdeſſen allgemein üblich gewordene Benennung Spur für den Durchſchnitt einer Linie oder Ebene mit einer der beiden Projectionsebenen eingeführt. Und gern hätte ich noch von einigen neuerdings vorgeſchlagenen und zum Theil angewendeten Kunſtwörtern (Schmiegung ſtatt Oskulation und demgemäß Schmiegebene, Schmiegekreis, Schmieghyperboloid u. ſ. w.; ebenſo Raumcurve ſtatt windſchiefe Curve oder Curve von doppelter Krümmung u. a. m.) Gebrauch gemacht, wenn ich dieſelben Kunſtwörter zugleich in die von mir im Jahre 1840 deutſch herausgegebene Analytiſche Geometrie im Raum von Leroy (Stuttgart, Schweizerbart) hätte einführen können, welche zu vorliegendem Werke in innigſter Beziehung ſteht. So aber mußte die Rückſicht auf Uebereinſtimmung des Wortausdrucks in beiden Werken mich davon abhalten.

---

*) Theorie und graphiſche Darſtellung der ebenen und ſphäriſchen Epicycloiden, ſammt deren Anwendung auf Zahnräderwerke, als Anhang zu Leroy's darſtellender Geometrie nach der zweiten Auflage des franzöſiſchen Originals bearbeitet von C. F. Kauffmann (Stuttgart, Ad. Becher's Verlag, 1850).

Stuttgart, im Februar 1853.

C. F. Kauffmann.

Vorbericht des Verfassers.

Die oft sehr scharfsinnigen Verfahrungsarten, deren die Steinhauer und Zimmerleute sich bei Verfertigung ihrer Musterrisse bedienen, waren zwar schon lange bekannt, aber sie standen meist in keiner Verbindung unter sich, und jede derselben paßte nur für einen besondern Fall, so daß der Techniker, wenn er neue Gewölbeverbindungen wagen wollte, auch auf neue Methoden sinnen mußte. Erst gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts hat der berühmte **Monge** diese verschiedenen Verfahrungsarten zu einem wissenschaftlichen Ganzen verbunden, dessen allgemeine Prinzipien er unter dem Namen: darstellende Geometrie (Géométrie descriptive) aufgestellt und dadurch eine Wissenschaft begründet hat, welche zur genauen Darstellung der Körper ebensowohl, als zur Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften des abstrakten körperlichen Raumes die tauglichsten Mittel bietet. Das Werk, welches jener berühmte Geometer über diesen Gegenstand geschrieben hat, ist ein Muster von Klarheit, nur läßt es in mehreren wichtigen Theorien Lücken, und die Beispiele, die es enthält, sind nicht zahlreich und mannigfaltig genug, um dem Leser zu genauer Bekanntschaft mit den Projectionsmethoden zu verhelfen. Ueberdies ist es ein sehr wesentliches Erforderniß, sich bei Zeichnung der Figuren an eine gewisse, unabänderlichen Regeln unterworfene Zeichnungsweise oder Punktuation zu halten, durch welche ohne Zweideutigkeit und gleichsam durch eine für das Auge verständliche Sprache, die verschiedenen Theile eines bestimmten Gegenstandes nach ihrer gegenseitigen Lage deutlich dargestellt werden können.

Diesen doppelten Zweck hatte ich vor Augen, als ich vorliegendes Werk schrieb, und ich habe dabei die in dem Programme der polytechnischen Schule vorgeschriebene Ordnung in so weit befolgt, als die Verschiedenheit es gestattete, die nothwendig zwischen einem geschriebenen Lehrbuche und einem mündlichen Cursus bestehen muß, indem bei letzterem die Vertheilung des Stoffes von der Zeit abhängig ist, welche die Schüler nöthig haben, um von einer Lection zur andern die aufgegebenen graphischen Arbeiten ausführen zu können. Indem ich aber die Beispiele, welche sich auf die Berührungsebenen und die Flächendurchschnitte beziehen, vermehrte, — wobei die Schüler Gelegenheit haben, eine und dieselbe Aufgabe durch Verwechslung der gegebenen Stücke zu vervielfältigen, — glaubte ich nicht, mich innerhalb der in jenem Programme festgesetzten Grenzen halten zu müssen, welche ohnehin wegen der kurzen Dauer der Studien auf der poly-

technischen Schule sehr enge gezogen werden mußten; sondern ich habe vielmehr die Absicht gehabt, Ingenieuren, und überhaupt allen Denen, welche Beruf oder Neigung zu dieser an den verschiedensten Anwendungen so reichen Wissenschaft hinzieht, die Mittel an die Hand zu geben, dieselbe so gründlich und umfassend als möglich zu studiren. Deßhalb habe ich mich auch über die entwickelbaren und umhüllenden Flächen, über die entwickelbaren und windschiefen Schraubenflächen, über die Krümmung und die Evoluten windschiefer Curven, über die Krümmung der Flächen und ihre Krümmungslinien weitläufig ausgebreitet. Was die durch ihre häufige Anwendung in den Künsten so wichtigen windschiefen Flächen betrifft, so hat eine lange Erfahrung mich überzeugt, daß es besser ist, anfangs nur einige sehr einfache Beispiele dieser Flächen anzuführen, um zu verhindern, daß der Schüler sie nicht mit den entwickelbaren verwechsle, und später erst alle zur vollständigen Theorie dieser Flächen gehörigen Theile in einem besondern Abschnitte zu vereinen, dem ich viele Beispiele mit wirklicher Ausführung der in der allgemeinen Erklärung nur angedeuteten Constructionen beigefügt habe. Diese Anordnung verträgt sich übrigens ganz wohl mit dem Lehrgange in der polytechnischen Schule, wo die allgemeinen Eigenschaften der windschiefen Flächen erst kurz vor der Zeit vorgetragen werden, in welcher ihre Anwendung auf die Stereotomie gelehrt wird, wodurch alsdann ihre Wichtigkeit um so besser ins Klare tritt. Endlich habe ich in einem Anhange einige in der Perspective und Schattenlehre nützliche Sätze und eine kurze Darstellung von dem Gebrauche der kottirten Ebenen beigefügt, welche bei Fortificationszeichnungen angewendet werden.

In einem andern Werke hoffe ich die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf Schattenlehre und Stereotomie auseinander zu setzen.*)

*) Dieses Werk ist unterdessen erschienen und in deutscher Bearbeitung unter dem Titel: Die Stereotomie (Lehre vom Körperschnitt) von mir herausgegeben worden (Stuttgart, Ad. Becher's Verlag).

Anm. des Uebersetzers.

Inhalt.

Erſter Abſchnitt.

Seite

Von den geraden Linien und Ebenen. 1

Erſtes Kapitel.

§. 1—3. Gegenſtand und Zweck der darſtellenden Geometrie.
§. 4—12. Erläuterung der Projectionsmethode.
§. 13, 14. Grundſchnitte, Spuren einer Geraden; Conſtruction derſelben.
§. 15, 16. Regeln über die Punktuation der verſchiedenen Linien.

Zweites Kapitel.

Aufgaben über gerade Linien und Ebenen. 8

§. 17—19. Die Gerade conſtruiren, welche durch zwei gegebene Punkte geht; die Entfernung dieſer Punkte finden.
§. 20. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt finden, der von einem auf der nämlichen Linie bezeichneten Punkte eine beſtimmte Entfernung δ habe.
§. 21. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, die einer gegeben Geraden parallel ſei.
§. 22. Die Ebene conſtruiren, welche durch drei gegebene Punkte, oder durch eine Gerade und einen Punkt geht.
§. 23, 24. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene legen, die einer gegeben Ebene parallel ſei.
§. 25, 26. Aus der einen Projection eines Punktes oder einer geraden Linie, welche in einer bekannten Ebene liegen, die andere Projection finden.
§. 27—29. Den Durchſchnitt zweier gegebenen Ebenen finden.
§. 30, 31. Den Durchſchnitt einer Geraden mit einer Ebene finden.
§. 32. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, welche zwei andere Gerade ſchneide.
§. 33, 34. Wenn eine Gerade ſenkrecht auf einer Ebene ſteht, ſo ſind ihre Projectionen beziehlich ſenkrecht auf den Spuren der Ebene.
§. 35. Die kürzeſte Entfernung eines Punktes von einer gegebenen Ebene finden.
§. 36. Die kürzeſte Entfernung eines Punktes von einer Geraden finden.
§. 37. Andere Auflöſungen der vorigen Aufgabe.
§. 38. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt finden, der von einem im Raume gegebenen Punkte eine beſtimmte Entfernung δ habe.
§. 39. Die Winkel finden, welche eine gegebene Ebene mit den Projectionsebenen bildet.
§. 40. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene legen, welche mit den Projectionsebenen gegebene Winkel mache.

Seite

§. 41, 42. Den Winkel construiren, den zwei gegebene Ebenen mit einander bilden.
§. 43, 44. Den Winkel zweier gegebenen Geraden finden und diesen Winkel in zwei gleiche Theile theilen.
§. 45, 46. Den Winkel finden, den eine Gerade mit einer Ebene bildet.
§. 47—50. Die kürzeste Entfernung zweier gegebenen Geraden finden.
§. 52. Darstellung eines rechtwinkligen Parallelepipedums nach gewissen Bedingungen.

Drittes Kapitel.

Auflösung des körperlichen Dreiecks. 23

§. 53—58. Elemente eines körperlichen Dreiecks und die Beziehungen, in welchen sie mit denen des körperlichen Ergänzungsdreiecks stehen.
§. 59, 60. Aus den drei gegebenen Seiten eines körperlichen Dreiecks die Flächenwinkel desselben finden.
§. 61. Reduction eines Winkels auf den Horizont.
§. 62. Aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke finden.
§. 63—65. Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel die übrigen Stücke finden.
§. 66. Aus zwei Winkeln und einer Gegenseite die übrigen Stücke finden.
§. 67. Aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite die übrigen Stücke finden.
§. 68. Aus den drei Winkeln die drei Seiten finden.

Zweiter Abschnitt.

Von den Flächen und ihren Berührungsebenen.

Erstes Kapitel.

Von der Erzeugung der krummen Flächen und ihrer graphischen Darstellung. . . 32

§. 70. Definition einer Fläche.
§. 71—74. Erzeugung der conischen oder cylindrischen Flächen.
§. 75—79. Erzeugung der Umdrehungsflächen.
§. 80—91. Erzeugung der fünf Flächen vom zweiten Grade.
§. 93, 94. Graphische Darstellung einer Fläche.

Zweites Kapitel.

Von den Berührungsebenen überhaupt. 41

§. 95. Definition der Berührungsebene.
§. 96, 97. Besondere Punkte einer Fläche, für welche keine Berührungsebenen möglich sind.
§. 98. Eine Berührungsebene kann dieselbe Fläche, welche sie berührt, zugleich auch schneiden.
§. 99—101. Cylinder- und Kegelflächen werden von der Berührungsebene nach der ganzen Länge einer Erzeugenden berührt.
§. 102. Die Projectionen einer Curve und ihrer Tangente berühren sich ebenfalls.
§. 103, 104. Allgemeine Regel für die Construction der Berührungsebene und Normale einer Fläche.
§. 105—107. Bestimmung des sichtbaren Umrisses einer Fläche auf jeder der beiden Projectionsebenen.
§. 108. Punktuation unbestimmter Ebenen.

Seite

Drittes Kapitel.

Berührungsebenen an Cylinder- und Kegelflächen. 46

§. 109—115. Die Berührungsebene eines Cylinders für einen auf einem letzteren gegebenen Punkt construiren.
§. 116. Eine Berührungsebene an einen Cylinder legen, die durch einen außerhalb gegebenen Punkt gehe.
§. 117. An einen Cylinder eine Berührungsebene legen, die einer gegebenen Geraden parallel sei.
§. 118. Ueber die Unmöglichkeit, eine Berührungsebene an eine Cylinderfläche zu legen, die zugleich durch eine gegebene Gerade gehe.
§. 119—122. An einen auf einer Kegelfläche gegebenen Punkt eine Berührungsebene legen.
§. 123. An eine Kegelfläche eine Berührungsebene legen, welche durch einen außerhalb gegebenen Punkt gehe.
§. 124. An einen Kegel eine Berührungsebene legen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel sei.
§. 125. Bemerkung über den Fall, wenn die Berührungsebene durch eine gegebene Gerade gehen soll.
§ 126. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene legen, welche mit der Horizontalebene einen gegebenen Winkel mache.
§. 127. An einen Cylinder oder Kegel eine Berührungsebene legen, welche mit der Horizontalebene einen gegebenen Winkel bilde.
§. 128. Durch einen gegebenen Punkt eine geradlinige Tangente an einen Kegel ziehen, die einer gegebenen Ebene parallel sei.

Viertes Kapitel.

Von den Berührungsebenen an Umdrehungsflächen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist. 53

§. 129. Die Berührungsebene einer Umdrehungsfläche ist stets senkrecht auf der entsprechenden Meridianebene.
§. 130. Die Normale einer Umdrehungsfläche schneidet stets die Axe und alle Normalen längs eines Parallelkreises bilden einen senkrechten Kegel.
§. 131—135. Durch einen auf einer Umdrehungsfläche gegebenen Punkt eine Berührungsebene an letztere legen.
§. 136. Construction der Normale.
§. 137. Construction der verschiedenen Meridianprojectionen.
§. 138, 139. Berührungsebene an einem Wulst. Ueber die Lage dieser Ebene in Beziehung auf den innern Mantel.
§. 140, 141. Umdrehungshyperboloid mit einem Mantel: diese Fläche läßt zwei geradlinige Erzeugungslinien zu.
§. 142. Bemerkung über die Berührungsebene dieser Fläche.
§. 143, 145. Von den Erzeugenden eines und desselben Systems sind nie zwei und zwei in einerlei Ebene und die Fläche ist also windschief.
§. 144. Jede Erzeugende des einen Systems schneidet alle Erzeugenden des entgegengesetzten Systems.
§. 146, 147. Vom asymptotischen Kegel des Hyperboloids.
§. 148—151. Graphische Darstellung des Hyperboloids.
§. 152—154. Construction der Berührungsebenen an dieser Fläche, und Beweis, daß die Fläche nur an Einem Punkte berührt und in den übrigen schneidet.

Seite

Dritter Abschnitt.

Von den entwickelbaren und von den Umhüllungsflächen.

Erstes Kapitel.

Von den entwickelbaren Flächen. 65

§. 156. Definition der entwickelbaren Flächen.
§. 157—159. Prinzipien der Infinitesimalmethode.
§. 160, 161. Eine cylindrische Fläche ist immer entwickelbar; Behandlung des senkrechten Schnitts und der Erzeugenden einer solchen Fläche bei der Entwicklung.
§. 162. Eine auf dem Cylinder verzeichnete Curve verwandelt sich bei der Entwicklung in eine andere Curve, deren Bögen ihre vorige Länge behalten, und deren Tangenten mit den Erzeugenden die nämlichen Winkel bilden, wie vorher.
§. 163. Bedingung, unter welcher eine auf dem Cylinder verzeichnete Curve bei der Entwicklung geradlinig wird.
§. 164. Eine solche Curve heißt eine Schraubenlinie und ist die kleinste Linie zwischen zweien ihrer Punkte.
§. 165, 166. Alle Schraubenlinien sind Curven von doppelter Krümmung, den senkrechten Schnitt ausgenommen.
§. 167. Krümmungsebene einer Linie von doppelter Krümmung.
§. 168. Normalebene einer solchen Curve.
§. 169, 170. Eine conische Fläche ist immer entwickelbar; die Erzeugenden behalten bei der Entwicklung ihre anfängliche Länge, eben so wie die Bögen einer auf der Fläche verzeichneten Curve, und die Tangenten dieser letzteren bilden mit den Erzeugenden dieselben Winkel wie vorher.
§. 171, 172. Bedingung, unter welcher eine Curve auf der Kegelfläche bei der Entwicklung geradlinig wird; diese Curve ist ein Minimum.
§. 173. Von der Curve, deren Tangenten alle gleiche Winkel mit den Erzeugenden bilden.
§. 174—176. Entwickelbare Flächen überhaupt. Ihre charakteristische Eigenschaft besteht darin, daß sie von einer beweglichen Geraden erzeugt werden können, deren zwei nächst aufeinanderfolgende Lagen stets in einerlei Ebene liegen.
§. 177. Eine entwickelbare Fläche wird von ihrer Berührungsebene nach der ganzen Länge einer Erzeugenden berührt.
§. 178. Wendecurve einer entwickelbaren Fläche.
§. 179. Die Wendecurve behält die nämliche Krümmung, vor wie nach der Entwicklung der Fläche.
§. 180. Erste Art, eine entwickelbare Fläche zu erzeugen, indem man die bewegliche Gerade über zwei Leitlinien hingleiten läßt.
§. 181. Eine einzige Leitlinie reicht hin, wenn man die Bedingung aufstellt, daß die erzeugende Gerade stets Tangente an ihr bleiben solle.
§. 182—186. Andere Arten der Erzeugung, welche, jede entwickelbare Fläche als Umhüllung einer beweglichen Ebene zu betrachten, gestatten.
§. 187. Bedingung, unter welcher eine auf der entwickelbaren Fläche verzeichnete Curve die kleinste Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte ist.
§. 188. Die Krümmungsebenen der kleinsten Linie auf einer entwickelbaren Fläche stehen immer normal auf dieser letzteren.
§. 189. Der nämliche Lehrsatz gilt für die kleinste Linie irgend einer Fläche.

Zweites Kapitel.

Von den Umhüllungsflächen. 78

§. 190. Definition der Umhüllungsflächen der Umhüllten und der Charakteristiken.
§. 191—196. Beispiel einer Umdrehungsfläche als Umhüllung einer beweglichen Kugel oder eines beweglichen Kegels oder Cylinders.

Seite

§. 195. Anwendung der Umhüllungsflächen in verschiedenen Künsten.
§. 197—199. Evoluten ebener Curven, Evolventen, Krümmungshalbmesser.
§. 200. Evoluten verschiedener Kegelschnitte.
§. 201. Die Evolvente eines Kreises ist eine Spirale.
§. 202—204. Röhrenförmige Flächen; die Charakteristik derselben ist ein Kreis von constantem Halbmesser, der immer normal auf der Leitcurve steht.
§. 205—208. Die Charakteristiken bilden durch ihre aufeinanderfolgenden Durchschnitte eine sie umhüllende Wendecurve.

Vierter Abschnitt.

Vom Durchschnitte der Flächen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundsätze. 86

§. 209—212. Allgemeines Verfahren, um den Durchschnitt zweier Flächen zu finden.
§. 213. Construction der Tangente des Durchschnitts.
§. 214. Andere Methode, vermittelst der Normalebene.
§. 215. Fall, in welchem die Durchschnittscurve zu einer Berührungslinie wird.

Zweites Kapitel.

Durchschnitte krummer Flächen mit Ebenen; Entwicklung der Flächen ꝛc. . . . 89

§. 217—218. Durchschnitt eines senkrechten Cylinders mit einer gegebenen Ebene.
§. 219—221. Aufklappung der Durchschnittscurve und ihrer Tangente.
§. 222—225. Entwicklung der Cylinderfläche; die Verwandelte des Durchschnitts; diese Verwandelte ist eine Sinuslinie.
§. 226. Inflexionspunkt dieser Verwandelten.
§. 227. Anwendung solcher Entwicklungen in den Künsten.
§. 228—232. Andere Auflösung des Durchschnitts eines Cylinders mit einer Ebene.
§. 233. Die Durchschnittspunkte einer Curve mit einer Ebene finden.
§. 234. Fehlerzeigende Curve.
§. 235—237. Senkrechter Schnitt eines schiefen Cylinders.
§. 238. Andere Methode.
§. 239. Construction merkwürdiger Punkte.
§. 240—242. Tangente an dem Schnitte und Aufklappung.
§. 243—245. Entwicklung der Fläche, Verwandelte der anfänglichen Grundlinie.
§. 246—248. Schnitt eines senkrechten Kegels durch eine Ebene.
§. 249, 250. Tangente an dem Schnitte und Aufklappung.
§. 251, 254. Entwicklung der Fläche; Verwandelte des Schnitts.
§. 253. Gleichung der Verwandelten.
§. 255, 256. Fall, in welchem der conische Schnitt eine Hyperbel ist.
§. 257—260. Construction der Asymptoten und Aufklappung.
§. 261—263. Entwicklung der conischen Fläche; Verwandelte des Schnitts mit seinen Asymptoten.
§. 264—266. Ebener Schnitt irgend eines Kegels; Entwicklung.

Seite

§. 268. Schnitt eines Wulstes durch seine Berührungsebene.
§. 269. Tangente am vielfachen Punkt; Construction derselben kommt später vor.
§. 271, 272. Schnitt eines Umdrehungshyperboloids mit einem Mantel und einer Ebene.
§. 273, 274. Ueber die Scheitelpunkte und das Geschlecht der Durchschnittscurve.
§. 275, 276. Tangente an dem Schnitt und Aufklappung.
§. 277—282. Unendliche Aeste.
§. 283. Aufklappung.
§. 284—287. Durchschnitt einer Geraden mit einem Umdrehungshyperboloid mit Einem Mantel.

Drittes Kapitel.

Durchschnitte zweier krummen Flächen. 117

§. 288, 289. Durchschnitt zweier Cylinder.
§. 290—293. Bemerkenswerthe Punkte und Tangente des Durchschnitts.
§. 294. Regel, um die sichtbaren Punkte von den unsichtbaren unterscheiden zu können.
§. 295. Unterschied zwischen Durchdringung und Ausreißung.
§. 296. Ueber die unendlichen Aeste.
§. 297, 298. Durchschnitt zweier conischen Flächen.
§. 299, 300. Bemerkenswerthe Punkte dieses Durchschnitts.
§. 301, 302. Tangente desselben und der höchste und tiefste Punkt.
§. 303—305. Regeln über die Unterscheidung der sichtbaren Bögen.
§. 306—312. Anderes Beispiel, welches auf unendliche Aeste führt.
§. 313—315. Asymptoten.
§. 316—318. Durchschnitt eines Kegels und eines Cylinders.
§. 319—321. Durchschnitt eines Kegels und einer concentrischen Kugel.
§. 322, 323. Tangente dieses Durchschnitts und Punkte, in welchen die Tangente horizontal ist.
§. 324—326. Durch einen, in der Ebene einer Curve gegebenen Punkt eine Normale an die Curve ziehen.
§. 327. Durch einen, in der Ebene einer Curve gegebenen Punkt eine Tangente an die Curve ziehen.
§. 328. Andere Auflösung dieser Aufgabe.
§. 330, 331. Entwicklung einer conischen Fläche mit beliebiger Grundlinie.
§. 332—337. Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen, deren Axen sich schneiden.
§. 338, 339. Die Tangente an die Durchschnittscurve kann auf zweierlei Art construirt werden.
§. 340. Die zweite Art läßt sich auch auf gewisse besondere Punkte anwenden.
§. 341—344. Durchschnitt eines Umdrehungsparaboloids mit einem Hyperboloid gleicher Art, deren Axen sich schneiden.
§. 345. Construction der Tangente des Durchschnitts.

Fünfter Abschnitt.

Berührungsebenen, bei welchen der Berührungspunkt nicht gegeben ist.

Erstes Kapitel.

Berührungsebenen, welche durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punkt gehen. . 139

§. 347—352. Für jede Fläche gibt es im Allgemeinen einen umschriebenen Kegel, dessen Spitze der gegebene Punkt ist, und dessen Berührungslinien alle Auflösungen der Aufgabe liefert.

Seite

§. 349, 350. Für eine entwickelbare Fläche wird die Aufgabe eine bestimmte, weil der umschriebene Kegel sich auf eine oder mehrere Berührungsebenen reducirt.

§. 353—355. Für jede Fläche vom zweiten Grad ist die Berührungscurve eines umschriebenen Kegels eben, und ihre Ebene ist parallel mit der Diametralebene, welche dem durch die Kegelspitze gehenden Durchmesser conjugirt ist.

§. 354. In jeder Fläche vom zweiten Grade sind die parallelen Schnitte ähnliche Curven, deren Mittelpunkte auf dem Durchmesser liegen, welcher mit der durch den Mittelpunkt der Fläche gehenden Ebene conjugirt ist.

§. 356. Die Berührungscurve einer Umdrehungsfläche mit einem umschriebenen Kegel von gegebener Spitze zu finden.

§. 357—359. Auflösung vermittelst der Parallelkreise.

§. 360, 361. Auflösung vermittelst der Meridiane.

§. 362—364. Construction der wichtigsten Punkte.

§. 366. Dritte Auflösung vermittelst einer sphärischen Umhüllten.

§. 367, 368. Durch einen gegebenen Punkt an eine Umdrehungsfläche eine Berührungsebene legen, welche jene auf einen gegebenen Parallelkreis oder Meridian berühre.

§. 369—371. Die Berührungscurve irgend einer Fläche zweiten Grades mit einem umschriebenen Kegel von gegebener Spitze finden.

§. 372—375. Bemerkenswerthe Punkte dieser Curve.

Zweites Kapitel.

Berührungsebenen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel sind. . . 149

§. 377—380. Für jede Fläche gibt es im Allgemeinen einen umschriebenen Cylinder, dessen Seiten einer gegebenen Geraden parallel sind und dessen Berührungslinie alle Auflösungen der Aufgabe liefert.

§. 379. Ist die Fläche entwickelbar, so ist die Aufgabe bestimmt.

§. 381, 382. Für jede Fläche zweiten Grades ist die Berührungslinie des umschriebenen Cylinders stets eben und liegt in der Diametralebene, welche dem mit dem Cylinder parallelen Durchmesser conjugirt ist.

§. 383. Die Berührungscurve einer Umdrehungsfläche mit einem umschriebenen und einer gegebenen Geraden parallelen Cylinder finden.

§. 384, 385. Auflösung, vermittelst der Parallelkreise.

§. 386, 387. Auflösung, vermittelst der Meridiane.

§. 388—390. Bemerkenswerthe Punkte.

§. 391. Dritte Auflösung, vermittelst einer sphärischen Umhüllten.

§. 392, 393. An eine Umdrehungsfläche eine Berührungsebene legen, die einer gegebenen Geraden parallel sei und die Fläche auf einem gegebenen Parallelkreise oder Meridian berühre.

§. 394. Die Berührungscurve irgend einer Fläche zweiten Grades mit einem umschriebenen und einer gegebenen Geraden parallelen Cylinder finden.

Drittes Kapitel.

Berührungsebenen, welche durch eine gegebene Gerade gehen. . . . 156

§. 395, 397. Die allgemeine Auflösung besteht darin: die Punkte aufzusuchen, welche die Berührungscurven zweier um die Fläche beschriebener Kegel, deren Spitzen auf der gegebenen Geraden liegen, gemeinschaftlich haben.

§. 396. Man kann auch die Berührungscurve eines Kegels und eines Cylinders anwenden, welcher letztere parallel mit der gegebenen Geraden ist.

§. 398, 399. Besondere Folgerungen auf die Flächen und Curven vom zweiten Grade.

§. 401, 402. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an eine Kugel legen.

§. 403, 404. Zweite und dritte Auflösung.

§. 405. Vierte Auflösung, welche besonders nützlich ist, wenn die Spuren der Geraden sehr entfernt liegen.

§. 406. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an eine Umdrehungsfläche legen.

§. 407. Besondere Fälle.

§. 408, 409. Zwei andere Methoden für Flächen vom zweiten Grade.

Seite

§. 410—414. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an ein windschiefes Umdrehungshyperboloid legen.
§. 415, 416. Andere Auflösung dieser Aufgabe.
§. 417—419. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an irgend eine Fläche vom zweiten Grade legen.
§. 420. Andere Methode, blos vermittelst der geraden Linie und des Kreises.

Viertes Kapitel.

Berührungsebenen, welche mit einer gegebenen Ebene parallel sind. 164

§. 421—423. Allgemeine Auflösungsmethode.
§. 422. Alle Aufgaben dieser Art erfordern, daß man eine mit einer gegebenen Geraden parallele Normale ziehe.
§. 424. Besondere Fälle, wo die Auflösung sich vereinfacht.

Fünftes Kapitel.

Berührungsebenen an mehreren krummen Flächen zugleich. 166

§. 425. Allgemeine Methode um eine Ebene zu finden, welche zwei gegebene Flächen zugleich berühre.
§. 426, 427. Eine um die beiden gegebenen Flächen umschriebene entwickelbare Fläche.
§. 428, 429. Wenn eine der beiden Flächen, oder alle zwei entwickelbar sind.
§. 430. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungsebene an zwei Flächen legen.
§. 431—433. Von der Ebene, welche drei oder mehr Flächen berührt.
§. 434—436. Eine Ebene finden, welche eine Kugel und einen senkrechten Kegel zugleich berühre.
§. 437—440. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungsebene an zwei Kugeln legen.
§. 441—444. Eine Ebene finden, welche drei Kugeln berührt.
§. 445. Folgerung, in Beziehung auf die drei Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten.

Sechster Abschnitt.

Verschiedene Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Von der Schraubenlinie und der entwickelbaren Schraubenfläche. 172

§. 446, 447. Definition der Schraubenlinie.
§. 448, 449. Ihre Tangente, Länge der Subtangente.
§. 450. Die Neigung der verschiedenen Tangenten gegen die Erzeugenden ist constant.
§. 449. Die Länge eines Bogens der Schraubenlinie ist gleich der seiner Tangente.
§. 451. Construction der Projectionen einer Schraubenlinie, die auf seinem senkrechten Cylinder mit kreisförmiger Grundlinie verzeichnet ist; Gleichung dieser Projectionen.
§. 452, 453. Construction der Tangente an der Schraubenlinie; der Ort der Fußpunkte aller Tangenten ist die Evolvente der Grundlinie des Cylinders.
§. 454, 455. An eine Schraubenlinie eine Tangente ziehen, welche einer gegebenen Ebene oder einer gegebenen Geraden parallel sei.

Seite

456, 457. Entwickelbare Schraubenfläche; ihre Erzeugung und graphische Darstellung.
458. Leichtes Mittel, diese Fläche wirklich darzustellen.
459. Die horizontalen Schnitte sind Spiralen und zeigen deutlich den Uebergang der Mäntel.
460, 461. Die von concentrischen Cylindern gemachten Schnitte sind wieder Schraubenlinien von der nämlichen Ganglänge wie die erste.
462, 463. Berührungsebene an der Schraubenfläche.
465—468. Entwicklung der Schraubenfläche, wobei die Schraubenlinien sich in concentrische Kreise verwandeln.

Zweites Kapitel.

Von den Epicycloiden 181

469, 470. Erzeugung der Epicycloiden.
471—473. Ebene Epicycloiden; verlängert oder verkürzt.
474—477. Innere Epicycloiden. Geradlinige Epicycloide.
478, 479. Cycloide; Kreisevolvente.
480—492. Sphärische Epicycloiden; Tangente; besondere Punkte.
493. Die sphärische Evolvente; ihre Tangente.

Drittes Kapitel.

Ueber Kugeln und Pyramiden 190

497. Den Durchschnitt dreier gegebenen Kugeln finden.
498. Folgerung in Beziehung auf den Durchschnitt dreier Kreise.
499. Eine Pyramide construiren, deren sechs Seitenkanten gegeben sind.
500. Eine Kugel um eine dreiseitige Pyramide beschreiben.
501. Eine Kugel in eine dreiseitige Pyramide einschreiben.
503. Ueberhaupt: eine Kugel finden, welche vier gegebene Ebenen berührt.
504. Einen Punkt construiren, dessen Entfernung von drei gegebenen Punkten, oder von drei gegebenen Geraden, oder von drei gegebenen Ebenen bekannt ist.
506—509. Bestimmung eines Punktes aus den drei Winkeln, welche die Gesichtslinien von diesem Punkt nach drei gegebenen Punkten entweder mit der Vertikalen oder unter sich bilden.

Siebenter Abschnitt.

Von den windschiefen Flächen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen über windschiefe Flächen 197

510. Allgemeine Definition der windschiefen Flächen.
511. Es folgt daraus, daß die den verschiedenen Punkten einer und derselben Erzeugenden entsprechenden Berührungsebenen von einander verschieden sind.

Seite

§. 512. Die Ebene, welche eine windschiefe Fläche in einem Punkte berührt, schneidet letztere in allen andern Punkten, die sie noch mit ihr gemein hat.

§. 513, 514. Eine windschiefe Fläche kann im Allgemeinen erzeugt werden durch eine bewegliche Gerade, welche über drei feste Curven hingleitet.

§. 515. Man kann die bewegliche Gerade auch über zwei Curven hingleiten lassen, während sie zugleich einer festen Richtungsebene parallel bleibt.

§. 516—519. Andere Bedingungen, durch welche die Bewegung der Erzeugenden bestimmt werden kann.

§. 520. Definition der Conoide und der windschiefen Flächen vom zweiten Grade.

Zweites Kapitel.

Von dem Hyperboloid mit einem Mantel. 201

§. 521. Erzeugung dieser Fläche; sie ist windschief.

§. 524. Diese Fläche läßt noch eine Erzeugungsart zu, bei welcher die Erzeugenden zu Richtlinien werden.

§. 525. Lehrsatz von den Segmenten einer Geraden, welche die drei Seiten eines Dreiecks schneidet.

§. 526. Lehrsatz von den Segmenten, welche zwei sich schneidende Gerade bilden, indem sie sich über die Gegenseiten eines windschiefen Vierecks herlegen.

§. 530. Berührungsebene am Hyperboloid.

§. 532. Das Hyperboloid hat einen Mittelpunkt; man erhält ihn aus dem Durchschnitte dreier Ebenen, von denen man jede durch zwei parallele Erzeugungslinien gelegt hat.

§. 535. Identität dieser windschiefen Fläche mit dem einmanteligen Hyperboloide, das unter die fünf Flächen vom zweiten Grade gehört.

§. 536. Synthetischer Beweis, daß letzteres Hyperboloid wirklich zwei Systeme geradliniger Erzeugenden zuläßt.

§. 541. Construction der Berührungsebene dieses Hyperboloids.

§. 542. Verfahren, um die Figur so symmetrisch als möglich zu machen.

§. 543. Vom asymptotischen Kegel des Hyperboloids.

§. 544. Ueber das Geschlecht der Durchschnittscurve, welche eine schneidende Ebene mit dem Hyperboloid erzeugt.

§. 548. Eine Erzeugende des Hyperboloids finden, welche einer gegebenen Ebene parallel sei.

Drittes Kapitel.

Das hyperbolische Paraboloid. 212

§. 549. Erzeugung dieser Fläche; sie ist windschief.

§. 551. Jede mit den beiden Leitlinien parallele Ebene schneidet die Fläche in einer Geraden.

§. 552. Hieraus folgt, daß das Paraboloid eine zweite Erzeugungsart zuläßt, bei welcher zwei der anfänglichen Erzeugenden als Leitlinien dienen, und wo die Richtebene eine andere ist als bei der ersten Erzeugungsart.

§. 553. Das Paraboloid läßt noch zwei andere Erzeugungsarten zu, bei welchen man drei mit einer und derselben Ebene parallele Gerade als Leitlinie anwendet.

§. 555. Relief-Darstellung des Paraboloids.

§. 556. Berührungsebene am Paraboloid.

§. 558. Identität dieser windschiefen Fläche mit dem hyperbolischen Paraboloid, das unter die fünf Flächen vom zweiten Grade gehört.

§. 559. Untersuchung über das Geschlecht der Durchschnittscurve, welche eine schneidende Ebene mit dem Paraboloid erzeugt.

§. 565. Auf dem Paraboloide eine Erzeugende finden, die einer gegebenen Ebene parallel sei.

§. 566. Graphische Darstellung eines durch zwei gerade Leitlinien und eine Richtebene bestimmten Paraboloids.

§. 572. Bestimmung des Scheitels und der Axe dieser Fläche.

§. 573—574. Senkrecht auf die Axe gemachte Schnitte. Berührungsebene an diesem Paraboloid.

Seite

Viertes Kapitel.

Berührungsebenen an windschiefen Flächen überhaupt 221

§. 575. Wenn zwei windschiefe Flächen drei gemeinschaftliche Berührungsebenen haben, deren Berührungspunkte auf derselben Erzeugenden liegen, so berühren diese Flächen sich längs dieser Erzeugenden.
§. 576. Haben die windschiefen Flächen eine gemeinschaftliche Richtebene, so dürfen sie nur noch zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen haben, um sich nach der ganzen Länge der gemeinschaftlichen Berührungsebenen zu berühren.
§. 577. Allgemeines Verfahren, um die Berührungsebene einer windschiefen Fläche für einen auf einer Erzeugenden gegebenen Punkt zu finden.
§. 581. Fall, wo eine der Leitlinien eine Fläche ist.
§. 582. Fall, wo die Tangenten an den Leitlinien nicht bekannt sind.
§. 583. Jede durch eine Erzeugende einer windschiefen Fläche gehende Ebene berührt die Fläche in einem Punkte, der sich bestimmen läßt.
§. 584. Construction der Tangente an eine beliebig gezeichnete Curve.
§. 585. Von der Berührungsebene an einer windschiefen Fläche, wenn sie durch einen gegebenen Punkt gehen soll.
§. 589. Fall, wo diese Ebene durch eine gegebene Gerade gehen soll.
§. 592. Fall, wo sie mit einer gegebenen Ebene parallel sein soll.
§. 595. In jeder windschiefen Fläche ist der Ort aller durch die verschiedenen Punkte einer und derselben Erzeugenden gehenden Normalen ein hyperbolisches Paraboloid.

Fünftes Kapitel.

Verschiedene Arten von windschiefen Flächen. . . . 227

§. 596. Erzeugung und Darstellung eines senkrechten Conoids.
§. 598. Construction der Berührungsebenen für verschiedene Punkte einer und derselben Erzeugenden.
§. 601. Das um eine Kugel beschriebene Conoid. Construction der Berührungsebene.
§. 606. Gewölbe über einem schrägen Gange. Erzeugung dieser windschiefen Fläche.
§. 608. Construction der Berührungsebene und der Normale.
§. 610. Windschiefe Schraubenfläche. Erzeugung dieser Fläche und Construction ihrer Erzeugenden.
§. 613. Zweite Erzeugungsart dieser Fläche. Dritte Erzeugungsart.
§. 616. Die windschiefe Schraubenfläche hat einen oberen Mantel, welche den unteren in Schraubenlinien von der nämlichen Ganglänge schneidet.
§. 617. Vollständige Darstellung dieser Fläche mit den Umhüllungscurven der Erzeugenden und den Asymptoten.
§. 618. Bemerkenswerthe Schnitte; die von horizontalen Ebenen erzeugten sind archimedische Spiralen.
§. 621. Construction der Berührungsebene an der Schraubenfläche für einen auf einer Erzeugenden gegebenen Punkt.
§. 625. Berührungsparaboloid.
§. 627. Den Berührungspunkt der Schraubenfläche mit einer gegebenen Ebene finden, welche durch eine gegebene Erzeugende geht.
§. 628. Windschiefe Schraubenfläche mit einer Richtungsebene.
§. 632. Schraube mit dreieckigem Gewinde. Erzeugung der Gewindefläche und vollständige Darstellung der Schraube sammt den Umhüllungscurven der Erzeugenden.
§. 637. Schraube mit viereckigem Gewinde.
§. 640. Das Conoid über einem ringförmigen Kreuzgewölbe. Bestimmung der Kreuzbögen.
§. 643. Die Projectionen dieser Curven sind archimedische Spiralen.
§. 644. Anmerkung über die Gleichungen dieser Curven.
§. 645. Tangente an einem Kreuzbogen.
§. 646. Construction dieser Tangente für den vielfachen Punkt.
§. 647. Construction dieser Tangente an den Anfangspunkt des Kreuzbogens durch ein sehr einfaches Verfahren, das sich auf jeden beliebigen Punkt der Curve anwenden läßt.

Seite

Achter Abſchnitt.

Von der Krümmung der Linien und Flächen.

Erſtes Kapitel.

Von der Krümmung und den Evoluten krummer Linien. . . . 245

§. 649. Definition der Berührungen verſchiedener Ordnung; Oskulationskreis, Oskulationsebene für einen auf einer Curve gegebenen Punkt.
§. 653. Die Krümmung einer Curve an jedem Punkte wird gemeſſen durch das Verhältniß der Einheit zum Halbmeſſer des Oskulationskreiſes.
§. 654. Die windſchiefen Curven haben nur eine einzige Krümmung, dagegen haben ſie eine Windung, welche durch den Winkel zweier unendlich nahen Oskulationsebenen gemeſſen wird.
§. 655. Die Krümmungshalbmeſſer einer windſchiefen Curve ſchneiden ſich nicht und folglich bilden die Krümmungsmittelpunkte auch keine Evolute.
§. 658. Deſſen ungeachtet hat eine windſchiefe Fläche unendlich viele Evoluten, die alle auf einer entwickelbaren Fläche liegen, auf der ſie die kürzeſten Linien ſind zwiſchen zweien ihrer Punkte.
§. 660. Fall, in welchem die gegebene Curve ſphäriſch iſt.
§. 661. Wenn ſie eben iſt, ſo ſind ihre Evoluten Schraubenlinien.
§. 662. Bemerkungen über die Lage des Oskulationskreiſes und der Oskulationsebene, welche beide gewöhnlich die gegebene Curve ſchneiden.
§. 664. Conſtruction der Krümmungsebene für einen auf einer Curve gegebenen Punkt.
§. 665. Conſtruction des Krümmungshalbmeſſers einer Curve für einen gegebenen Punkt.
§. 667. Allgemeines Verfahren, um eine Evolute irgend einer Curve und den Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte zu conſtruiren.
§. 669. Den Ort der Krümmungsmittelpunkte und eine Evolute der ſphäriſchen Evolvente zu finden.
§. 672. Es iſt eine Schraubenlinie mit kreisförmiger Grundlinie gegeben, man ſoll den Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte und eine ihrer Evoluten conſtruiren. Beweis, daß der Ort aller Evoluten eine entwickelbare Schraubenfläche iſt, deren Wendecurve die Krümmungsmittelpunkte der urſprünglichen Schraubenlinie enthält.
§. 674. Der Krümmungshalbmeſſer der urſprünglichen Schraubenlinie und der der Wendecurve der Schraubenfläche ſind beide gleich der Summe der Halbmeſſer der beiden Cylinder, auf welchen jene beiden Curven liegen.
§. 675. Wechſelverhältniß zwiſchen den Kontingenz- und Windungswinkeln dieſer beiden Schraubencurven; Anmerkung über einen ähnlichen Umſtand.
§. 676. Analytiſcher Werth dieſer Krümmungshalbmeſſer.
§. 677. Conſtruction einer Evolute der urſprünglichen Schraubenlinie; ihrer verſchiedenen Aeſte und ihrer Aſymptoten.

Zweites Kapitel.

Von der Krümmung der Flächen. 257

§. 684. Definition zweier oskulirenden Flächen an einem gemeinſchaftlichen Punkte.
§. 685. Ueber die Krümmungshalbmeſſer der Normalſchnitte, welche durch einen und denſelben Scheitel eines Ellipſoids gehen.
§. 686. Ueber die Krümmungshalbmeſſer an einem reellen Scheitel eines windſchiefen Hyperboloids. Gränznormalebenen.
§. 690. Für jeden Punkt einer beliebigen Fläche gibt es zwei Hauptnormalſchnitte, die in ſenkrecht aufeinander ſtehenden Ebenen liegen und deren einer einen Halbmeſſer der kleinſten und der andere einen Halbmeſſer der größten Krümmung hat; Beziehung, in welcher dieſe Halbmeſſer zum Halbmeſſer eines andern Normalſchnitts ſtehen.
§. 691. Unterſuchung über die Krümmung der Normalſchnitte in einer converen Fläche; von den Nabelpunkten.

Seite

§. 693. Aehnliche Unterſuchung über eine nicht-convexe Fläche; Gränznormalebenen.
§. 696. Synthetiſcher Beweis, daß es für jeden Punkt einer beliebigen Fläche ein oskulirendes Ellipſoid oder windſchiefes Hyperboloid gibt.
§. 699. Von den Krümmungslinien einer Fläche. Beweis, daß es im Scheitel eines Ellipſoids oder eines windſchiefen Hyperboloids nur zwei Krümmungslinien gibt.
§. 702. Für jeden Punkt einer Fläche im Allgemeinen gibt es nur zwei Krümmungslinien, die rechtwinklig ſich durchſchneiden, weil ſie Berührungslinien an den zwei Hauptſchnitten ſind.
§. 707. Verſchiedene Beiſpiele von Krümmungslinien und Hauptſchnitten an Umdrehungsflächen, Cylindern, Kegeln, entwickelbaren und windſchiefen Flächen.
§. 714. Von den beiden Flächenmänteln, in welchen die Mittelpunkte der beiden Krümmungen irgend einer Fläche enthalten ſind.
§. 721. Von der Linie der ſphäriſchen Krümmungen.
§. 723. Anwendung dieſer Theorien in verſchiedenen Künſten.
§. 725. Graphiſche Darſtellung der Krümmungslinien.
§. 730. In den nicht-convexen Flächen ſind die Durchſchnitte der Gränznormalebenen mit der Berührungsebene zugleich Tangenten des Durchſchnitts dieſer Ebene mit der Fläche.
§. 734. Conſtruction der Tangenten an dem vielfachen Punkte des Durchſchnitts, den die Berührungsebene eines Wulſtes mit eben dieſer Fläche erzeugt.
§. 735. Ueber die Conſtruction der Krümmungslinien eines Ellipſoids mit drei ungleichen Aren.
§. 741. Anwendung dieſer Conſtruction, von Monge vorgeſchlagen.
§. 744. Conſtruction des oskulirenden Hyperboloids an einer windſchiefen Fläche längs einer Erzeugenden.

Anhang.

§. 745. Wenn ein Cylinder durch eine ebene Curve in eine Kugel eindringt, ſo iſt die Austrittscurve ebenfalls eben und der Eintrittscurve gleich.
§. 746. Wenn beim Durchſchnitt eines Kegels mit einer Kugel die Eintrittscurve eben iſt, ſo iſt es auch die Austrittscurve; dieſe iſt der antiparallele Schnitt des Kegels.
§. 748. Wenn zwei Cylinder vom zweiten Grade ſich in einer ebenen Curve ſchneiden, ſo iſt die Austrittscurve ebenfalls eben.
§. 750. Wenn zwei Flächen vom zweiten Grade eine gemeinſchaftliche Are haben, ſo können ſie ſich nur in zwei ebenen Curven ſchneiden.
§. 753. Beſonderer Fall für zwei cylindriſche Gewölbe, welche den nämlichen Anfang und gleiche Höhe haben.
§. 754. Ueber die Tangente des Durchſchnitts zweier Flächen an dem beſondern Punkte, wo ſie ſich berühren.
§. 755. Lehrſatz über die conjugirten Tangenten.

Kottirte Ebenen 286

§. 759. Nutzen dieſer Methode in verſchiedenen Künſten.
§. 761. Graphiſche Beſtimmung eines Punktes und einer Geraden; Conſtruction des Böſchungsmaßſtabes dieſer Linie; verſchiedene Aufgaben über gerade Linien.
§. 769. Graphiſche Darſtellung einer Curve.

§. 770. Graphiſche Darſtellung einer begrenzten Ebene; für eine beſtimmte Ebene genügt der Böſchungsmaßſtab.
§. 773. Verſchiedene Aufgaben über Ebenen und Geraden.
§. 789. Darſtellung der krummen Flächen durch kottirte Horizontalebenen von gleichem Abſtand; Elemente der Linie des größten Falles.
§. 793. Die Kotte eines auf einer bekannten Fläche liegenden und durch ſeine Horizontalprojection gegebenen Punktes finden.
§. 795. Conſtruction der Berührungsebene für einen auf einer bekannten Ebene gegebenen Punkt.
§. 797. Ueber die Lage der Berührungsebene in Beziehung auf die Fläche.
§. 800. Den Durchſchnitt einer gegebenen Ebene mit einer bekannten Fläche finden.
§. 802. Den Durchſchnitt einer gegebenen Geraden mit einer bekannten Fläche finden.
§. 803. Durchſchnitt zweier bekannten Flächen oder einer Fläche mit einer Curve.

Darstellende Geometrie.

Erster Abschnitt.

Von den geraden Linien und Ebenen.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

§. 1.

Gewisse Künste und technische Wissenschaften machen fast bei jedem Schritte, den man in ihnen thut, das Bedürfniß fühlbar, körperliche Formen genau darzustellen; entweder, um gewisse geometrische Verhältnisse, die man an ihnen entdeckt hat, augenscheinlich zu machen, oder auch, um dem Künstler, der jene Formen nach bestimmten Maßverhältnissen hervorbringen soll, eine deutliche Anweisung zu geben. Unter allen Mitteln aber, die zur Erreichung dieser Zwecke dienen können, ist das wirksamste und in manchen Fällen das einzige — die graphische Darstellung oder Zeichnung der Körper. Diese nun ist der Hauptgegenstand der darstellenden Geometrie, deren allgemeine Methoden durch ihre Fruchtbarkeit in der Anwendung als Mittel zur Auffindung neuer Eigenschaften der Raumgrößen dienen und zugleich die Art und Weise bestimmen sollen, nach welcher die verschiedenen Probleme aus der Perspective, Stereotomie, Fortification ꝛc. ꝛc. aufgelöst werden müssen.

§. 2.

Hier aber zeigen sich zwei Hauptschwierigkeiten. Für's Erste haben alle Körper drei Ausdehnungen; da nun eine wirkliche Construction derselben im Raume sehr beschwerlich, wenn nicht gar unausführbar wäre, so muß man sich nach solchen Methoden umsehen, durch welche man in den Stand gesetzt wird, alle Punkte im Raum ihrer gegenseitigen Lage nach auf eine Ebene beziehen, oder wenigstens alle graphischen Operationen in dieser einen Ebene vornehmen zu können.

§. 3.

Da aber, für's Zweite, diese Methoden nicht zur Aufstellung bloßer Theorien, sondern vielmehr zur Ausführung wirklicher Operationen dienen sollen, so müssen sie zugleich die Mittel angeben, wie man sowohl die gegebenen Stücke einer Aufgabe, als auch die daraus erlangten graphischen Resultate vollkommen genau darstellen könne; und dieß ist es hauptsächlich, worin sich diese Methoden von denen der gewöhnlichen Geometrie unterscheiden, wenigstens wenn in letzterer die drei Ausdehnungen des Raumes in Betracht kommen. In der gewöhnlichen Geometrie nämlich sollen die Figuren dem Verstand nur als Führer dienen durch die Reihe der zu dem Beweise eines Lehrsatzes nothwendigen Schlüsse, daher sie denn auch gewöhnlich auf eine unbestimmte Art und nach gewissen stillschweigenden Voraussetzungen, welche immerhin viel Willkührliches enthalten, gezeichnet werden.

Um sich hievon zu überzeugen, erinnere man sich nur der Art, wie man gewöhnlich die Aufgabe löst: zwischen zwei gegebenen Geraden, die nicht in einerlei Ebene liegen, die kürzeste Linie zu

ziehen; oder die Aufgabe: den Mittelpunkt und den Halbmesser einer Kugel zu finden, welche durch 4 gegebene Punkte gehen soll. Die gewöhnliche Geometrie zeigt bei diesen Aufgaben wohl an, welche Constructionen man und in welcher Folge man sie vorzunehmen habe, um zur Auflösung zu gelangen; aber sie giebt die Mittel nicht an, wie diese Constructionen wirklich ausgeführt werden können, damit man ein völlig bestimmtes Resultat erhalte, sowohl was die Größe und Lage der kürzesten Linie in der ersten, als auch was die Länge des Halbmessers und die Lage des Mittelpunkts der gesuchten Kugel in der zweiten Aufgabe betrifft.

Soll also die darstellende Geometrie ihren Zweck genau erfüllen, so muß sie eine Art der Construction aufstellen, welche in der Darstellung der gegebenen Stücke und der daraus erhaltenen Resultate nichts Willkührliches mehr zuläßt, und welche es gestattet, alle graphischen Operationen in einer und derselben Ebene auszuführen. Diese beiden Vortheile aber erreicht sie in der That durch die Methode der Projectionen, deren Grundsätze nun erläutert werden sollen.

§. 4.

Fig. 1. Wenn man von einem im Raume gelegenen Punkt a auf eine feste Ebene VXY eine senkrechte aA fällt, so heißt der Fußpunkt A dieser Senkrechten die Projection des Punktes a auf der Ebene VXY. Die Senkrechte aA heißt die projicirende Linie.

Fällt man ferner aus allen Punkten der im Raume liegenden Geraden a, b, d... die Senkrechten aA, bB, dD ꝛc. ꝛc. auf die Ebene VXY, so bilden die Fußpunkte A, B, D ... dieser Senkrechten die Projection der Geraden abd.... auf gedachter Ebene. Diese Projection muß geradlinig sein; denn die projicirenden Linien der einzelnen Punkte von abd... liegen alle in der durch eine derselben (z. B. aA) und durch die Gerade abd gelegten Ebene; die Projection von abd ist also nichts anderes, als der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene VXY...; dieser Durchschnitt aber ist eine gerade Linie.

Man nennt die Ebene, welche durch die Gerade abd... und eine ihrer projicirenden Senkrechten gelegt wird, die projicirende Ebene jener Geraden. Ueberhaupt wird die Projection irgend einer Curve mnp bestimmt durch die Reihe der Fußpunkte derjenigen Senkrechten mM, nN, pP...., welche man aus den verschiedenen Punkten der Curve auf die Ebene VXY gefällt hat, und diese Projection MNP ist eine Linie, deren Krümmung gewöhnlich von der der Curve abweicht. Alle die projicirenden Senkrechten der im Raume gegebenen Curve bilden zusammen eine cylindrische Fläche (im allgemeinen Sinne des Wortes), welche man den projicirenden Cylinder der Curve mnp nennt.

§. 5.

Ein Punkt, eine Gerade oder eine Curve sind ihrer Lage nach vollkommen bestimmt, wenn ihre Projectionen auf zwei Ebenen gegeben sind, deren Lage bekannt ist und welche nicht parallel sein dürfen.

Es seien VXY und XYZ zwei solche Ebenen, und A, A′ die gegebenen Projectionen eines gewissen Punktes im Raume; errichtet man nun im Punkt A eine ihrer Länge nach unbestimmte Senkrechte Aa auf die Ebene VXY, so wird solche durch den gesuchten Punkt gehen; durch eben diesen Punkt muß aber auch die in A′ auf die Ebene XYZ errichtete Senkrechte gehen; folglich muß der gesuchte Punkt in dem Durchschnitte der beiden Senkrechten liegen. In der That, wenn die beiden Geraden Aa und A′a sich nicht schnitten, so gäbe es keinen Punkt im Raume, dessen Projectionen A und A′ wären; daraus folgt aber, daß nicht jede zwei nach Willkühr angenommene Projectionen einen Punkt im Raume bestimmen, sondern daß sie auf eine gewisse Art von einander abhängen, wie später (§. 10) erklärt werden wird.

§. 6.

Es seien ferner AD und A′D′ die Projectionen einer unbekannten Geraden auf den beiden Ebenen VXY Fig. 1.
XYZ. Denkt man sich nun durch die erste AD dieser Projectionen eine auf VXY senkrechte Ebene DAa
gt, so ist klar, daß die gesuchte Gerade in dieser Ebene liegen müsse; sie muß aber auch in der Ebene D′A′a
en, welche durch D′A′ senkrecht auf XYZ gelegt ist; die gesuchte Linie muß also nothwendig in dem Durch-
itte der beiden Ebenen DAa und D′A′a liegen, der eine einzige, bestimmte Gerade ist. Nur ein Fall
de hier eine Ausnahme machen, nämlich der, da die beiden projicirenden Ebenen DAa und D′A′a in eine
ige zusammenfielen, welches geschehen würde, wenn die Gerade im Raume sowohl, als auch ihre beiden Pro-
ionen senkrecht wären auf dem Durchschnitt der beiden Ebenen VXY und XYZ. Alsdann würden diese zwei
jectionen nicht genügen, um die gesuchte Gerade zu bestimmen, und man müßte noch eine dritte Projection
einer andern, mit dem Durchschnitt XY nicht parallelen Ebene, anwenden.

§. 7.

Wären endlich die beiden Projectionen MNP und M′N′P′ einer unbekannten Curve gegeben, so denke man
durch die erste derselben eine auf VXY und durch die zweite eine auf XYZ senkrechte cylindrische Fläche
gt, so muß die gesuchte Curve sich nothwendig in jeder der beiden Flächen befinden, und daher ist ihre Lage
ohl, als auch ihre Gestalt durch den Durchschnitt mnp vollkommen bestimmt. Dieser Durchschnitt kann auch
Linie von doppelter Krümmung*) (ligne à double courbure), d. h. eine solche sein, deren Punkte nicht
in einer Ebene liegen.

Künftig werden also ein Punkt oder eine Linie immer durch ihre beiden Projectionen bestimmt werden; und
n gesagt wird, der oder jener Punkt, diese oder jene Linie sei gegeben, so hat man darunter zu verstehen,
Projectionen seien bekannt. Was die Flächen betrifft, so wird später gezeigt werden, wie zu ihrer Dar-
ung die Anwendung der Projectionen modificirt werden müsse.

§. 8.

Im Vorhergehenden wurde angenommen, daß man die Projectionen mittelst senkrechter, auf eine gege-
e Ebene gefällter, Geraden erhalte. Nun wendet man zwar auch solche projicirende Linien an, die schief,
r immer mit einer gegebenen Richtung parallel, auf der gegebenen Ebene stehen, und es gelten auch in diesem
le alle in den §§. 5, 6 und 7 aufgestellten Folgerungen; es müssen jedoch schon sehr wichtige Gründe vor-
den sein, wenn man schiefe projicirende Linien anwendet; denn diese gestatten keine so einfache Ausführung
graphischen Operationen, und man erhält auch weniger genaue Resultate, indem bei geraden Linien, welche
schief schneiden, der Durchschnittspunkt nie vollkommen genau erkannt werden kann. Wenn also nicht aus-
klich das Gegentheil gesagt wird, so hat man es im Folgenden immer mit orthogonalen oder rechtwinkligen
jectionen zu thun.

Aus ähnlichen Gründen wählt man gewöhnlich zu den Projections-Ebenen VXY und XYZ solche, welche
recht auf einander stehen, und um sie leicht von einander unterscheiden zu können, nimmt man an, die eine

*) Diese Benennung kommt nicht, wie fälschlich gesagt wurde, daher, daß eine solche Curve an den beiden Krümmungen der Flächen, deren Durchschnitt sie ist, Theil nimmt; denn fürs Erste kann eine Fläche mehr als eine Krümmung haben, und fürs Zweite kann eine und dieselbe Curve der Durchschnitt unendlich vieler, sehr von einander verschiedener Flächen sein. Jene Benennung will vielmehr sagen, daß eine Curve, die nicht eben ist, zwei Krümmungsarten darbietet, die eine in Beziehung auf ihre Tangente, die andere in Beziehung auf ihren Krümmungskreis, wovon später (§. 654). Die erste ist die einzige und wahre Krümmung der Curve, die zweite ist eine Biegung oder Windung (torsion); daher denn auch der Ausdruck „windschiefe" Curve (courbe gauche) genauer und einfacher wäre.

derselben sei horizontal, die andere vertikal, und nennt die erstere die horizontale und die andere die vertikale Grundebene. Ihren Durchschnitt XY, der eine Linie von großer Wichtigkeit ist, nennt man die Projectionsaxe oder auch die Axe schlechtweg (ligne de terre).

§. 9.

Durch diese Methode nun ist man im Stande, die gegebenen Stücke einer jeden Aufgabe ohne irgend eine Unbestimmtheit graphisch darzustellen, und es kommt jetzt nur noch darauf an, nachzuweisen, wie man alle Constructionen auf einer einzigen Ebene ausführen könne.

Man denke sich zu diesem Ende, nachdem man die fraglichen Punkte und Linien auf die Grundebenen VXY und XYZ projicirt hat, die letztere dieser Ebenen so um die Axe XY gedreht, daß sie mit der Horizontalebene VXY in eine Ebene VZ′ zusammenfalle. Diese Ebene ist alsdann die Zeichnen-Ebene, in welcher man alle die Constructionen wirklich ausführt, die man auf den beiden Grundebenen hätte machen müssen. Man nennt dieses Verfahren „aufklappen." Hiebei darf man jedoch nicht aus dem Auge verlieren, daß dieses Aufklappen nur als Mittel zur Ausführung dient; daher man denn auch jedesmal, so oft man sich durch geometrische Betrachtungen Rechenschaft über irgend eine Operation ablegen will, die Vertikalebene in ihre vorige Lage zurückgeführt und senkrecht auf der Horizonatalebene denken muß.

§. 10.

Fig. 1. Wenn die beiden Grundebenen im aufgeklappten Zustande sich befinden, so findet zwischen den beiden Projectionen eines im Raume gegebenen Punktes eine sehr wichtige Beziehung in Hinsicht auf ihre gegenseitige Lage statt. Da nämlich von den projicirenden Linien Aa und A′a des Punktes a, die eine auf der Horizontal-, die andere auf der Vertikalebene senkrecht ist, so muß die durch jene beiden Linien gelegte Ebene AaA′ senkrecht auf den beiden Grundebenen und mithin auch senkrecht auf ihrem Durchschnitte XY stehen; daraus aber folgt, daß die beiden Geraden AF und A′F, in welchen die Ebene AaA′ die beiden Grundebenen schneidet, senkrecht auf der Axe XY stehen und sich in einem und demselben Punkte F derselben treffen müssen. Dreht man also die Vertikalebene XYZ um XY, so dreht sich zugleich die Gerade A′F mit herum und bleibt während der ganzen Umdrehung senkrecht auf der Axe XY. Ist nun endlich die Vertikalebene in die Lage XYZ′ gekommen, in welcher sie mit der Horizontalebene eine einzige Ebene bildet, so wird auch die Gerade A′F in die Lage A″F gekommen sein, in welcher sie offenbar mit der Verlängerung von AF zusammenfällt. Also:

Die beiden Projectionen A und A″ eines Punktes im Raume müssen sich immer in einer und derselben auf der Axe senkrechten Geraden befinden, wenn die Grundebenen im aufgeklappten Zustande sind.

Nimmt man also, um einen beliebigen Punkt im Raume zu bestimmen, die eine seiner Projectionen, z. B. A willkürlich an, so muß man eine unbegränzte Gerade AF senkrecht auf XY ziehen und irgendwo auf der Verlängerung von AF die zweite Projection A″ annehmen.

§. 11.

Klappt man auf dieselbe Art den Punkt D′ auf D″, so wird A″D″ die aufgeklappte Vertikalprojection A′D′ der Linie ad sein. Da aber A″D″ nicht von AD abhängig ist, so kann man willkürlich zwei Linien AD und A″D″ ziehen, und sie als die Projectionen einer und derselben Geraden im Raume betrachten. Nur in dem Falle, da AD senkrecht auf der Achse XY steht, findet abermals eine Ausnahme statt, indem alsdann die Vertikalprojection auch eine Verlängerung von AD sein muß; aber es wurde schon oben (§. 6) bemerkt, daß in diesem besondern Falle zwei solche Projectionen nicht hinreichend seien, eine Gerade ihrer Lage nach zu bestimmen.

§. 12.

In Zukunft ſollen die beiden aufgeklappten Grundebenen immer ſo dargeſtellt werden, daß die Axe XY in Fig. 2. bezeichnete Lage bekomme. Alsdann ſtellt der Theil VXY des Zeichnenblattes den vorderen il der horizontalen Grundebene und zu gleicher Zeit den unteren Theil der vertikalen Grundebene vor, welletztere beim Aufklappen mit erſterem zuſammenfiel; eben ſo begreift der Theil XYZ den obern Theil der tikalebene und den hintern Theil der Horizontalebene in ſich.*) Aber eben deßhalb iſt es zur genauen Bemung eines Punktes im Raume nicht hinreichend, ſeine beiden Projectionen A und A′ ohne nähere Bezeichg anzugeben; ſondern es muß auch noch angemerkt werden, ob der Punkt A die horizontale, oder ob er die tikale Projection des fraglichen Punktes ſei. Denn je nachdem die eine oder die andere dieſer Annahmen gilt, bt ſich ein bedeutender Unterſchied in der wahren Lage des Punktes im Raume. Damit man alſo in Zukunft e, auf welche Grundebene jede der Projectionen bezogen werden müſſe, ſo ſtehe als Regel feſt, daß, für gemlich, die Horizontalprojectionen eines Punktes oder einer Geraden durch Buchſtaben ohne Accent und Vertikalprojectionen durch accentuirte Buchſtaben bezeichnet werden ſollen.

Der Punkt (A, A′) Fig. 2. wird alſo einen Punkt im Raume bezeichnen, der horizontal in A und ver in A′ projicirt iſt; der Punkt (B, B′) einen ſolchen, der horizontal in B und vertikal in B′ projicirt iſt, o deſſen Horizontalprojection in den hintern Theil der Horizontalebene und die Vertikalprojection in den ern Theil der Vertikalfläche fällt); eben ſo iſt es auch mit dem Punkt (C, C′) und (D, D′). Der Anfänger aber wohl daran thun, ſeine Einbildungskraft darin zu üben, ſich die verſchiedenen Lagen dieſer Punkte uſtellen, — ob ſie über oder unter, vor oder hinter der Grundebene liegen, — damit er in Zukunft mit htigkeit erkennen möge, in welchem der vier, von den Grundebenen gebildeten, Flächenwinkel ein durch ſeine jectionen beſtimmter Punkt ſich befinde.

§. 13.

Das Nämliche gilt auch von Linien; ſo wird z. B. durch (AB, AB′) in Fig. 3. eine ſolche Gerade im me bezeichnet, deren Horizontalprojection AB und deren Vertikalprojection A′B′ iſt. Und da außerdem auch Gerade ihrer Lage nach vollkommen beſtimmt iſt, wenn man nur zwei ihrer Punkte kennt, ſo ſoll nun im genden das Mittel angegeben werden, durch welches man die Grundſchnitte, Spuren (traces) einer raden, d. h. die beiden Punkte, in welchen ſie die Grundebenen trifft, finden kann.

Da die vertikale Spur der Geraden (AB, A′B′) ein Punkt iſt, der ſowohl in der Vertikalebene als in der Geraden ſelbſt liegt, ſo muß ſeine Horizontalprojection in der Axe**) und zugleich auch in der ver-

*) Es wird wohl kaum zu erinnern nöthig ſein, daß die Worte „vorder“ „hinter“ „ober“ und „unter“ ſich auf die Stellung des Leſers gegen die Grundebenen beziehen. Die Horizontalebene iſt zugleich die Ebene des Zeichnenblattes. Denkt man ſich alſo, indem man Fig. 2. vor ſich liegen hat, in der Axe XY die auf VZ ſenkrechte Vertikalebene wirklich errichtet, ſo iſt in Bezug auf die Stellung des Leſers, VY der vordere und XZ der hintere Theil der Horizontalebene. Denkt man ſich nun ferner die Vertikalebene ſo um XY gedreht, daß der über der Ebene des Zeichnenblattes ſich befindliche Theil derſelben auf XZ zu liegen kommt, ſo wird der Theil unterhalb des Zeichnenblattes mit VY zuſammenfallen, ſo daß man alſo mit Recht ſagen kann, XZ ſei der obere und VY der untere Theil der (im aufgeklappten Zuſtande ſich befindenden) Vertikalebene. Anmerk. d. Ueberſ.

*) Liegt nämlich ein Punkt in einer der beiden Grundebenen ſelbſt, z. B. in der vertikalen, ſo fällt er mit ſeiner Vertikalprojection zuſammen, ſeine Horizontalprojection aber fällt in die Axe. So iſt z. B. in Fig. 1. die Vertikalprojection des in der Ebene XZ liegenden Punkts A′, der Punkt A′ ſelbſt; ſeine Horizontalprojection hingegen iſt F, welcher Punkt in der Axe XY liegt.

Ferner iſt die Horizontalprojection des in der Ebene VXY liegenden Punktes A, der Punkt A ſelbſt; ſeine Vertikalprojection hingegen iſt der in der Axe liegende Punkt F. Liegt endlich ein im Raume gegebener Punkt zugleich in der Axe der Grundebenen, ſo fällt er mit ſeinen beiden Projectionen zuſammen. Anmerk. d. Ueberſ.

längerten AB sich befinden; mithin ist C die Horizontalprojection der gesuchten Spur, und diese muß daher irgendwo in der Vertikalen CC′ liegen; da er sich aber offenbar auch in der Vertikalprojection A′B′ befinden muß, so kann er nur im Punkt C′ liegen. Hieraus ergibt sich folgende allgemeine Regel, die man wohl zu merken hat: Man verlängere die Horizontalprojection bis zu ihrem Durchschnitt mit der Are und errichte in diesem eine Vertikale, so wird der Punkt, in welchem diese die Vertikalprojection trifft, die gesuchte vertikale Spur der gegebenen Geraden sein.

Ferner, da die horizontale Spur der nämlichen Geraden in der Horizontalebene und zugleich auch in der gegebenen Linie liegen soll, so muß ihre Vertikalprojection in der Are XY und zugleich auch in der verlängerten A′B′ sich befinden; der Punkt D′ wird mithin diese Vertikalprojection sein, und die gesuchte horizontale Spur muß irgendwo in der auf der Are senkrechten D′D liegen. Da sie aber nothwendigerweise auch in der Horizontalprojection AB liegt, so muß sie in den Punk D fallen. Also: man verlängere die Vertikalprojection bis zur Are und errichte auf letztere eine Senkrechte, so wird der Punkt, in welchem diese mit der Horizontalprojection zusammentrifft, die gesuchte horizontale Spur der gegebenen Geraden sein.

§. 14.

Sind umgekehrt die beiden Spuren D und C′ einer Geraden gegeben, so kann man daraus leicht die Projectionen derselben finden. Denn da der Punkt C′ der Geraden selbst angehört, so wird der Fußpunkt C der aus C′ auf die Are gefällten Senkrechten ein Punkt der Horizontalprojection sein. Diese muß daher offenbar DC sein. Eben so wird der Fußpunkt D′ der aus D auf die Are gefällten Senkrechten DD′, ein Punkt der Vertikalprojection sein, für welche man daher die Linie D′C′ erhält. Sind daher die beiden Spuren einer Geraden gegeben, so erhält man die Horizontalprojection dieser letzteren, wenn man aus der vertikalen Spur eine Senkrechte auf die Are fällt, und den Fußpunkt dieser Senkrechten mit der horizontalen Spur durch eine gerade Linie verbindet. Und die vertikale Projection erhält man, wenn man aus der horizontalen Spur eine Senkrechte auf die Are fällt und den Fußpunkt dieser Senkrechten mit der vertikalen Spur durch eine Gerade verbindet.

Man wird wohl daran thun, sich in der Auflösung dieser beiden Aufgaben, von denen die eine die Umkehrung der andern ist, zu üben und zwar an Linien von verschiedener Lage, wie z. B. Fig. 3. an der Linie (EF, E′F′), deren horizontale Spur F und die vertikale G′ ist, oder an den Linien (HK, H′K′), deren vertikale Spur K′ und die horizontale L ist.

§. 15.

Beim Schlusse dieser Einleitung ist es nothwendig, einige wesentliche Regeln aufzustellen, welche man bei der Zeichnung aller der nun folgenden Figuren zu beobachten hat. Da nämlich diese Figuren dazu dienen sollen, die Gestalt der betrachteten Gegenstände genau darzustellen, so müssen die verschiedenen Striche und Punkte, welche man dabei anwendet, eine gewisse dem Auge verständliche Sprache bilden. Durch sie muß die Stellung der verschiedenen Theile gegen einander klar und bestimmt angezeigt und zugleich unterschieden werden, welche von diesen Theilen dem Auge sichtbar und welche demselben verborgen sind; ferner, welche von diesen Linien zu den eigentlichen Resultaten einer Aufgabe gehören, und welche von denselben nur als Hülfslinien bei der Auflösung dienen. Um nun allen diesen Forderungen ein Genüge leisten zu können, ist es nöthig, ein für allemal folgende Regeln festzustellen:

1) Die Hauptlinien d. h. diejenigen, welche entweder die gegebenen Stücke oder die Resultate

einer Aufgabe darstellen sollen, werden, im Falle sie sichtbar sind, durch einen vollen stetigen Strich bezeichnet; wenn sie aber unsichtbar sind, so werden sie nur punktirt, das heißt mit runden Punkten bezeichnet. Beispiele dieser beiden Arten der Zeichnung sieht man an den Linien ABCD und EFGH der Fig. 3. bis.

2) Die Hülfslinien, d. h. diejenigen, welche nicht zu der Klasse der vorigen gehören, und nur zur Auflösung einer Aufgabe dienen, werden gestrichelt d. h. durch kleine unzusammenhängende Striche bezeichnet, wie z. B. die Linie P in Fig. 3. bis. Bei diesen Hülfslinien unterscheidet man nie, ob sie sichtbar oder unsichtbar sind, weil angenommen wird, daß sie nicht wirklich, sondern nur in der Einbildung des Geometers existiren, der sich dieselben denkt, um zu einem gewünschten Resultate zu gelangen.

3) Befindet sich unter diesen Hülfslinien eine oder die andere, auf welche man, wegen ihrer Wichtigkeit die Aufmerksamkeit besonders lenken will, so kann man sie durch eine gemischte Linie darstellen, d. h. durch eine Linie, die abwechselnd aus kleinen Strichen und dazwischenliegenden Punkten besteht, wie die Geraden M und N in Fig. 3. bis. Man darf jedoch diese Art von Linien nicht allzuhäufig anwenden, und muß darüber den guten Geschmack und gutgewählte Muster zu Rathe ziehen; besonders dürfen solche gemischte Linien nicht für solche Geraden angewendet werden, welche einfach die beiden Projectionen eines und desselben Punktes verbinden.

§. 16.

Endlich bleibt noch zu erläutern übrig, welche unter den Hauptlinien einer jeden Aufgabe man für sichtbare, mit vollem Strich zu bezeichnende und welche man für unsichtbare, blos durch Punkte anzudeutende, zu nehmen habe. Vollständige Regeln lassen sich erst dann geben, wenn von krummen Flächen und berührenden Ebenen die Rede gewesen sein wird; da aber in den ersten hienächst folgenden Aufgaben nur Gerade und Ebenen vorkommen, so mögen einstweilen folgende Annahmen genügen. Es wird immer angenommen, das Auge, welches die Horizontalprojection eines Gegenstandes betrachtet, befinde sich über der Horizontalebene in unendlicher Entfernung und zwar in einer Vertikalen, welche durch irgend einen Punkt des Objekts geht, und ihrer Lage nach sich vor der Vertikalebene befindet; diese Annahme, welche, wie man später sehen wird, die Zeichnung des sichtbaren Umrisses krummer Flächen sehr vereinfacht, ergab sich aus der Art, wie man Punkte des Raumes auf eine Ebene projicirt. Die Gesichtslinien nämlich, welche man von dem Auge des Beobachters nach allen Punkten eines Körpers zieht, nähern sich immer mehr und mehr der senkrechten Lage, je weiter der Beobachter sich über die Horizontalebene erhebt, indem er stets in derselben Vertikale bleibt; so daß, wenn der Augpunkt in unendlicher Entfernung genommen wird, alle Gesichtslinien parallel werden und mit denjenigen Geraden zusammenfallen, welche zur Projicirung der Punkte eines Körpers dienen. Daraus folgt, daß die Horizontalprojection eines Gegenstandes nichts anderes ist, als eine Ansicht desselben aus unendlicher vertikaler Entfernung. Somit wäre also die obige Annahme gerechtfertigt.

Aus ähnlichen Gründen ist jede Vertikalprojection irgend eines Gegenstandes nichts anderes als die Ansicht desselben aus einer unendlichen Entfernung und zwar in einer Richtung, welche senkrecht auf der Vertikalebene ist, und sich vor letzterer und über der Horizontalebene befindet.

Jede Hauptlinie daher, oder jeder Theil einer solchen, welcher sich unter der Horizontalebene oder hinter der Vertikalebene befindet, muß als unsichtbar angenommen und daher punktirt werden. Kommt ferner in der Aufgabe irgend eine wirklich vorhandene Ebene vor, und es liegt ein Theil irgend einer Hauptlinie hinter oder unter dieser Ebene, so muß dieser Theil ebenfalls punktirt werden. Diese Regeln gelten jedoch nur für die Hauptlinien und dürfen unter keinerlei Umständen auf die Hilfslinien bezogen werden, aus dem in (§. 15, 2) angeführten Grunde. Eine Anwendung derselben wird man schon in Fig. 3. erkennen, und es wird in der Folge bei Auflösung der meisten Aufgaben darauf hingewiesen werden.

Zweites Kapitel.

Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§. 17.

Fig. 4. **Aufgabe.** Die Projectionen zweier Punkte im Raume sind gegeben. Man soll die Gerade construiren, welche diese beiden Punkte verbindet: auch soll man die wahre Entfernung derselben finden.*)

Auflösung. Es seien A und A′ die Projectionen des einen und M und M′ die Projectionen des andern Punktes. Nun muß nach den im §. 4 gegebenen Erklärungen die Horizontalprojection der gesuchten Geraden durch die Punkte A und M, und die Vertikalprojection durch A′ und M′ gehen; mithin sind AMB und A′M′B′ die Projectionen der gesuchten Geraden, und diese ist also ihrer Lage nach vollkommen bestimmt (§. 6). Auch können ihre Spuren oder Grundschnitte nach (§. 13) gefunden werden; sie sind (B, B′) und (C, C′). Was nun die Entfernung der beiden gegebenen Punkte betrifft, so wird solche im Raume durch denjenigen Theil der Geraden gemessen, welcher durch AM und A′M′ projicirt wird. Es ist aber leicht einzusehen, daß eine begränzte Gerade immer länger ist, als ihre Projection auf einer Ebene, den Fall ausgenommen, da die Gerade mit der Projectionsebene parallel ist; denn in diesem Falle ist die Gerade im Raume eben so groß, wie ihre Projection.

Man denke sich daher die Linie (AM, A′M′) so um diejenige projicirende Vertikale gedreht, die ihren Fußpunkt in A hat, daß sie gegen letztere eine unverändert gleiche Neigung behält, so wird, während der eine Endpunkt (A, A′) unbeweglich bleibt, der andere (M, M′) in stets gleicher Höhe über der horizontalen Projectionsebene einen Kreisbogen um seine Umdrehungsaxe beschreiben. Wird die Umdrehung so lange fortgesetzt, bis die bewegliche Gerade mit der vertikalen Projectionsebene parallel geworden, so wird nun auch ihre Horizontalprojection AM mit der Axe parallel sein und sich in der Lage AP befinden. Die Horizontalprojection des Endpunktes (M, M′) wird also P sein, seine Vertikalprojection aber muß in irgend einem Punkte der, auf der Axe XY senkrechten, PIP′ liegen (§. 10). Da nun der Punkt (MM′) bei seiner Umdrehung stets die gleiche Höhe über der Horizontalebene behalten hat, wie der Punkt M′, so muß seine Vertikalprojection auch in der Horizontalen HM′P′ liegen. Sie muß also, wenn (AM, A′M′) parallel mit der vertikalen Projectionsebene geworden ist, in PIP, und HM′P′ zugleich, mithin in dem Durchschnitt P′ liegen. Und da, während der Umdrehung, der Punkt A, A′ unverändert geblieben ist, so wird mithin A′P′ die Vertikalprojection der Linie AM, A′M′) für ihre neue Lage ein. Nach der oben gemachten Bemerkung aber ist auch A′P′ zugleich die wahre Länge die Linie (AM, A′M′).

Hieraus ergibt sich nun für die Auflösung der Aufgabe folgende Regel, die man wohl zu behalten hat:

---

*) Ehe man eine Figur zeichnet, ist es gut, folgende Vorrichtung zu treffen. Man zieht mit dem Bleistift eine Gerade von unbestimmter Größe durch die Mitte des Zeichnenblattes und nahezu parallel mit seiner Länge. Hierauf errichtet man eine zweite Gerade senkrecht auf die erstgezogene, indem man sich der geometrischen Methode der Kreisbögen bedient; denn der Winkelhaken gewährt für eine Senkrechte von etwas beträchtlicher Länge nicht genug Sicherheit. Wohl aber kann man sich desselben bedienen, um Parallelen mit einer vorgezeichneten Richtung zu ziehen, indem man zuerst eine seiner Katheten an diese Richtung anlegt und ihn hierauf mit der andern Kathete an der Schärfe eines unbeweglichen Lineals hingleiten läßt. Mittelst dieses Verfahrens nun zieht man in jeder Figur die Axe und alle diejenigen Geraden, welche ihr parallel sind oder senkrecht auf ihr stehen, indem man sich genau nach den senkrecht auf einander stehenden Geraden richtet, welche man gleich anfangs gezeichnet hat. Hiebei hüte man sich wohl, die Axe, so wichtig sie auch ist, mit einem stärkern Striche zu zeichnen, als die Hauptlinien; denn es entsteht oft hieraus viele Ungenauigkeit in der Lage derjenigen Punkte, in welchen sie von den andern Linien der Figur geschnitten wird.

Um die Entfernung zweier durch ihre Projectionen (A, A′) und (M, M′) gegebenen Punkte zu finden, construire man ein rechtwinkliges Dreieck A′HP′, dessen eine Kathete A′H dem Unterschiede A′H der beiden Höhen A′R und M′K jener Punkte über der Horizontalebene — und dessen andere Kathete HP′ der zwischen den beiden Horizontalprojectionen enthaltenen Geraden AM gleich ist.*) Die Hypotenuse A′P′ dieses Dreiecks wird die gesuchte Entfernung sein.

§. 18.

Man hätte diese Entfernung auch so finden können, indem man auf der Horizontalebene ein rechtwinkliges Dreieck construirt hätte, dessen eine Kathete dem Unterschied der Entfernungen AR und MK beider gegebenen Punkte von der Vertikalebene — und dessen andere Kathete der zwischen den Vertikalprojectionen A′ und M′ liegenden Geraden A′M′ gleich gewesen wäre; die Hypotenuse dieses Dreiecks wäre wieder der gesuchten Entfernung und also auch der A′P′ gleich gewesen.

Um den Grund dieser Construction, deren Ausführung dem Leser überlassen bleibt, einzusehen, darf man sich nur vorstellen, die gegebene Gerade drehe sich um diejenige Horizontale, deren Vertikalprojection A′ ist, so lange und ohne ihre Neigung gegen dieselbe zu ändern, herum, bis sie mit der Horizontalebene parallel geworden ist.

§. 19.

Man hätte auch, um die gesuchte Entfernung zu finden, die Gerade (AM, A′M′) auf die Horizontalebene aufklappen können, indem man das unveränderliche Trapez, das von der gegebenen Geraden und von den Vertikalen, welche ihre Endpunkte in A und M projiciren, gebildet wird, um AM wie um eine Axe gedreht hätte. Bei dieser Umdrehung wären die beiden Vertikalen senkrecht auf AM geblieben und wären also auf der Horizontalebene in die Lagen $AA'' = RA'$ und $MM'' = KM'$ gekommen, so daß man die Gerade A″M″ als die wahre Entfernung der Punkte (A, A′) und (M, M′) erhalten hätte.

Diese Constructionsweise läßt zugleich eine Probe zu, welche man nie bei graphischen Operationen versäumen sollte. Verlängert man nämlich die Linie A″M″, so muß sie den Punkt B treffen, welcher die horizontale Spur der gegebenen Geraden ist, und der bei der Umdrehung dieser letzteren unbeweglich bleiben mußte, weil er in der Umdrehungsaxe selbst liegt.

§. 20.

Umgekehrt, wenn eine unbegränzte Gerade (AB, A′B′) und einer ihrer Punkte (A, A′) gegeben ist, Fig.
und man will auf dieser Linie einen andern Punkt (M, M′) finden, der von dem ersten eine gegebene Entfernung δ habe, so darf man nur, wie im vorigen Paragraphen, die gegebene Gerade auf die Horizontalebene aufklappen, indem man in A die Senkrechte $AA'' = RA'$ errichtet, und aus A″ nach der horizontalen Spur B der gegebenen Geraden die Linie A″B zieht. Auf dieser letztern macht man alsdann $A''M'' = \delta$ und fällt aus M″ auf AB die Senkrechte M″M, so wird, wenn man sich die aufgeklappte Gerade A″B in ihre ursprüngliche Lage zurückgeführt denkt, der Punkt M die Horizontalprojection von M″ sein. Aus dieser Projection M findet man sodann nach §. 10 die Vertikalprojection M′, so daß nun der gesuchte Punkt vollständig bestimmt ist.

*) Denn es ist $HP' = AP = AM$. Anm. d. Uebers.

§. 21.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt (D, D′) soll eine Gerade gezogen werden, einer gegebenen Geraden (AB, A′B′) parallel sei.

Auflösung. Wenn zwei Gerade im Raume parallel sind, so sind es auch ihre projicirenden Ebe und folglich sind auch die Durchschnitte dieser letztern mit der Projectionsebene, d. h. die Projectionen der raden parallel.

Umgekehrt, wenn die Horizontalprojectionen zweier Geraden sowohl, als auch ihre Vertikalprojectionen rallel sind, so sind die vier projicirenden Ebenen zu zwei und zwei parallel; daraus aber folgt, daß ihre wec seitigen Durchschnitte, nämlich die Geraden im Raume,*) selbst parallel sind. Zieht man daher durch den P D eine Parallele DE mit AB, und durch den Punkt D′ eine Parallele D′E′ mit A′B′, so werden DE D′E′ die Projectionen der gesuchten Geraden sein. Diese ist also vollkommen bestimmt, so wie auch ihre Sp in F und E′, welche nach §. 13 construirt werden.

§. 22.

ig. 6. **Aufgabe.** Eine Ebene construiren, welche durch 3 gegebene Punkte (A, A′), (B, I (C, C′) geht.

Auflösung. Um die Lage einer Ebene graphisch zu bestimmen, darf man nur ihre beiden Grui schnitte oder Spuren, d. h. ihre Durchschnitte mit den Projectionsebenen angeben. Diese beiden Spuren mü die Axe immer in einem und ebendemselben Punkte schneiden,**) aber der Winkel, den sie auf den aufgeklapp Projectionsebenen einschließen, wird demjenigen nicht gleich sein, welchen sie im Raume bilden.

*) Es entstehen im Ganzen vier Durchschnitte, welche alle einander parallel sind; unter diesen sind aber auch die durch ihre P jectionen gegebenen Geraden. Anm. d. Uebers.

**) Vorausgesetzt nämlich, daß sie nicht mit der Axe parallel sind. — Wenn überhaupt zwei Ebenen, die sich schneiden, mi von einer dritten Ebene geschnitten werden, so können hinsichtlich der Durchschnittslinien drei Fälle stattfinden, nämlich:

1) die Durchschnittslinien können in eine einzige Linie zusammenfallen;

2) sie können in einem Punkte zusammentreffen, oder

3) mit einander parallel laufen.

Es seien, um dieses zu beweisen, A, und B zwei sich schneidende Ebenen, welche wieder von einer dritten C gesch werden; ab bezeichne den Durchschnitt von A und B, ac den Durchschnitt von A und C, und bc den Durchschnitt von B un Fallen nun die beiden Durchschnitte ab und ac in eine einzige Linie zusammen, so ist letztere erstlich den beiden Ebenen A un hernach auch den beiden Ebenen A und C, und mithin auch den beiden Ebenen B und C gemeinschaftlich. Die Durchschn linie bc fällt also auch mit den beiden erstern zusammen; woraus denn die Wahrheit des ersten behaupteten Falles ei Schneiden sich hingegen die beiden Durchschnittslinien ab und ac in einem Punkte a, so liegt dieser Punkt für's Erste in Linie ab, also in den beiden Ebenen A und B; für's Zweite liegt er auch in der Linie ac, also in den beiden Ebenen A un Der Punkt a liegt also in den drei Ebenen A, B und C, und ist daher auch einer von den Punkten, welche die Eben und C gemeinschaftlich haben und welche alle in der Durchschnittslinie bc liegen. Diese dritte Durchschnittslinie geht also durch den Punkt a, in welchem die beiden ersten ab und ac sich schneiden; womit der zweite Fall erwiesen ist.

Laufen endlich zwei Durchschnittslinien ab und ac miteinander parallel, so kann die dritte bc weder mit ab noch mit zusammentreffen, weil sonst, nach Nr. 2, alle drei Durchschnittslinien zusammentreffen müßten. Da nun bc mit ab und beziehlich in einerlei Ebene liegt, so sind alle drei Durchschnittslinien mit einander parallel. Somit ist auch der 3. Fall er

Schneidet also eine Ebene die beiden Projectionsebenen, so können in Beziehung auf die Axe und die beiden Spure gende Fälle stattfinden:

A) Fällt eine der Spuren mit der Axe zusammen, so fällt auch die andere mit ihr zusammen (Nr. 1.) und die geht also durch die Axe, und ist somit ihrer Lage nach noch nicht völlig bestimmt.

B) Schneidet eine von den Spuren die Axe, so schneidet sie auch die andere und zwar in demselben Punkte (Nr. 2.) die Lage der Ebene ist in diesem Falle vollkommen bestimmt.

C) Ist eine von den Spuren mit der Axe parallel, so ist es auch die andere (Nr. 3.), und die Lage der Ebene ist der völlig bestimmt. Anm. d. Uebers.

Ferner ist klar, daß, wenn eine Gerade in einer Ebene liegt, auch die Spuren dieser Geraden irgendwo den Spuren der Ebene liegen müssen. Dieses vorausgesetzt, verbinde man die gegebenen Punkte, je zwei und zwei durch die Geraden (AB, A′B′), (BC, B′C′), (AC, A′C′), welche, da von jeder zwei Punkte in der Ebene liegen, ganz in letzterer liegen müssen. Hierauf construire man nach §. 13 die vertikalen Spuren E′, F′ und G′ dieser Geraden. Da nun diese 3 Punkte, wie oben bemerkt wurde, zugleich dem Durchschnitte der gesuchten Ebene mit der Vertikalebene angehören, so müssen sie nothwendig in einer geraden Linie liegen, und sind mehr als hinlänglich, um die vertikale Spur E′F′G′ der gesuchten Ebene zu bestimmen. Eben so erhält man die horizontale Spur DHK dieser Ebene, indem man die horizontalen Spuren D, H und K der drei Hülfslinien construirt. Die beiden so erhaltenen Linien E′G′ und DH müssen die Axe XY in einem und ebendemselben Punkte Q treffen, woraus also ersehen werden kann, ob die Construction richtig ist oder nicht.

Soll eine Ebene durch eine gegebene Gerade und einen außerhalb dieser Geraden liegenden Punkt gelegt werden, so verbinde man diesen Punkt mit irgend einem Punkte der Geraden, oder man ziehe durch den gegebenen Punkt eine Parallele mit der gegebenen Geraden, so kennt man zwei in der gesuchten Ebene liegenden Gerade, deren Spuren hinreichen, um die Spuren der Ebenen zu bestimmen.

§. 23.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt (A, A′) soll eine Ebene gelegt werden, parallel mit einer andern Ebene, deren horizontale Spur ST und die vertikale TV ist. Fig. 7.

Auflösung. Es ist klar, daß zwei parallele Ebenen auch beziehlich parallele Spuren haben müssen; deßhalb braucht man nur von jeder Spur der gesuchten Ebene einen Punkt zu finden, um die Spur selbst daraus bestimmen zu können.

Man denke sich also durch den gegebenen Punkt (A, A′) eine Horizontale gezogen, welche zugleich in der gesuchten Ebene liege. Dieses ist immer möglich, indem man nur durch den gegebenen Punkt eine Parallele mit der horizontalen Spur dieser Ebene oder mit ST, (weil ST dieser Spur parallel ist), ziehen darf. Zieht man daher AB mit ST und A′B′ mit der Axe XY parallel, so werden AB und A′B′ die Projectionen der Horizontalen sein, die in der gesuchten Ebene durch den Punkt (A, A′) geht.

Sucht man endlich die vertikale Spur dieser Horizontalen, nämlich den Punkt B′, so wird dieser Punkt nothwendig in der vertikalen Spur der gesuchten Ebene liegen. Man darf daher nur noch durch B′ mit V′T eine Parallele B′Q ziehen, so wird letztere die vertikale Spur der gesuchten Ebene sein. Die horizontale Spur, welche durch den Punkt Q gehen muß, ist die mit TS gezogene Parallele PQ. Man kann nun zur Probe einen Punkt der horizontalen Spur unmittelbar finden. Denkt man sich nämlich durch den Punkt (A, A′) der gesuchten Ebene eine Parallele mit der Vertikalebene gezogen, so werden AC, welche mit der Axe XY parallel ist, und A′C′, welche mit V′T parallel ist, die Projectionen dieser Parallelen sein. Sucht man nun ihre horizontale Spur C, so muß dieser Punkt nothwendig in die schon construirte Gerade PQ fallen, wenn anders bei der Construction von PQ nicht gefehlt worden ist.

§. 24.

Man bemerke wohl, daß in der Fig. 7. die beiden Ebenen STV′ und PQR′ nicht als wirklich vorhanden betrachtet werden; denn in diesem Falle müßte die erstere Ebene die letztere unsichtbar machen, und die Spuren dieser letzteren müßten durchaus punktirt sein. Dadurch würde die Anzahl der runden Punkte sehr vermehrt werden, und man hätte auch nicht bemerklich machen können, welche Theile der Spuren im vordern oder hintern und welche im untern oder obern Theile der Projectionsebenen liegen. Deßhalb nun wurde hier angenommen, es handle sich blos darum, die Spuren einer Ebene zu finden, die parallel sei, mit einer andern Ebene, deren

Spuren ST und TV′ sind, ohne daß man nöthig hätte, eine dieser Ebenen wirklich zu construiren. Diese Beschränkung, welche dazu dienen soll, den Zeichnungen mehr Klarheit zu geben, wurde auch bei den Figuren 8, 9 und 16 angewendet.

§. 25.

Die in den §§. 22 und 23 angestellten Betrachtungen dienen auch zur Auflösung folgender

Fig. 6. **Aufgabe.** Es ist die Horizontalprojection AB einer Geraden gegeben, von welcher man weiß, daß sie in der durch ihre Spuren gegebenen Ebene PQR′ liegt. Man soll die andere Projection der Geraden finden.

Auflösung. Die gesuchte Gerade muß die Vertikalebene in einem Punkte schneiden, dessen Horizontalprojection E ist (§. 13); und da überdieß jener Schnitt auch in dem vertikalen Grundschnitt QR′ der gegebenen Ebene liegen soll (§. 22), so muß er nothwendig in E′ fallen, und E′ wird also ein Punkt der gesuchten Projection sein.

Ferner muß aus ähnlichen Gründen die gesuchte Gerade die Horizontalebene in D schneiden. Die Vertikalprojection des Punktes D aber ist D′ und mithin wird D′E′ die Vertikalprojection der gesuchten Geraden sein. Es ist einleuchtend, daß wenn statt DE die Projection D′E′ gegeben gewesen wäre als Vertikalprojection einer in der Ebene PQR′ liegenden Linie, man eben so leicht die Horizontalprojection DE hätte finden können.

Wenn die gegebene Horizontalprojection AB, Fig. 7., parallel wäre mit der Spur PQ der gegebenen Ebene, wie es in Fig. 7. der Fall ist, so erhielte man sogleich, wie oben, B′ als die vertikale Spur der gesuchten Linie; und da ferner eine horizontale Spur eben dieser Linie gar nicht existiren kann, weil AB der PQ niemals begegnet, so läßt sich daraus der Schluß ziehen, daß die gesuchte Linie der Horizontalebene parallel ist, und daß also ihre Vertikalprojection, die mit der Axe XY parallele Linie A′B′ sein müsse.

Eben so erhellet, daß wenn die gegebene Horizontalprojection AC mit der Axe parallel ist, alsdann die Linie im Raume mit der Vertikalebene parallel sein müsse, und daß ihre Projection auf letzterer Ebene die mit der Spur QR′ parallele Linie C′A′ sei.

§. 26.

Noch folgt hier eine ähnliche

Fig. 6. **Aufgabe.** Man kennt die Horizontalprojection A eines Punktes, von dem man weiß, daß er in einer gegebenen Ebene PQR′ liegt; es soll die andere Projection dieses Punktes gefunden werden.

Auflösung. Man ziehe durch A eine beliebige Gerade DAE und betrachte diese als die Horizontalprojection einer in der Ebene PQR′ liegenden Linie; hierauf construire man, wie oben, die Vertikalprojection D′E′ dieser Geraden und ziehe durch A eine auf der Axe XY senkrechte Linie, so wird der Punkt A′, wo diese Senkrechte die Linie D′E′ trifft, die gesuchte Vertikalprojection des Punktes sein.

Eben so hätte man auch aus der gegebenen Vertikalprojection A′ die Horizontalprojection A finden können.

Unter den verschiedenen Richtungen, welche man der Hilfslinie DAE geben kann, ist die mit der Spur PQ parallele die bequemste, wie die Linie AB in Fig. 7.

§. 27.

Fig. 8. **Aufgabe.** Den Durchschnitt zweier Ebenen zu finden, deren eine die Linien PQ und die andere die Linien ST und TV′ zu Spuren hat.

Auflösung. Wenn man die beiden horizontalen Spuren verlängert, bis sie sich in B [illegible] dieser Punkt, da er beiden Ebenen gemeinschaftlich ist, zugleich ein Punkt ihres Durchschnittes

n der Horizontalebene liegt, so ist er die horizontale Spur dieses Durchschnittes; eben so ist der Punkt A', wo ich die vertikalen Spuren der gegebenen Ebenen schneiden, zugleich die vertikale Spur eben jener Durchschnittslinie. Kennt man aber die beiden Spuren, so kann man daraus unmittelbar die Projectionen AB und A'B' es gesuchten Durchschnittes finden nach §. 14.

§. 28.

Wenn zwei der gegebenen Spuren parallel sind, wie es bei den Ebenen R'Qp und V'TS der Fall ist, o fällt ihr Durchschnittspunkt B unendlich weit hinaus und der Durchschnitt der beiden Ebenen muß also eine horizontale sein, deren Vertikalprojection die mit der Axe Parallele A'b', und deren Horizontalprojection die mit TS Parallele Ab ist. Dieses konnte leicht vorausgesehen werden, weil die gegebenen Ebenen, welche durch die wei Parallelen Qp und TS gehen, sich nur in einer mit diesen letztern parallelen Geraden schneiden können. Vergl. Nr. 3. der Anmerkung zu §. 22.)

§. 29.

Wenn die horizontalen und vertikalen Spuren beider Ebenen beziehlich parallel sind, so sind die Ebenen elbst parallel und es gibt keinen Durchschnitt derselben, wenn die Spuren nicht auch zugleich der Axe parallel ind; ist aber dieses Letztere der Fall, so können zwar die beiden Ebenen parallel sein, sie können sich aber uch schneiden, wie es in Fig. 9. der Fall ist, wo die Spuren PQ und P'Q' der einen und TS, T'S' der ndern Ebene unter sich und zugleich der Axe parallel sind. Fig. 9.

Schneiden sie sich, so geschieht es in einer mit der Axe parallelen Linie (s. Nr. 3. der Anmerkung zu §. 22), deren Projectionen aber nicht nach der vorhin gezeigten Methode gefunden werden können.

Man lege in diesem Falle eine schneidende Hilfsebene $\alpha\beta\gamma$ beliebig durch die gegebenen Ebenen. Diese wird die Ebene (PQ, P'Q') in der Geraden (CD, C'D') und die Ebene (TS, T'S') in der Geraden (EF, E'F') schneiden, wie sich aus dem §. 27 gelehrten Verfahren ergibt. Der Punkt (M, M') nun, in welchem diese beiden Geraden sich schneiden, muß in den beiden Ebenen (PQ, P'Q') und (TS, T'S') zugleich liegen und daher ein Punkt ihres Durchschnittes sein. Zieht man also durch den Punkt (M, M') die mit der Axe parallele (AMB, A'M'B'), so wird diese der gesuchte Durchschnitt sein.

Man kann auch eine senkrecht durch XY gelegte Profilebene anwenden; diese schneidet die beiden Projectionsebenen in den Geraden XV und XZ. Denkt man sich nun die Profilebene um VX gedreht und auf die Horizontalebene aufgeklappt, so wird XZ in die Lage XZ'' und die Punkte P' und T', in welchen die Profilebene die Spuren der gegebenen Ebenen trifft, werden in die Lage P'' und T'' kommen; es werden also PP'' und TT'' die Spuren sein, welche die gegebenen Ebenen mit der augeklappten Profilebene machen. Da nun diese Spuren sich in A'' schneiden, so ist dieses ein Punkt des gesuchten Durchschnittes, dessen Horizontalprojection offenbar die mit XY parallel gezogene Linie AB sein wird. Denkt man sich nun die Profilebene wieder aufgerichtet, so wird der Punkt A'' sich vertikal in A' projiciren, und die mit XY parallel gezogene Gerade A'B' wird die Vertikalprojection des gesuchten Durchschnittes der gegebenen Ebenen sein.

Wenn endlich die vier Spuren dieser Ebenen, ohne parallel zu sein, durch einen und ebendenselben Punkt der Axe gingen, so müßte man ebenfalls wieder zu einer der so eben angewendeten Hülfsebenen seine Zuflucht nehmen; es bleibt aber dem Leser überlassen, die zu diesem besondern Fall gehörige Figur zu construiren.

Aufgabe

r Geraden (AB, A'B') mit einer

AM und A′M′ als die Projectionen der kürzesten Linie zwischen (A, A′) und PQR′; die wirkliche Länge dieser Linie aber erhält man, indem man (nach §. 17) die Horizontale HM′M″ gleich AM macht und die Gerade A′M″ zieht, welche die wirkliche Länge der kürzesten Linie sein wird zwischen dem gegebenen Punkt und der Ebene.

§. 36.

Fig. 13. Aufgabe. Man soll die kürzeste Entfernung zwischen einem Punrt (C, C′) und einer gegebenen Geraden (AB, A′B′) finden.

Auflösung. Man lege durch den gegebenen Punkt (C, C′) eine auf der gegebenen Geraden senkrechte Ebene. Die Grundschnitte dieser Ebene müssen auf den Projectionen AB und A′B′ senkrecht sein (§. 33); um daher einen ihrer Punkte zu bestimmen, denke man sich in jener Ebene eine Horizontale, welche durch (C, C′) gehe. Diese Horizontale muß natürlich mit der gesuchten horizontalen Spur parallel sein; daher sind ihre Projectionen die Linien CD und C′D′, von welchen die erste auf AB senkrecht, die andere aber mit XY parallel ist. Der vertikale Grundschnitt dieser Geraden ist aber (D, D′). Zieht man also durch D′ die D′Q senkrecht auf A′B′ und durch Q die QP senkrecht auf AB, so sind diese Linien die Spuren der gesuchten Ebene, die senkrecht auf (AB, A′B′) stehen soll. Nun construire man ferner, nach §. 30, den Punkt (M, M′), wo diese Ebene die gegebene Gerade schneidet, und verbinde ihn mit (C, C′) durch eine gerade Linie (CM, C′M′), so wird solche in der Ebene D′QP liegen und, wie diese, senkrecht auf (AB, A′B′) stehen. Sie mißt also die gedachte kürzeste Entfernung, deren wirkliche Größe C′M″ aus den Projectionen CM und C′M″ nach der allgemeinen Regel des §. 17 gefunden wird.

In dieser Figur ist die Ebene D′QP weder gegeben, noch ist sie ein Resultat der ursprünglichen Aufgabe. Sie dient nur als Mittel, zu der gewünschten Auflösung zu gelangen, weshalb ihre Spuren auch nur als Hilfslinien bezeichnet werden mußten (§. 15). Die nämliche Bemerkung gilt in Bezug auf Fig. 14., deren Erklärung nun folgt.

§. 37.

Fig. 14. Andere Auflösung. Man lege eine Ebene durch den Punkt (C, C′) und durch die gegebene Gerade (AB, A′B′). Um die Spuren dieser Ebene zu finden, verbinde man (C, C′) mit (A, A′) und suche die vertikalen Spuren der beiden Geraden (AB, A′B′) und (AC, A′C′): so ergeben sich daraus die Spuren B′D′Q und QA der erwähnten Hilfsebenen (§. 13). Nun denke man sich diese Ebene um ihre horizontale Spur AQ gedreht, so wird auch die Gerade und der gegebene Punkt, welche beide in der Ebene liegen, mit umgedreht werden. Bei dieser Umdrehung wird der Punkt (B, B′), d. i. die vertikale Spur von (AB, A′B′), stets sich in der auf AQ senkrechten Ebene BF bewegen und immer in gleicher Entfernung von dem festen Punkte Q bleiben; beschreibt man daher aus Q mit dem Halbmesser QB′ einen Kreisbogen, welcher BF in B″ schneidet, so wird letzterer Punkt die Stelle bezeichnen, in welche der Punkt B′ fällt, wenn die Hilfsebene AQB′ ganz auf der Horizontalebene aufgeklappt ist. Und da A die horizontale Spur der Geraden (AB, A′B′) ist, so wird mithin AB″ die auf die Horizontalebene aufgeklappte Gerade (AB, A′B′) sein. Eben so ist QB″ die auf die Horizontalebene aufgeklappte Spur QB′. Zieht man ferner die Senkrechten DD″ und CC″ auf die Umdrehungsaxe AQ, so wird AD″ die Aufklappung der Linie (ACD, A′C′D′) und C″ die Aufklappung des Punktes (C, C′) sein. Nun kann man in der Horizontalebene, in welcher die gegebene Linie sowohl, als auch der gegebene Punkt aufgeklappt sind, ohne daß sie ihre gegenseitige Lage geändert hätten, aus C″ auf AB″ die Senkrechte C″M″ fällen, so wird diese die gesuchte kürzeste Entfernung in ihrer wahren Größe sein.

Gewöhnlich begnügt man sich mit diesem Resultat; will man aber auch die Lage der kürzesten Entfernung durch ihre Projectionen bestimmen, so darf man nur die aufgeklappte Hilfsebene wieder rückwärts um AQ

gen und in ihre vorige Lage zurückführen. Da nun die horizontale Projectioon des Punktes M″, in welchem ms (C, C′) gezogene kürzeste Linie die (AB, A′B′) trifft, sowohl in der Horizontalprojection AB, als auch er Spur M″M der auf AQ senkrechten Vertikalebene, innerhalb welcher M″ sich bewegt, liegen muß, so wird n den Durchschnitt der Linie AB mit M″M, d. h. in M fallen.

Die vertikale Projection M′ findet man nach §. 10; es werden also CM und C′M′ die Projectionen der sten Linie zwischen (C, C′) und (AB, A′B′) sein.

§. 38.

Letztere Methode kann auch mit Nutzen angewendet werden, wenn man auf einer Geraden (AB, A′B′) en Punkt finden will, der von dem Punkte (C, C′) eine gegebene Entfernug δ habe.

Nachdem man nämlich wie vorhin die Gerade und den gegebenen Punkt in AB″ und C″ wieder aufgept hat, beschreibe man aus C″ mit dem Halbmesser C″N″ = δ einen Kreisbogen, der die AB″ in dem kt N″ schneide, so wird solcher der gesuchte, aber auf die Horizontalebene aufgeklappte, Punkt sein. Dreht n nun die Hilfsebene wieder um AQ und bringt sie in ihre vorige Lage zurück, so wird man ganz wie im gen Paragraphen für den Punkt N″ die Projectionen N und N′ finden. Man sieht leicht ein, daß diese Aufe überhaupt zwei Auflösungen zuläßt, weil der mit dem Halbmesser δ beschriebene Kreisbogen die Gerade ″ in zweien Punkten N″ und n″ schneidet.

§. 39.

Aufgabe. Man soll den Winkel finden, welchen eine gegebene Ebene PQR mit den beiden Fig. 15.
ojectionsebenen macht.

Auflösung. Man findet den Winkel, welchen zwei sich schneidende Ebenen bilden, wenn man sie durch dritte Ebene schneidet, welche auf dem Durchschnitt der beiden ersten senkrecht steht. Die beiden Schnitte, che diese dritte Ebene mit den gegebenen Ebenen macht, bilden alsdann den verlangten Neigungswinkel.

Man schneide daher die Ebene PQR′ und die Horizontalebene durch eine dritte Ebene, welche senkrecht dem Grundschnitt PQ steht und daher eine Vertikalebene ist. Ihre Spuren sind AD und DD′, von denen erste senkrecht auf PQ und die andere senkrecht auf XY steht. Diese Vertikalebene nun schneidet die gegebene ne PQR′ in einer Geraden, welche, im Raume, die beiden Punkte A und D′ mit einander verbindet und leich die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten AD und DD′ sind. Dreht man daher es Dreieck um DD′, um es auf die Vertikalebene aufzuklappen, so erhält man auf letzterer das Dreieck D′A″D, welchem der Winkel D′A″D der Neigungswinkel sein wird, den die gegebene Ebene mit der Horizontalne bildet.

Um nun auch den Neigungswinkel zu finden, welchen PQR′ mit der Vertikalebene bildet, schneide man e beiden Ebenen durch eine dritte CDB′, welche auf dem vertikalen Grundschnitt QR′ senkrecht steht. Dadurch ält man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten CD und DB′ sind, und welches, um CD auf die Vertiebene aufgeklappt, das Dreieck DB″C gibt, in welchem DB″C der gesuchte Neigungswinkel ist. *)

*) In gewissen praktischen Fällen bestimmt man oft eine Ebene durch ihre horizontale Spur PQ und durch ihren Neigungswinkel α gegen die Horizontalebene. Aus diesen gegebenen Stücken aber ist es leicht, den vertikalen Grundschnitt zu finden mittels der Profilebene AD, welche man senkrecht durch PQ legt. Diese Ebene enthält den Winkel α: klappt man daher AD in A″D auf und macht den Winkel DA″D′ = α, so wird die verlängerte Seite A″D′ die in D errichtete Senkrechte DD′ in dem Punkte D′ schneiden, durch welchen man sodann den Grundschnitt QD′R ziehen kann. Manchmal hat man der Vertikalebene gar nicht nöthig, sondern man klappt die Profilebene um AD, indem man den Winkel DAδ = α macht, wodurch man eine hinreichend klare Vorstellung von der Lage der gesuchten Ebene erhält, so daß man alles Folgende, dessen man noch nöthig hat, daraus herleiten kann. Die Profilebene vertritt im Grunde die Stelle der Vertikalebene.

§. 40.

Fig. 15. **Aufgabe.** Durch einen gegebenen Punkt soll eine Ebene gelegt werden, welche mit der Horizontalebene den Winkel α und mit der Vertikalebene den Winkel β bilde.

Auflösung. Zuerst bemerke man, daß, in der vorigen Aufgabe, die beiden Ebenen D′DA und B′DC sich in einer auf der Ebene PQR′ senkrechten Geraden schneiden müssen, welche zugleich die kürzeste Entfernung mißt zwischen der Ebene PQR′ und dem Punkt D auf der Axe. Diese senkrechte Gerade wurde mit den beiden rechtwinkligen Dreiecken das einemal in DF und das anderemal in Df aufgeklappt, welche Linien senkrecht auf den Hypotenusen A″D′ und B″C stehen. Daraus aber folgt, daß, welche Lage auch die Ebene PQR′ habe, immer DF = Df sein müsse. Wenn daher von der Ebene PQR′ nichts bekannt wäre, als daß sie mit den beiden Projectionsebenen die Winkel α und β bilde, so würde man auf der Axe ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck D′DA″ construiren (indem man DA″ beliebig annähme), in welchem der Winkel A″ = α. Hierauf würde man mit der Senkrechten DF einen Kreisbogen beschreiben und eine Tangente B″fC an denselben ziehen, welche mit der Axe den Winkel B″ = β bildete; durch diese Tangente*) und ihren Durchschnitt mit der verlängerten Senkrechten D′D würde sodann ein Punkt C der Spur der Ebene PQR′ bestimmt. Aus diesem Punkt würde man alsdann eine Tangente CQ an den mit DA″ beschriebenen Kreisbogen ziehen, und hierauf die Punkte Q und D′ verbinden, so erhielte man die Spuren einer Ebene CQD′, welche mit den Projectionsebenen die Winkel α und β bildete.

Um nun aber die Aufgabe so zu lösen, wie sie ursprünglich gegeben war, dürfte man nur noch durch den gegebenen Punkt eine der CQD′ parallele Ebene legen (§. 23).

§. 41.

Fig. 16. **Aufgabe.** Es soll der Winkel construirt werden, den zwei gegebene Ebenen PQR′ und PSR′ mit einander bilden.

Auflösung. Man muß, wie schon oben gesagt worden, die beiden gegebenen Ebenen durch eine dritte Ebene schneiden, welche senkrecht auf dem Durchschnitt der beiden ersten steht. Dieser Durchschnitt aber, der durch die Geraden PR und P′R′ projicirt wird (§. 27), ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten PR und RR′ sind, und das, wenn man es auf die Horizontalebene aufklappt, PRR″ wird. Errichtet man nun in einem beliebigen Punkt A″ dieser Hypotenuse eine Senkrechte A″B und bringt das Dreieck, indem mag es um RP dreht, wieder in seine vorige vertikale Lage zurück, so muß offenbar die Linie A″B in diejenige Ebene zu liegen kommen, welche man durch A″ senkrecht auf den Durchschnitt der gegebenen Ebenen gelegt hat. Und da A″B die Horizontalebene in B schneidet, so wird die Gerade CBD, welche man aus B senkrecht auf die Projection PR errichtet, die horizontale Spur der schneidenden Ebene sein (§. 33). Diese Ebene nun schneidet die gegebenen Ebenen in zwei Geraden, welche von dem Punkt A″ (das Dreieck PRR″ in seiner vertikalen Lage gedacht) ausgehen und sich in C und D endigen. Sie bilden also ein Dreieck, dessen Grundlinie CD, und dessen Winkel an der Spitze A″ der gesuchte Winkel sein wird; man darf also nur noch dieses Dreieck construiren. Es ist aber die Höhe desselben genau A″B, weil diese Gerade in der vertikalen Ebene PRR′ liegt, welche senkrecht auf der Grundlinie CD ist; klappt man daher das Dreieck um CD auf die Horizontalebene, so wird die Spitze A″ in der auf CD senkrechten Vertikalebene bleiben und in den Punkt A fallen, den man erhält, wenn man

*) Da offenbar der Winkel CDf = B″ = β, so könnte man auch, statt dieser Tangente, ein rechtwinkliges Dreieck CDf auf DF irgendwohin construiren, in welchem der Winkel CDf = β, und hierauf dessen Hypotenuse auf die Verlängerung von D′D tragen, wodurch der Punkt C bestimmt würde.

A = BA″ macht. CAD wird also das aufgeklappte Dreieck sein, und der Winkel CAD ist der gesuchte Neigungswinkel der beiden Ebenen PQR′ und PSR′.

Man hätte den Durchschnitt der gegebenen Ebenen auch auf die Vertikalebene aufklappen können, wodurch m R′P″ für denselben erhalten hätte. Nun würde man aus einem beliebigen Punkt A′ eine Senkrechte A′B′ f R′P″ errichtet und das Dreieck RR′P″ um RR′ gedreht haben, um es wieder in seine vorige Lage zurückführen, wodurch alsdann B′ in B zu liegen gekommen wäre. Das weitere Verfahren wäre das nämliche gesen, wie oben.

§. 42.

Wenn die Spuren der gegebenen Ebenen auf einer der Projectionsebenen, z. B. auf der horizontalen, Fig. 17.
rallel sind, während sie sich auf der andern schneiden, so erleidet die vorhergehende Auflösungsart eine kleine nderung, wodurch aber die Auflösung selbst nur einfacher wird. Es ist nämlich bekannt, daß in diesem Falle r Durchschnitt der Ebenen parallel ist mit den Horizontal-Spuren (§. 28. Vergl. auch Nr. 3 der Anmerkung zu 22). Seine Projectionen sind also die Linien RV und R′V′.

Legt man daher eine Vertikalebene CRR′ senkrecht auf diesen Durchschnitt, so wird solche die gegebenen benen in zwei Geraden schneiden, welche mit CD ein Dreieck bilden, das R′ zur Spitze und die Vertikale R′R r Höhe hat. Klappt man nun dieses Dreieck um seine Grundlinie CD auf die Horizontalebene, so fällt die pitze R′ in R″, und der Winkel CR″D ist der gesuchte Neigungswinkel der gegebenen Ebenen.

Falls endlich die Spuren sowohl auf der einen, als auch auf der andern Projectionsebene mit der Axe rallel wären, wie in Fig. 9., so müßte man die gegebenen Ebenen durch die schon in §. 29 angewendete rofilebene ZXV schneiden, und solche alsdann um XV auf die Horizontalebene aufklappen, wie es in §. 29 schehen ist, um den Winkel PA″T als Neigungswinkel der gegebenen Ebenen zu erhalten.

§. 43.

Aufgabe. Man soll den Winkel zweier gegebenen Geraden (AB, A′B′) und (BC, b′c′) finden. Fig. 18.

Auflösung. Unter dem Winkel zweier Geraden, welche sich oft nicht schneiden, versteht man denjenigen inkel, welchen zwei gerade Linien mit einander bilden, die mit den erstern beziehlich parallel durch einen und nselben Punkt im Raume gezogen wurden. Zuerst also muß untersucht werden, ob die gegebenen Linien sich neiden oder nicht. Nun ist klar, daß, wenn sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, solcher in B horizontal und b′ vertikal projicirt sein müsse: aber wenn diese Punkte wirklich die Projectionen eines Punktes im Raume sein len, so muß die sie verbindende Gerade Bb′ senkrecht auf der Axe stehen (§. 10). Da nun dieses hier nicht r Fall ist, so schneiden sich auch die gegebenen Geraden nicht.

Man ziehe daher durch einen Punkt der Linie (AB, A′B′) eine Parallele mit der andern Linie (BC, b′c′), b um die Construction zu vereinfachen, wähle man den Punkt auf (AB, A′B′), welcher in B und B′ projit ist. Die Parallele durch diesen Punkt hat die schon gegebene Gerade BC zu ihrer Horizontalprojection und : mit b′c′ parallel gezogene Linie B′C′ zur Vertikalprojection. Man hat also jetzt nur noch den Winkel zu den, welchen die beiden Geraden (AB, A′B′) und (BC, B′C′) mit einander bilden.

Sucht man die horizontalen Spuren dieser Geraden, so erhält man die Linie AC als die Grundlinie es Dreiecks, dessen Spitze der Punkt (B, B′) ist, in welchem die gegebenen Geraden sich schneiden, und dessen inkel an der Spitze dem gesuchten Winkel gleich ist. Nun ist die Höhe dieses Dreiecks zugleich die Hypotenuse es rechtwinkligen Dreiecks, das zur einen Kathete die auf AC senkrechte BH, und zur andern die Vertikale hat, elche die Spitze in B projicirt. Diese Vertikale aber ist gleich B′K; nimmt man also KH″ = BH und zieht H″, so ist diese die Höhe des ersten Dreiecks. Klappt man nun dieses um seine Grundlinie AC auf die Ho-

rizontalebene auf, so wird die Spitze während der ganzen Umdrehung in der auf AC senkrechten Vertikalebene bleiben; man trage daher die Höhe B′H″ von H nach B″, so wird AB″C das aufgeklappte Dreieck sein, und der Winkel gleichen Namens ist der gesuchte Winkel der beiden Geraden (AB, A′B′) und (BC, B′C′).

§. 44.

Wenn eine dieser Geraden, z. B. die zweite, parallel ist mit der Horizontalebene, so findet das Dreieck, dessen man sich im vorigen Paragraphen bedient hat, nicht mehr statt; aber die horizontale Spur derjenigen Ebene, in welcher die gegebenen Geraden liegen, und welcher im allgemeinen Falle AC ist, wird nun parallel mit BC sein; klappt man daher, wie oben, die Ebene um diese Spur, so erhält man wieder den gesuchten Winkel.

Es ist unnöthig, von dem Falle zu reden, da die gegebenen Geraden beide mit einer der Projectionsebenen, z. B. mit der horizontalen, parallel sind; denn in diesem Falle ist der Winkel, welchen ihre Horizontalprojectionen bilden, genau dem gesuchten Winkel gleich.

Wäre endlich die Aufgabe gegeben, den von zwei sich schneidenden Geraden gebildeten Winkel zu halbiren, so müßte man diesen Winkel, um ihn in seiner wahren Größe zu erhalten, zuerst auf die Horizontalebene aufklappen und ihn in diesem Zustande halbiren; hernach müßte man den Winkel und seine Theilungslinie wieder in die vorige Lage zurückbewegen, wobei man zu bemerken hätte, daß der Punkt, in welchem die Theilungslinie den horizontalen Grundschnitt der durch die gegebenen Geraden gehenden Ebene trifft, während der ganzen Umdrehung unbeweglich bleibt. Es ist dem Anfänger zu rathen, zur Uebung diese verschiedenen Operationen vorzunehmen.

§. 45.

Fig. 19. **Aufgabe.** Man soll den Winkel finden, welchen eine Gerade (AB, A′B′) mit einer Ebene PQR′ bildet.

Auflösung. Der Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, wäre eine unbestimmte Größe, wenn man nicht übereingekommen wäre, denjenigen Winkel darunter zu verstehen, welchen diese Gerade mit ihrer rechtwinkligen Projection auf dieser Ebene bildet. Diese Annahme gründet sich darauf, daß eben dieser letztere Winkel der kleinste ist unter allen, welchen die Gerade mit den verschiedenen in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogenen Linien macht. Es folgt hieraus, daß, wenn man von einem Punkt der Geraden eine Senkrechte auf die Ebene fällt, der zwischen dieser Senkrechten und der Geraden enthaltene Winkel das Complement des gesuchten Winkels sein werde. Kennt man aber dieses Complement, so ist auch der gesuchte Winkel gefunden. Man ziehe also durch einen auf der gegebenen Geraden beliebig angenommenen Punkt (B, B′) eine Senkrechte (BC, B′C′) auf die Ebene PQR; hierauf construire man den durch die Geraden (AB, A′B′) und (BC, B′C′) gebildeten Winkel. Will man hiebei die Methode des §. 43 anwenden, so muß man das Loth BH auf AC fällen, KH″ = BH machen, und die Hypotenuse B′H″ von H nach B″ tragen; so erhält man AB″C für den Winkel der beiden Geraden. Nun construire man das Complement dieses Winkels, indem man z. B. B″D senkrecht auf CB″ zieht, so wird AB″D der Winkel sein, welchen die Gerade (AB, A′B′) mit der Ebene PQR bildet.

§. 46.

Man kann sich der nämlichen Methode bedienen, um die Winkel zu finden, die eine Gerade mit ihren Projectionen bildet; denn diese sind die Winkel, welche sie mit der Horizontal- und Vertikalebene macht. Nur ist die Construction in diesem Falle einfacher als im vorigen, wie man leicht einsehen wird. Uebrigens gelangt man schneller zu demselben Resultat, wenn man die Gerade auf eine der Projectionsebenen aufklappt, wie in §. 17, wo ABA″ der Neigungswinkel der Geraden (AB, A′B′) gegen die Projection AB, oder gegen die Horizontalebene ist.

§. 47.

Aufgabe. Man ſoll die kürzeſte Linie zwiſchen zweien nicht in einerlei Ebene liegenden Geraden, ſowohl ihrer Lage als auch ihrer Größe nach, conſtruiren. Fig. 20

Auflöſung. Es iſt bekannt, daß zwei Gerade im Raume, welche nicht in derſelben Ebene liegen, ſich nicht ſchneiden können, wenn ſie gleich nicht parallel ſind; man ſoll nun unter allen Linien, welche irgend zwei Punkte dieſer Geraden verbinden können, die kürzeſte ſuchen. Um aber die Operationen, welche die Auflöſung dieſes Problems nothwendig macht, in ihrer Folge beſſer zu überſehen, ſo ſollen ſie zuerſt an einer perſpectiviſch gezeichneten Figur, wo AB und CD die gegebenen Geraden vorſtellen, angedeutet werden.

Man ziehe zuerſt durch einen beliebigen Punkt der Linie AB die Gerade BE parallel mit CD und lege durch AB und BE die Ebene ABE, ſo wird ſolche parallel mit CD ſein: fällt man alſo aus einem Punkt der letztern eine Senkrechte DF auf die Ebene ABE, ſo kann die geſuchte Linie nicht kleiner als DF ſein. Damit man aber einſehe, daß es wirklich eine Gerade gibt zwiſchen den gegebenen Linien, welche gleich DF iſt, ſo ziehe man durch den Fußpunkt F dieſer ſenkrechten die Linie FG mit CD parallel; dieſe Linie muß der AB in irgend einem Punkt G begegnen, weil ſonſt AB parallel mit CD ſein würde, was gegen die Vorausſetzung iſt. Errichtet man nun in G auf die Ebene ABE die Senkrechte GH, ſo liegt dieſe offenbar in der Ebene CDFG, welche ſenkrecht auf ABE iſt, und begegnet der Geraden CD. Da aber die Senkrechte GH parallel und gleich DF iſt, ſo iſt ſie die kürzeſte Linie zwiſchen AB und CD und ſteht auf dieſen beiden ſenkrecht, weil ſie auch auf der Ebene ABE, welche beiden Geraden parallel iſt, ſenkrecht ſteht. Um die erſte dieſer Folgerungen a posteriori zu beſtätigen, verbinde man zwei Punkte m und n der gegebenen Linien durch die Gerade mn, ſo wird ſolche jedesmal außerhalb der Ebene CDFG zu liegen kommen, ſo oft n von G verſchieden iſt; die Linie mn iſt alſo in dieſem Falle ſchief in Bezug auf die Ebene ABE, und als ſolche länger als die Senkrechte mp, welche der GH gleich iſt. Fällt hingegen n mit G zuſammen, ſo iſt die Gerade mG ſchief in Bezug auf CD und folglich wieder länger als die Senkrechte GH, welche demnach die kürzeſte unter allen Linien iſt, die zwiſchen AB und CD möglich ſind.

§. 48.

Führt man nun die im vorigen Paragraphen nur angedeuteten Conſtructionen wirklich aus, ſo wird man (wie ſchon in §. 3 bemerkt wurde) den weſentlichen Unterſchied erkennen, der zwiſchen dem Verfahren der gewöhnlichen Geometrie und denjenigen Methoden ſtattfindet, durch welche die darſtellende Geometrie ihre vollkommen beſtimmten Reſultate erhält, wenn es ſich von der Auflöſung ſolcher Aufgaben handelt, die ſich auf drei räumliche Ausdehnungen beziehen.

Es ſeien alſo (AB, A′B′) und (CD, C′D′) die beiden gegebenen Geraden: daß ſie wirklich nicht in Einer Ebene liegen, geht daraus hervor, daß ſie nicht parallel ſind, und daß die Punkte, in welchen ihre Horizontal- und Vertikalprojectionen ſich ſchneiden, nicht in einer auf der Axe ſenkrechten Linie liegen (§. 43). Man ziehe nun durch einen auf der Geraden (AB, A′B′) beliebig angenommenen Punkt (B, B′) mit der Geraden (CD, C′D′) die Parallele (BE, B′E′) und conſtruire die Spuren AEQ und QB′ derjenigen Ebene, in welcher die Linien (AB, A′B′) und (BE, B′E′) liegen. Hierauf fälle man aus einem Punkt (D, D′) der zweiten Geraden eine Senkrechte (DF, D′F′) auf die Ebene AQB′ und ſuche nach §. 30 mittels der projicirenden Vertikalebene DRR′ den Punkt (F, F′), in welchem dieſe Senkrechte die Ebene AQB′ trifft. Alsdann ziehe man durch den Punkt (F, F′) mit der Linie (CD, C′D′) die Parallele (FG, F′G′), welche der Geraden (AB, A′B′) nothwendig begegnen muß (§. 47); weshalb denn auch die beiden Punkte G und G′ in einer auf der Axe ſenkrechten Linie liegen werden. Hierauf ziehe man aus dem Punkt (G, G′) parallel mit (DF, D′F′) die Linie (GH, G′H′), Fig. 21

und da dieſe letztere der Linie (CD, C′D′) begegnen ſoll, ſo werden auch die Punkte H und H′ in einer auf d Axe ſenkrechten Linie liegen. GH und G′H′ ſind alſo die Projectionen der geſuchten kürzeſten Linie; um m die wahre Größe dieſer Linie zu erhalten, mache man auf der horizontalen Linie, welche man durch G′ gezog hat (§. 17) das Stück KG″ = GH und ziehe die Gerade G″H′ ſo wird dieſe der wahren Länge der geſuchte Linie gleich ſein.

§. 49.

Die nämliche Aufgabe könnte auch dadurch gelöſ't werden, daß man den Durchſchnitt zweier auf AQ ſenkrechter Ebenen ſuchte, deren eine durch (AB, A′B′) und die andere durch (CD, C′D′) ginge. Die Eben könnten dadurch beſtimmt werden, daß man ſowohl aus einem Punkt der einen als auch der andern Gerad eine Senkrechte auf AQB′ fällte; die Ausführung dieſer Conſtruction mag jedoch dem Leſer überlaſſen bleiben.

§. 50.

Sind die gegebenen Geraden parallel unter ſich, ſo iſt ihre Entfernung überall dieſelbe und man darf d her nur, um dieſe zu erhalten, die kürzeſte Linie ſuchen zwiſchen der erſten Geraden und einem Punkt der zweiten; dieſer letztere Punkt könnte z. B. die horizontale Spur der zweiten Geraden ſein. Die Aufga kann alſo in dieſem Falle nach §§. 36 und 37 gelöſ't werden.

§. 51.

Die §§. 17—50 enthalten alle Elemente zur Auflöſung ſolcher Aufgaben, bei welchen man nur gera Linien mit Ebenen zu verbinden hat, und man wird im nächſten Kapitel nützliche Anwendungen derſelben finde Hier iſt blos noch zu bemerken, daß, wenn die Projectionen aller Ecken eines Polyeders gegeben ſind, man hi raus die Lage und Größe aller ſeiner Kanten, die Neigung jeder Seitenfläche gegen die Horizontalebene, od den Winkel, den jede zwei Seitenflächen unter ſich bilden, finden könne. Auch kann man das Vieleck, welch irgend eine dieſer Seitenflächen bildet, durch Aufklappung in ſeiner wahren Größe darſtellen; und eben ſo au den Durchſchnitt, die eine ihrer Lage nach gegebene Ebene mit dem Polyeder macht.

Umgekehrt, wenn die Lage eines Polyeders durch andere Bedingungen, in hinreichender Anzahl, beſtimm iſt, ſo kann man daraus ſeine beiden Projectionen finden; aber weil mit der Wahl der Beſtimmungsſtücke imm auch das Verfahren ſich ändert, ſo mag hier ein Beiſpiel genügen, den Weg anzuzeigen, den man in ande Fällen einzuſchlagen hat.

§. 52.

Fig. 22. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Parallelpiped ſteht mit ſeiner Grundfläche auf einer Eben welche mit dem Horizont einen Winkel ω macht, und deren horizontale Spur PQ iſt; ei von den Seiten der Grundfläche hat zur Horizontalprojection die Linie AB, und die beide übrigen mit dieſer Seite zuſammenſtoßenden Kanten haben beziehlich die Längen l′ und l″; ma ſoll die Horizontal- und Vertikalprojectionen des Parallelpipedes finden.

Auflöſung. Man denke ſich durch den Punkt B eine auf PQ ſenkrechte Profilebene PRR′ gelegt, wird dieſe die gegebene Ebene in einer Geraden ſchneiden, welche mit PR den Winkel ω bildet; klappt man n die Profilebene um PR auf die Horizontalebene, indem man den Winkel RPR″ = ω conſtruirt, und macht d auf der Axe Senkrechte RR′ gleich der auf PR Senkrechten RR″, ſo iſt R′Q die vertikale Spur (§. 39) d gegebenen Ebene, in welcher die Grundfläche des Parallelpipeds liegt. Klappt man ferner die Ebene PQR′ u PQ auf die Horizontalebene, ſo wird der Punkt B (d. h. er ſelbſt, nicht ſeine Projection), der ſich auf der Profi

ie in B″ projicirt hat, in b fallen, so daß also Ab die wahre Länge der aufgeklappten Seite des Parallel-eds sein wird. Nun errichte man in A auf Ab die Senkrechte Ad = l′, so hat man zwei Seiten der auf-appten Grundfläche; und führt man letztere wieder in ihre vorige Lage zurück, so projiciren sich diese beiden ten in AB und AD und das Parallelogram ABCD wird die Horizontalprojection der Grundfläche der Parallel-eds sein.

Diejenige Kante nun, welche in B senkrecht auf der Grundfläche steht, wird ihre Horizontalprojection in der PQ senkrechten FR haben (§. 33); ihre wahre Länge aber wird durch die Linie B″F″ dargestellt, welche der Profilebene senkrecht auf PR errichtet und gleich l″ gemacht wurde. Projicirt man daher den Endpunkt in F, so ist BF die Horizontalprojection der in B senkrecht auf der Grundfläche stehenden Kante; man vollende das Parallelogram ABFE und die übrigen Seitenflächen mittels verschiedener Parallen, so erhält man die ständige Horizontalprojection ABCDEFG des Parallelepipeds.

Was nun die Vertikalprojection betrifft, so bemerke man, daß die Seiten AD und CD (nicht ihre Projec-en) sich auf der Ebene PQR′ schneiden, und daß also (nach §. 25) ihre Vertikalprojectionen A′K und M′N′ h ihr Zusammentreffen in D′ die Vertikalprojection der Ecke D bestimmen. *)

Projicirt man nun auch die Spitze C in C′ auf M′N′, so kann man das Parallelogram A′D′C′B′ voll-n. Hat man ferner durch die 4 Ecken dieses Parallelograms Senkrechte auf QR′ gezogen, so darf man noch auf letztere die Punkte E, F, G, H, in E′, F′, G′, H′ projiciren, um die gesuchte Vertikalprojection zu lten.

Die Linien F′G′, G′H′, H′E′ und E′F′ müssen den Seiten der Grundfläche A′B′C′D′ parallel sein.

Endlich ist noch zu unterscheiden, welche Seiten auf jeder Projectionsebene sichtbar sind, wobei man sich den in den §§. 15 und 16 aufgestellten Regeln zu richten hat. Auch bemerke man, daß der Gesichtspunkt jede Projectionsebene ein anderer ist, und daß daher eine und dieselbe Seite, wie z. B. (AD, A′D′) auf der i Ebene sichtbar, auf der andern unsichtbar sein kann.

Drittes Kapitel.

Auflösung des körperlichen Dreiecks.

§. 53.

Ein körperliches Dreieck SABC besteht aus drei ebenen und drei Flächen-Winkeln: die erstern werden Fig. 23.
den geraden Seitenlinien gebildet, die andern sind die Neigungen je zweier Seitenflächen gegen einander.

Wenn von diesen sechs Stücken drei gegeben sind, so können die übrigen gefunden werden. Es sind also verschiedene Aufgaben möglich; denn bezeichnet man durch A, B und C diejenigen Flächenwinkel, deren Kan-beziehungsweise SA, SB, SC, und durch α, β, γ die ebenen Winkel oder Seitenflächen, welche jenen Flächen-eln entgegengesetzt sind, so können gegeben werden:

1) Die drei Seitenflächen oder ebenen Winkel . . . . . α, β, γ,
2) Zwei Seiten und der eingeschlossene Flächenwinkel . . . . . α, β, C

*) Man könnte die Punkte D′, C′, B′ auch aus ihren Horizontalprojectionen und ihren Höhen über der Axe finden; denn diese Höhen alle bestimmt die Profilebene, wo die fraglichen Punkte auf der Geraden PR″ projicirt sind.

3) Zwei Seiten und der Flächenwinkel, welcher einer von diesen Seiten gegenüberliegt . . α, β, B
4) Zwei Flächenwinkel und eine der Gegenseiten . . . . . A, B, β
5) Zwei Flächenwinkel und die eingeschlossene Seite . . . . . A, B, γ.
6) Die drei Flächenwinkel . . . . . A, B, C.

Dieses sind die einzig möglichen, wahrhaft von einander verschiedenen Combinationen zu dreien, welche sich aus den sechs Stücken eines körperlichen Dreiecks bilden lassen; und die drei letzteren Fälle lassen sich sogar vermittels des Ergänzungsdreiecks auf die drei ersteren zurückführen.

§. 54.

Von irgend einem Punkt S', den man innerhalb des Körperwinkels S annimmt, fälle man eine Senkrechte auf jede der Seiten und, um sich über die Figur zu verständigen, denke man sich ein für allemal B S C als eine Horizontalebene und die Kante S A über derselben erhaben. Man wird auf diese Art ein zweites körperliches Dreieck S' erhalten, dessen Kante S'A' vertikal, und dessen beide andere Kanten S'B' und S'C' beziehlich senkrecht sind auf den Seiten A S C und A S B; dieses neue körperliche Dreieck nun heißt das Ergänzungsdreieck des ersteren, weil die Seiten des einen die Supplemente von den Flächenwinkeln des andern, und die Flächenwinkel des einen die Supplemente von den Seiten des andern sind. Ehe aber dieses Wechselverhältniß bewiesen wird, bemerke man, daß es bei der Bildung des neuen körperlichen Dreiecks nicht gleichgültig ist, von welchem Punkt im Raume man die Senkrechten fällt; denn drei Gerade oder drei Ebenen, welche sich in einem und demselben Punkte S' schneiden, und welche auf beiden Seiten über diesen Punkt hinaus verlängert sind, bilden immer acht verschiedene körperliche Dreiecke, unter welchen es nur zwei (symmetrisch gleiche und an der Spitze einander entgegengesetzte) gibt, welche wirklich die Ergänzungsdreiecke des gegebenen Dreiecks S A B C sind.

Es würde daher, um bei der Verlängerung der Senkrechten keinen Irrthum zu begehen, angenommen, daß sie von irgend einem innerhalb des Körperdreiecks liegenden Punkt auf die Seitenflächen gefällt werden; ist dieses geschehen, so kann man das so erhaltene körperliche Dreieck S' im Raume hinversetzen, wo man will.

§. 55.

Nun bezeichne man wieder durch A', B' und C' diejenigen Flächenwinkel, deren Kanten S'A', S'B', S'C' sind, und durch α', β', γ' diejenigen Seiten, welche jenen Kanten gegenüber liegen. Da nun die Ebene A'S'B' auf den beiden Seiten B S C und A S C senkrecht steht, so stehen auch die Durchschnitte A'E und B'E senkrecht auf der Kante S C, und bilden daher den Neigungswinkel des Flächenwinkels C. Da nun in dem Viereck S'A'E B' die Winkel bei A' und B' Rechte sind, so müssen auch die beiden Winkel A'S'B' und A'E B' zusammen zwei Rechte betragen. Man hat also:

$$A'S'B' + A'EB' \text{ oder } \gamma' + C = 180°;$$

ebenso beweis't man, daß $\beta' + B = 180$

und $\alpha' + A = 180$

wenn man die Vierecke S'A'D C' und S'C'FB' betrachtet, welche bei dem Durchschnitt der Seiten A'S'C' und B'S'C' mit den Seiten des körperlichen Dreiecks S entstehen. Die Seiten des Körperdreiecks S' sind also die Supplemente der Flächenwinkel des Körperdreiecks S.

§. 56.

Nun betrachte man auch die Flächenwinkel des körperlichen Dreiecks S'.

Die beiden Seiten B'S'A' und C'S'A' desselben schneiden die Ebene B S C, auf welcher sie beide senkrecht stehen, nach den Geraden A'E und A'D; mithin ist D A'E der Neigungswinkel des Flächenwinkels A'. Da nun

em Viereck SDA'E die Winkel bei D und E Rechte ſind (weil die Seite A'S'B' auf SC und die Seite 'C' auf SB ſenkrecht ſteht), ſo ſind auch die beiden andern Winkel des Vierecks zuſammen zwei Rechte, d. h. ß:

$$DA'E + DSE \text{ oder } A' + \alpha = 180;$$
eben ſo beweiſ't man, daß $B' + \beta = 180$
und $C' + \gamma = 180$

ls der Vierecke SEB'F und SDC'F. Die Flächenwinkel des körperlichen Dreiecks S ſind mit die Supplemente zu den Seiten des körperlichen Dreiecks S; und man kann daher auch ſagen, Dreieck S ſei das Ergänzungsdreieck des Dreiecks S'.

§. 57.

Beſchreibt man aus dem Punkte S als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmeſſer SA eine Kugel, ſo ſolche von den Seitenflächen des körperlichen Dreiecks S in dreien Bögen größter Kreiſe AB, BC, CA ge- tten, welche ein ſphäriſches Dreieck bilden, durch deſſen Seiten die ebenen Winkel α, β, γ gemeſſen werden, deſſen Winkel den Neigungen der Flächenwinkel A, B und C des körperlichen Dreiecks gleich ſind.

Wenn daher von den ſechs Elementen dieſes körperlichen Dreiecks drei bekannt ſind, ſo führt die Conſtruction lben auf die graphiſche Auflöſung der nämlichen Aufgaben, welche die ſphäriſche Trigonometrie durch den Kalcul . Verſetzt man die Spitze S' des körperlichen Dreiecks S' in den Mittelpunkt S, ſo werden ſeine Seitenflächen nämliche Kugel unter einem andern ſphäriſchen Dreieck ſchneiden, welches das Ergänzungs- oder Polar- ieck von ABC ſein wird, von dem man in der ſphäriſchen Trigonometrie Gebrauch macht. *)

§. 58.

Um nun wieder auf die ſechs, oben in §. 53 erwähnten Probleme zurückzukommen, bemerke man, daß, n die drei Flächenwinkel A, B, C gegeben ſind, man daraus ſogleich ihre Supplemente, alſo, nach §. 56, Seiten α', β', γ' des Ergänzungsdreiecks S' finden könne; und wenn man nun nach Nro. 1 des §. 53 aus en drei Seiten die Flächenwinkel A', B', C' zu finden im Stande iſt, ſo können daraus ſogleich, indem man die Supplemente nimmt, die Seiten α, β, γ des körperlichen Dreiecks S gefunden werden.

Man ſieht hieraus, daß der ſechste Fall ſich auf den erſten zurückführen läßt; und ebenſo läßt ſich der ſte auf den zweiten, und der vierte auf den dritten zurückführen. Man hat alſo nur nöthig, die Auflöſung drei erſten Aufgaben kennen zu lernen.

§. 59.

Aufgabe. Erſter Fall. Es ſind die drei Seiten α, β, γ eines körperlichen Dreiecks gege- Fig. 24.
n; man ſoll die drei Flächenwinkel finden.

*) Eigentlich müßte man, um das Polardreieck von ABC in der Lage zu erhalten, wie es die ſphäriſche Trigonometrie anwendet, das ſymmetriſche, körperliche Dreieck von S'A'B'C' nehmen, das man erhält, wenn man die drei Kanten von S' über S' hinaus verlängert. Man dürfte alſo nur gleich von Anfang in der Spitze S drei Senkrechten errichten: die eine auf BSC und zwar nach der nämlichen Seite zu, wo die Kante SA liegt; die andere auf CSA, nach derjenigen Seite, auf welcher SB liegt; die dritte endlich auf ASB und zwar nach der Seite zu, wo SC liegt. Der ſo conſtruirte körperliche Winkel würde alsdann die Kugel in einem ſphär. Dreieck ſchneiden, das genau das Polardreieck von ABC wäre. Da aber die Figur ſehr unklar ausfällt, wenn man nicht ſphäriſche Dreiecke zu Hilfe nimmt, ſo wurde die Conſtruction des §. 54 vorgezogen; um ſo mehr als hier, wo es ſich nur um körperliche Ecken handelt, diejenigen, welche ſymmetriſch gleich ſind, aus denſelben Stücken, nur in anderer Ordnung zuſammengeſetzt ſind, und das Supplementarverhältniß daſſelbe bleibt.

Auflösung. Es seien A″SB, BSC, CSA′ die drei gegebenen Seiten (oder ebenen Winkel), welche auf der Ebene der Seite BSC, die man als Horizontalebene betrachtet, aufgeklappt angenommen worden. Nun ist klar, daß man das körperliche Dreieck erhalten würde, wenn man die beiden Seitenflächen A″SB und A′SC um die Geraden SB und SC so lange drehte, bis die beiden Linien SA″ und SA′ in eine Linie zusammenfielen, die alsdann die dritte Kante des körperlichen Dreiecks sein würde. Die noch unbekannte Projection dieser Kante werde durch SA bezeichnet; um sie zu bestimmen nehme man auf den aufgeklappten Geraden SA′ und SA″ zwei beliebig große, aber gleiche Stücke SD′ und SD″, so ist klar, daß die Punkte D′ und D″ bei der vorher beschriebenen Bildung des körperlichen Dreiecks in einen Punkt zusammenfallen müssen. Da eben diese Punkte während der Umdrehung der Seiten A″SB und A′SC um die Geraden SC und SB, fortwährend in den vertikalen, auf SC und SB senkrechten Ebenen D′FD, D″ED bleiben, so müssen sie mit demjenigen Punkte im Raum zusammenfallen, dessen Horizontalprojection D ist. Alsdann aber ist SDA die Projection der dritten Kante des körperlichen Dreiecks.

Nun schneidet ferner die Vertikalebene FD, welche senkrecht auf SC steht, diejenigen beiden Ebenen, welche durch SC gehen in den Geraden FD und FD′; diese Geraden aber schließen, wenn das körperliche Dreieck gebildet ist, den Neigungswinkel jener Ebenen ein, und bilden mit der Vertikalen D ein rechtwinkliges Dreieck. Klappt man dieses Dreieck um FD auf die Horizontalebene auf, indem man in D die unbestimmte Senkrechte DG′ auf DF errichtet, und aus F mit dem Halbmesser FG′ = FD′ den Punkt G′ in ihr bestimmt; so erhält man den Winkel G′FD als den Neigungswinkel des Flächenwinkels C.

Eben so schneidet die Vertikalebene ED die beiden durch SB gehenden Ebenen in den Geraden ED, ED″, welche nach gebildetem körperlichem Dreieck, den Neigungswinkel des Flächenwinkels B einschließen. Und da eben diese Geraden mit der Vertikalen D ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck bilden, dessen Grundlinie ED und die Hypotenuse EG″ ist, so kann man wieder die Aufklappung G″ED dieses Dreiecks construiren, wodurch man den Winkel DEG″ als Maß für den Flächenwinkel B erhält. Man bemerke zugleich, daß die beiden Vertikalen DG′ und DG″ sich gleich sein müssen, weil beide die Höhe eines und ebendesselben in D projicirten Punktes der Kante SA bezeichnen.

Um den dritten Winkel A zu erhalten, lege man eine senkrechte Ebene durch SA und zwar durch den Punkt dieser Kante, der in D projicirt und einerseits in D′, andererseits in D″ aufgeklappt ist. Diese Ebene wird die Seitenflächen A′SC und A″SB in den Geraden D′N und D′M schneiden, welche beziehlich senkrecht stehen auf SA′ und SA″. Der Durchschnitt jener Ebene aber mit der dritten Seite BSC muß nothwendig in der Geraden MN geschehen, welche senkrecht auf der Horizontalprojection SA der dritten Kante stehen wird. Construirt man daher aus den drei Linien D″M, MN und ND′ das Dreieck PMN, so wird der Winkel P an der Spitze das Maß für denjenigen Flächenwinkel sein, der SA zur Kante hat.

Man bemerke noch überdieß, daß das Dreieck PMN, ehe es um MN aufgeklappt wird, seine Spitze P in dem Punkt der Kante SA hat, der in D projicirt ist. Da aber MN senkrecht auf der Vertikalebene SA steht, so wird, bei der Umdrehung des Dreiecks um MN, der Punkt P stets in dieser Vertikalebene bleiben, und seine Aufklappung wird daher in die verlängerte Gerade SA fallen.

§. 60.

Die vorhergehenden Constructionen werden auf gleiche Weise auch in dem Falle angewendet, da entweder die drei Winkel α, β, γ, oder einer oder zwei unter ihnen stumpf sind; und es existiren für die Möglichkeit der Auflösung nur folgende zwei Bedingungen: 1) daß die drei Winkel α, β, γ zusammengenommen kleiner als vier Rechte seien, und 2) daß der größte dieser Winkel immer kleiner sei, als die Summe der beiden andern. Finden nämlich diese Bedingungen nicht statt, so ist leicht einzusehen, daß man bei der Construction der Dreiecke FDG′

und EDG″ Hypotenusen anwenden müßte, die kleiner als die Grundlinie wären, wodurch die Construction unmöglich würde.

§. 61.

Aufgabe. Man soll einen gegebenen Winkel auf den Horizont reduciren.

Auflösung. Diese Aufgabe, welche beim Aufnehmen topographischer Plane von Nutzen ist, verlangt die Construction der Horizontalprojection eines gegebenen Winkels α, dessen Schenkel mit einer aus seiner Spitze gefällten Vertikalen die Winkel β und γ von bekannter Größe bilden. Denkt man sich nun ein körperliches Dreieck, das jene Vertikale und die zwei Schenkel des gegebenen Winkels zu Kanten hat, so kennt man auch dessen Seiten α, β und γ, und offenbar wird die gesuchte Projection nichts Anderes sein, als derjenige ebene Winkel, welcher den Flächenwinkel A mißt, der zwischen den beiden Vertikalebenen enthalten ist. Es reducirt sich daher diese Aufgabe auf die des §. 59, und man könnte sie auf die nämliche Art auflösen, wenn die Voraussetzung, daß eine der Kanten vertikal ist, nicht eine bequemere Construction zuließe.

Auf einer beliebigen Ebene lege man an die Vertikale SA die beiden Winkel $ASB = \gamma$, $ASC = \beta$; hierauf denke man sich den letzteren Winkel, während seine Größe unverändert bleibt, so lange um SA gedreht, bis der bewegliche Schenkel SC mit dem unbewegten Schenkel SB den Winkel α im Raume bildet; auf diese Art erhält man den gegebenen Winkel genau in derjenigen Lage, welche durch die Aufgabe bezeichnet wird, und es wird nun leicht sein, hieraus seine Horizontalprojection zu construiren. Fig. 25.

Bei der Umdrehung des Winkels ASC um SA wird der Fußpunkt C des beweglichen Schenkels einen Kreisbogen CC′ beschreiben, dessen Mittelpunkt A ist; und er wird in einem gewissen Punkt C′ dieses Bogens inne halten, wenn der zwischen SB und SC enthaltene Winkel gleich α geworden ist. In dieser Lage bilden also SB, SC und C′B ein Dreieck, dessen Grundlinie C′B ist. Construirt man daher auf der Vertikalebene einen Winkel $BSC'' = \alpha$ und macht $SC'' = SC$, so wird die Gerade BC″ jener Grundlinie C′B gleich sein. Man beschreibe also aus B mit BC″ einen Kreisbogen, so wird durch diesen der Punkt C′ bestimmt, in welchem der Fußpunkt des beweglichen Schenkels SC innehalten muß, und man erhält zugleich die Horizontalprojection AC′, dieses Schenkels. Da nun die Horizontalprojection des unbewegten Schenkels SB in AB fällt, so ist folglich BAC′ die Horizontalprojection des gegebenen Winkels α. Diesen Winkel BAC′, der größer oder kleiner als α sein kann, wendet man auf topographischen Charten an, wo alle Gegenstände durch ihre Projectionen dargestellt werden müssen.

§. 62.

Aufgabe. Zweiter Fall. Es sind zwei Seiten α, β eines körperlichen Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel C gegeben; man soll die übrigen Stücke finden.

Auflösung. Es seien $BSC = \alpha$ und $CSA' = \beta$ die beiden gegebenen auf die Horizontalebene aufgeklappten Seiten; dreht man nun die zweite derselben so lange um SC bis sie mit BSC den gegebenen Winkel C bildet, so erhält man zwei Seiten des körperlichen Dreiecks in ihrer wahren Lage. Während dieser Bewegung aber bleibt ein auf der beweglichen Kante beliebig angenommener Punkt D′ stets in der auf SC senkrecht stehenden Vertikalebene D′FM. Dreht man daher letztere um FM, klappt sie auf die Horizontalebene auf, macht den Winkel $MFK = C$ und das Stück $FG' = FD'$, so kommt der Punkt D′ in G′ zu liegen, und seine Horizontalprojection wird folglich D sein, wenn die bewegliche Seite ASC in diejenige Lage gekommen ist, in welcher sie mit BSC den gegebenen Winkel C macht. Eben dieser Punkt im Raume aber, dessen Horizontalprojection D ist, gehört auch der dritten noch unbekannten Seite an; denkt man sich daher diese um SB gedreht, um sie auf die Horizontalebene aufzuklappen, so wird jener Punkt während der ganzen Umdrehung stets in der auf SB senk- Fig. 26.

rechten Vertikalebene DFD″ bleiben; und da er zugleich immer eine der SD′ gleiche Entfernung von der Spitze S behalten muß, so kann er leicht bestimmt werden, wenn man aus S mit SD′ einen Kreisbogen beschreibt, der die unbestimmte Gerade DE in dem Punkt D″ schneiden wird. Durch diesen Punkt D aber ist zugleich auch die dritte Seite oder der ebene Winkel D″SB bestimmt. Da nun also die drei Seiten des körperlichen Dreiecks bekannt sind, so können die Flächenwinkel nach §. 59 construirt werden.

Man könnte auch mit der Entfernung MG′, welche der MD″ offenbar gleich sein muß, aus M einen Kreisbogen beschreiben, der alsdann durch seinen Durchschnitt mit der unbestimmten DE den Punkt D″ bestimmen würde.

§. 63.

Aufgabe. Dritter Fall. Es sind zwei Seiten α, β eines körperlichen Dreiecks und ein Flächenwinkel B gegeben, welcher der einen von den gegebenen Seiten gegenüberliegt; man soll die übrigen Stücke finden.

Fig. 27. **Auflösung.** Es seien wieder $BSC = \alpha$ und $CSA' = \beta$ die beiden gegebenen und auf die Horizontalebene aufgeklappten Seiten. Wenn man nun in einer auf der Kante SB senkrechten Vertikalebene EF den Winkel REF (der hier aufgeklappt ist) dem gegebenen B gleich macht, und hierauf sich eine Ebene durch SE und ER gelegt denkt, so wird solche die Lage der noch unbekannten Seite angeben; um also das körperliche Dreieck zu erhalten, darf man jetzt nur die Seite A′SC um SC so lange drehen, bis die Kante SA′ in die Ebene SER zu liegen kommt. Während dieser Umdrehung aber bleibt der Punkt D′ der beweglichen Kante stets in der Vertikalebene D′FM, welche in F senkrecht auf CS steht. Ist folglich SA′ in die Ebene SER zu liegen gekommen, so muß der Punkt D′ in dem Durchschnitt der Vertikalebene FM mit der unbestimmten Ebene SER angelangt sein. Dieser Durchschnitt nun ist eine Gerade, welche durch M geht, und der Vertikalen F (nämlich dem Durchschnitt der Vertikalebene EF und D′FM) in demselben Punkte begegnet, in welchem sie von der (in ihrer wahren Lage im körperlichen Dreieck gedachten) ER getroffen wird; errichtet man daher, um die Höhe dieses Punktes zu finden, in F eine Linie senkrecht auf EF, so wird solche von der (aufgeklappten) ER in R geschnitten und FR ist die gesuchte Höhe. Man trage nun FR unter einem auf FM rechten Winkel von F nach R′, so ist MR′ der (mit der Vertikalebene D′FM um D′M auf die Horizontalebene aufgeklappte) oben erwähnte Durchschnitt, in welchen der Punkt D′ der beweglichen Kante SA′ zu liegen kommen muß. Beschreibt man also mit dem Halbmesser FD′ aus F einen Bogen, welcher die Gerade MR′ in G schneidet, so erhält man in der (aufgeklappten) Vertikalebene FM die Lage eines Punktes G, welcher der dritten Kante SA zugehört und dessen Horizontalprojection nun leicht bestimmt werden könnte.

Man bemerke aber, daß dieser in der Vertikalebene MF gelegene Punkt G zugleich der dritten noch unbekannten Seite zugehört, und daß er, indem man letztere um SB aufklappt, seine Entfernung von den auf SB gelegenen Punkten M und S nicht ändert. Diese Entfernungen aber sind offenbar MG und SD′; beschreibt man also aus M mit MG und aus S mit SD′ Bögen, so wird ihr Durchschnitt in D″ die Aufklappung des Punktes G bestimmen, und die gesuchte dritte Seite wird folglich D″SB sein. Ist aber diese Seite einmal bekannt, so geschieht die Construction der noch unbekannten Stücke nach §. 59.

§. 64.

Man bemerke übrigens wohl, daß der mit FD′ aus F beschriebene Kreisbogen die Gerade MR′ im Allgemeinen in zwei Punkten G und g schneiden wird, so daß die Seite A′SC, indem sie um CS gedreht wird, zwei Lagen wird annehmen können, für welche die Kante SA′ in die unbestimmte Ebene SER oder SMR′ fällt; für die eine dieser Lagen fällt der Punkt D′ in G, und für die andere in g. Klappt man daher den letzten

Punkt um SB auf die Horizontalebene, wie man es vorhin mit dem erstern gemacht hat, so wird er in d'' fallen und d'' SB wird alsdann die Größe der gesuchten dritten Seite sein; es gibt also zwei von einander verschiedene körperliche Dreiecke, welche aus den gegebenen Stücken α, β und B construirt werden können, — ein Resultat, das ganz demjenigen analog ist, das man bei der Construction eines geradlinigen Dreiecks erhält, wenn zwei Seiten desselben und ein Gegenwinkel dieser letzteren gegeben sind.

Es ist wohl kaum nöthig zu bemerken, daß, wenn der mit FD beschriebene Kreisbogen die Gerade MR' nur berührt, alsdann nur eine Auflösung statt finde; ferner, daß die Auflösung unmöglich sei, wenn jener Kreisbogen der Geraden MR' gar nicht begegnet.

§. 65.

Wenn der Punkt g auf MF' unterhalb MK, d. h. unter die Horizontalebene fiele, so fände keine zweite Auflösung statt. Denn das körperliche Dreieck, welches man in diesem Falle erhalten würde, wäre zusammengesetzt aus den Seiten α, β und einem Flächenwinkel, der offenbar das Supplement wäre von dem Winkel B. Da aber der letztere hier wirklich durch Zeichnung und nicht etwa durch seinen Sinuswerth gegeben ist, so kann rücksichtlich seiner Größe keine Zweideutigkeit statt finden, und es ist daher nicht gleichgültig, ob man B oder 180 — B anwendet. Fig. 27.

Fielen endlich die Punkte G und g beide unter die Horizontale MF, was nur dann geschehen kann, wenn der Flächenwinkel B stumpf ist, so wäre die Aufgabe durchaus unmöglich.

Bemerkung. Obgleich die drei letzten Aufgaben des §. 53 mittelst eines Ergänzungsdreiecks auf die drei ersten reducirt werden können, wie in §. 58 erwiesen worden ist, so ist es doch interessant und zuweilen von Nutzen, eine directe Auflösung anzuwenden. Eine solche folgt daher in den drei nächsten Paragraphen; jedoch ist hiebei zu bemerken, daß dieselbe die Kenntniß der Berührungsebenen an krummen Flächen voraussetzt, daher denn diejenigen Leser, welche das Studium der darstellenden Geometrie erst begonnen haben, diese Auflösung erst nach Beendigung des zweiten und dritten Kapitels im zweiten Abschnitt vornehmen werden.

§. 66.

Aufgabe. Vierter Fall. Es sind zwei Flächenwinkel A und B eines körperlichen Dreiecks und eine der Gegenseiten β gegeben; man soll die übrigen Stücke finden.

Taf. 7 bis. Fig. 1. Man nehme die Ebene der unbekannten Seite γ als Horizontalebene an, und zeichne auf derselben die Aufklappung ASC'' der gegebenen Seite β; hierauf lege man, senkrecht auf die Kante SA, die Vertikalebene D''EF und zeichne auf dieser den Winkel D'ED gleich dem gegebenen Flächenwinkel A. Dreht man nun die Seite ASC'' um AS bis sie in die Ebene SED' zu liegen kommt, so wird der Punkt D'' die Lage D' annehmen und sich horizontal in D projiciren; um nun das körperliche Dreieck vollends zu construiren, darf man nur durch die Kante (SD, ED') eine Ebene legen, welche mit der Horizontalebene einen Winkel bildet, der dem Flächenwinkel B gleich ist. Man ziehe daher in der Vertikalebene EF die Gerade D'F, welche mit EF den Winkel D'FD = B bilde; hierauf drehe man diese Gerade um die Vertikale D'D so, daß sie eine Kegelfläche beschreibe, deren Grundfläche der Kreis DF ist, und an diese Umdrehungsfläche lege man eine Berührungsebene, welche durch die Kante (SD, ED') gehe. Diese Ebene hat zu ihrer Spur die Gerade SGB, welche, aus S gezogen, den Kreis DF berührt, und welche die dritte Kante des gesuchten körperlichen Dreiecks ist, und die Seite ASB = γ bestimmt. Um die dritte Seite α, welche hier in BSC''' aufgeklappt ist, zu erhalten, nehme man auf der Senkrechten DG die Länge DG''' gleich der Erzeugungslinie D'F des Kegels, welchen die Seite α berührt.

§. 67.

Aufgabe. Fünfter Fall. Es sind zwei Flächenwinkel A und B eines körperlichen Dreiecks sammt der eingeschlossenen Seite γ gegeben; man soll die übrigen Stücke suchen.

Tafel 7 bis. Fig. 2. Man zeichne in der Horizontalebene einen Winkel $ASB = \gamma$, lege senkrecht auf die Kante SA die Vertikalebene EF und zeichne auf diese den Winkel F'EF gleich dem Flächenwinkel A; eben so construire man in der auf SB senkrechten Ebene den Winkel G'KG = B. Nun liegen in den Ebenen SEF' und SKG' die noch unbekannten Seiten, und um einen zweiten Punkt D für die Projection SDC ihres Durchschnitts zu erhalten, darf man dieselben nur durch eine und dieselbe beliebige Ebene schneiden. Man nehme daher gleiche Höhen EH' = KL'; hierauf ziehe man die Geraden H'F' und L'G' beziehungsweise parallel mit EF und KG, so erhält man zwei horizontale Schnitte F'D und G'D, welche durch ihr Zusammentreffen den gesuchten Punkt D bestimmen. Um endlich die beiden Seiten, die sich in SDC schneiden, aufzuklappen, nehme man die Senkrechten MD'' = EF', ND''' = KG', so sind ASC'' und BSC''' die beiden Seiten in ihrer wahren Größe.

§. 68.

Aufgabe. Sechster Fall. Es sind die drei Flächenwinkel A, B, C eines körperlichen Dreiecks gegeben; man soll die 3 Seiten finden.

Tafel 7 bis. Fig. 3. Man nehme an, die Horizontalebene falle mit der Ebene der noch unbekannten Seite γ zusammen, und ziehe in ihr die beliebige Gerade DA, welche eine der Kanten dieser Seite vorstellen solle; ferner nehme man eine auf DA senkrechte Vertikalebene an, und zeichne in ihr den Winkel Y'AX gleich dem gegebenen Flächenwinkel A, so ist die Ebene Y'AD diejenige, in welcher die Seite β enthalten ist. Nun fälle man aus einem beliebig im Innern des Winkels Y'AX angenommenen Punkte T' auf die Seiten γ und β die Senkrechten T'O und T'I', mache den Winkel T'FO = B und T'G'I' = C und drehe hierauf diese Winkel um die Axen T'O und T'I', so entstehen dadurch zwei Umdrehungskegel, deren jeder die unbekannte Seite α berühren muß. Die Aufgabe reducirt sich also jetzt darauf, eine Ebene zu construiren, welche die beiden Kegel zugleich berühren, deren gemeinschaftliche Spitze in T' ist, aus deren Grundlinien die mit den Halbmessern OF und I'G' beschriebenen Kreise sind. Wollte man diese Aufgabe direct lösen, so müßte man die horizontale Spur des zweiten Kegels I'T'G' construiren und an diese Curve und an den Kreis um O eine gemeinschaftliche Tangente ziehen; wie man aber die nur annähernd richtige Zeichnung einer Curve durch Punkte vermeiden kann, zeigen folgende Betrachtungen.

In den Kegel T'OF schreibe man längs des horizontalen Kreises MFN eine Kugel ein: den Mittelpunkt ω' dieser Kugel erhält man, wenn man die Normale Fω' auf den Kegel zieht. Um nun eine zweite Kugel zu erhalten, so groß als diese erste, welche auf dieselbe Weise in den andern Kegel T'I'G' eingeschrieben sei, ziehe man senkrecht auf T'G' die Linie T'H' = ω'F und vollende das Parallelogramm T'H'K'φ', wodurch man den Mittelpunkt φ' und den Halbmesser φ'K' dieser neuen Kugel erhält. Nun denke man sich einen um beide Kugeln beschriebenen Cylinder, dieser wird sie in zwei größten, auf seiner Axe $\varphi'\omega'$ senkrechten Kreisen berühren: die Ebene aber, welche jene beiden Kegel berührt, muß auch die beiden Kugeln und mithin auch den Cylinder berühren, daher man denn also nur durch T' eine diesen Cylinder tangirende Ebene legen darf.

Nach der directen Auflösung müßte man nun in der auf der Axe $\varphi'\omega$ senkrechten Ebene ω'V' mit einem Halbmesser gleich ω'F einen Kreis beschreiben; hierauf an diesen Kreis eine Tangente ziehen durch den Punkt, wo die aus T' mit der Axe parallel gezogene Gerade die Ebene ω'V' träfe; und dieses Alles würde in der Aufklappung auf die Horizontalebene wirklich ausgeführt werden können. Aber es gibt einen viel kürzeren Weg.

Da nämlich die geſuchte Ebene den Cylinder, die Kugel und den Kegel T′FO zugleich berühren ſoll, ſo muß ihr Berührungspunkt mit der Kugel liegen 1) auf dem horizontalen Kreis MFN, welcher die Berührungslinie zwiſchen der Kugel und dem Kegel iſt; 2) auf dem in der Ebene ω′V′ enthaltenen größten Kreiſe, welcher die Berührungslinie zwiſchen der Kugel und dem Cylinder iſt. Dieſe zwei Kreiſe aber ſchneiden ſich in einer Sehne, welche vertikal im Punkte M′ projicirt, und ihrer wahren Lage nach durch MM′N auf der Horizontalebene dargeſtellt iſt; mithin iſt M der Berührungspunkt und BMS der horizontale Grundſchnitt der geſuchten Berührungsebene; ihr horizontaler Durchſchnitt, welcher durch die Spitze T′ gehen muß, iſt BT′C′.

Da nun die Größe ASB = γ der horizontalen Seite und die Projection SC der Kante bekannt iſt, in welcher ſich die beiden Ebenen SAC′ und SBC′ ſchneiden, ſo darf man nur die beiden letzteren um AS und BS aufklappen, um die beiden Seiten ASC″ = β und BSC‴ = α zu erhalten. Man bemerke noch, daß die in SC″ aufgeklappte Kante den um I″ mit dem Halbmeſſer I′G′ beſchriebenen Kreis berühren muß; denn dieſer Kreis iſt die Baſis des zweiten Kegels T′I′G′, den die Ebene SBC′ ebenfalls berührt.

Zweiter Abschnitt.

Von den Flächen und ihren Berührungsebenen.

Erstes Kapitel.

Von der Erzeugung der Flächen und ihrer graphischen Darstellung.

§. 69.

Es ist schon oben (§. 7) bemerkt worden, daß man, um eine Fläche graphisch darzustellen, nicht, wie bei den Linien, die Projectionen ihrer verschiedenen Punkte auf die Grundebenen construiren dürfe; denn da es von Einem Punkte einer Fläche aus unzählige Richtungen auf derselben gibt, so würden durch eine solche Constructionsmethode die beiden Grundebenen mit einer Menge von Punkten und Linien angefüllt werden, deren Zusammenhang nicht bemerkbar wäre, und die überdies alle zusammen dem Auge des Beobachters kein Bild, weder von der Gestalt der Fläche, noch von ihrer mehr oder minder starken Krümmung geben würden. Man wendet daher ein anderes, aus der Natur der Fläche selbst hergeleitetes, Verfahren an, dessen Gründe nun zunächst entwickelt werden sollen.

§. 70.

Unter dem Wort Fläche darf man nicht blos eine Reihe von Punkten oder (geraden und krummen) Linien verstehen, die einander so nahe genommen werden können, als man will, ohne jedoch in einer bestimmten Abhängigkeit der Lage gegen einander zu stehen; sondern diese Punkte und Linien müssen vielmehr hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage einem gewissen bestimmten Gesetze unterworfen sein, das, analytisch ausgedrückt, die Gleichung für die Fläche sein würde, und dessen geometrische Definition also lautet:

Eine Fläche ist der Ort aller der verschiedenen Lagen, welche eine bewegliche Linie im Raume annehmen kann, indem sie ihre Lage, ja sogar ihre Gestalt, nach einem bestimmten, stetigen Gesetze ändert.

Die bewegliche Linie heißt die Erzeugungslinie (Generatrix) und unter den Worten „bestimmtes Gesetz“ hat man solche Bedingungen zu verstehen, welche, für keinen im Raume gegebenen Punkt, etwas willkührliches, weder in der Form noch in der Lage der Erzeugungslinie, zulassen. Am bequemsten wird gewöhnlich dieses Gesetz der Bewegung dadurch (wenigstens theilweise) angegeben, daß man eine oder mehre bestimmte Linien bezeichnet, welche die Erzeugungslinie in allen ihren Lagen beständig treffen muß; man nennt solche Linien Leitlinien (Directrix). Soll also eine Fläche vollkommen genau bestimmt sein, so muß die Natur der Erzeugungslinie, die Art, wie sie sich bewegt, ferner müssen die Leitlinien angegeben werden, auf welchen die Erzeugungslinie während ihrer Bewegung hingleiten soll. *)

*) Uebersetzt man diese Art der Erzeugung in die Sprache der Analysis, so erhält man immer die Gleichung der Fläche (S. Analyse appliqué à la géometrie des trois dimensions, chap. XIV; von E. F. Kauffmann ins Deutsche übertragen unter dem

Aendert man dieſe Leitlinien, ohne zugleich die Erzeugungslinie zu ändern, ſo erhält man verſchiedene Flächen, welche alle einem Geſchlechte angehören; übrigens wird man einſehen, daß jede einzelne Fläche ſich auf unzählige verſchiedene Arten erzeugen läßt.

Es folgen nun mehre Beiſpiele, ſowohl um die allgemeine Definition der Flächen noch mehr in's Klare zu ſetzen, als auch um den Anfänger mit denjenigen geometriſchen Oertern, von welchen am häufigſten Gebrauch gemacht wird, gleich hier bekannt zu machen.

§. 71.

Eine coniſche Fläche, Kegelfläche, iſt der Ort aller Lagen, welche eine bewegliche Gerade SA nach und nach annehmen wird, indem ſie immer durch einen feſten Punkt S geht und dabei nach und nach alle Punkte einer gegebenen Curve ABC (welche auch eine Curve von doppelter Krümmung ſein kann) durchläuft. Fig. 28

Nach dieſer Definition iſt die bewegliche Gerade SA eine Erzeugungslinie, welche nicht ihre Geſtalt, ſondern nur ihre Lage ändert. Der feſte Punkt S hingegen und die Curve ABC ſind die Direktricen oder Leitlinien. Betrachtet man die Linie SA als unbegrenzt, alſo auf beiden Seiten des Punktes S unbeſtimmt verlängert, ſo beſchreibt ſie zwei einander entgegengeſetzte, ihrer Größe nach unbeſtimmte, coniſche Flächen SABC und $S\alpha\beta\gamma$, die man Kegelmäntel (nappes) nennt. Der Punkt S heißt der Mittelpunkt oder der Scheitel derſelben. Setzt man andere Leitlinien an die Stelle der Curve ABC, und ändert auch den Scheitel S, ſo erhält man verſchiedene einzelne Flächen, welche alle zum Geſchlechte der coniſchen Flächen gehören.

§. 72.

Dieſe Flächen aber können noch auf viele andere Arten erzeugt werden. Schneidet man z. B. die Kegelfläche SABC durch verſchiedene parallele Ebenen, ſo erhält man die Schnitte A′B′C′, A″B″C″, welche ähnliche Curven ſind, weil die Punkte O′, O″, ſo in ihnen liegen, daß die beziehlich parallelen Leitſtrahlen (radii vectores) O′A′ und O″A″, O′B′ und O″B″, O′D′ und O″D″, ... ein conſtantes Verhältniß zu einander haben, was ſehr leicht durch die Theorie der Proportionallinien, für jede Leitlinie, erwieſen werden kann. Nimmt man nun, zu beſſerer Feſtſtellung der Begriffe, an, die Curve ABC ſei eine Ellipſe, deren beide halbe Axen OA = a und OB = b ſeien, ſo werden auch die, parallel mit der Grundfläche ABC gemachten, Schnitte A′B′C′ und A″B″C″ Ellipſen ſein, deren halbe Axen mit denen von ABC parallel ſind, ſo daß

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots .$$

Titel: Analytiſche Geometrie im Raume von C. F. A. Leroy, Stuttgart 1840). Umgekehrt, wenn ein geometriſcher Ort unmittelbar beſtimmt iſt durch die Gleichung F (x, y, z) = o, und man ſchneidet dieſe Fläche durch mehrere verſchiedene z. B. horizontale Ebenen, ſo erhält man die Curven

(1) $z = \alpha$, und $F(x, y, \alpha) = o$, (2)
$z = \alpha'$, — $F(x, y, \alpha') = o$,
$z = \alpha''$, — $F(x, y, \alpha'') = o$,

Von dieſen Curven erhält man jede aus der erſten, wenn man daſelbſt der Conſtanten α nach und nach die Werthe α', α'' ꝛc. ꝛc. beilegt. Es ſind alſo dieſe verſchiedenen Curven nichts anders als die Lagen, welche die erſte Curve (1) und (2) nach und nach annimmt, wenn ſie ſich in parallelen Ebenen bewegt, indem ſie übrigens ihre Dimenſionen ändert nach einem Geſetz, welches von der Conſtanten α abhängig iſt: eliminirt man daher dieſe Conſtante zwiſchen (1) und (2), ſo erhält man offenbar wieder die Gleichung F (x, y, z) = o, welche ſomit den Ort aller Lagen der erſten beweglichen Curve ausdrückt. Da man aber den ſchneidenden Parallelebenen unzählig viele verſchiedene Richtungen geben, da man ſogar andere krumme Flächen zum Durchſchnitt anwenden kann, ſo muß es alſo für jede Fläche unendlich viele verſchiedene Arten der Erzeugung geben.

Ließe man also die Ellipse ABC sich so bewegen, daß

1) ihr Mittelpunkt O die Gerade SO durchliefe, daß

2) die Axen ihrer ursprünglichen Lage parallel blieben, und daß sie

3) beide in demselben Verhältniß abnähmen, wie die Entfernungen SO, SO′, SO″ ....;

so ist klar, daß diese bewegliche Ellipse nach und nach die Lagen A′B′C′, A″B″C″, ... annehmen, und mithin für die conische Fläche eine ihrer Gestalt und Lage nach veränderliche Erzeugungslinie sein würde.

Um aber diese verschiedenen Bedingungen noch kürzer auszudrücken, darf man sich nur erinnern, daß eine Curve vom zweiten Grad in ihrer Ebene bestimmt ist, wenn man fünf von den Punkten kennt, durch welche sie geht; nimmt man also auf der Kegelfläche fünf feste Seitenlinien SA, SB, SC, SD, SE an, so kann man sagen, die Kegelfläche selbst entstehe, wenn die Ellipse ABC sich so bewegt, daß ihre Ebene sich beständig parallel bleibt und ihr Umfang stets durch die fünf als Leitlinien betrachteten Geraden geht.

Da man endlich den schneidenden Parallelebenen jede beliebige Richtung geben darf; da man sogar die Kegelfläche durch andere Flächen, z. B. durch sphärische, die man aus O mit veränderlichem Halbmesser beschrieben hätte, schneiden könnte; so erhellet daraus genugsam, daß es unendlich viele einfach und doppelt gekrümmte Linien geben müsse, die man als Erzeugungslinien einer und derselben conischen Fläche anwenden kann.

§. 73.

Fig. 29. **Eine cylindrische Fläche** ist der Ort der verschiedenen Lagen, welche eine bewegliche Gerade AA′ nach und nach annehmen wird, wenn sie, parallel mit einer gegebenen Richtung, längs einer festen Curve ABC hingleitet. Aber diese Art der Erzeugung einer cylindrischen Fläche, bei welcher die Erzeugungslinie ihre Gestalt nicht ändert, ist nicht die einzig mögliche; denn da alle mit ABC parallel gemachten Schnitte congruente Curven geben, so kann man die cylindrische Fläche auch als den Weg betrachten, den die Curve ABC zurücklegt, indem sie, parallel mit sich selbst, so an der Geraden AA′ sich hinbewegt, daß sie immer mit einem und demselben Punkte in dieser Linie bleibt. AA′ ist in diesem Falle die Leitlinie der beweglichen Curve ABC. Aendert man die Richtung der Parallelschnitte, so erhält man eine unendliche Menge anderer Erzeugungslinien zur Beschreibung der nämlichen cylindrischen Fläche.

Man kann diese Flächen übrigens auch als eine besondere Art conischer Flächen betrachten; als solche nämlich, deren Scheitel unendlich weit entfernt ist.

§. 74.

Im Vorbeigehen sei es bemerkt, daß, im Falle die Leitlinie des Kegels oder Cylinders eine Gerade wäre, die Fläche selbst eine Ebene werden würde. Man kann daher auch sagen, eine Ebene sei der Ort aller Lagen, welche eine Gerade annehmen kann, wenn sie sich 1) an einer festen Geraden hinbewegt und 2) beständig durch einen gegebenen Punkt geht, oder auch, beständig mit ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt.

§. 75.

Fig. 30. **Eine Umdrehungsfläche** wird durch irgend eine Curve GG′G″ erzeugt, welche sich so um eine feste Gerade DZ dreht, daß jeder ihrer Punkte G eine Kreislinie beschreibt, deren Ebene senkrecht auf der Axe DZ, und deren Halbmesser die kürzeste Entfernung GO dieses Punktes von der nämlichen Axe ist. Man bemerke, daß die verschiedenen Halbmesser GO, G′O′, G″O″, ob sie gleich alle senkrecht auf DZ stehen, doch nicht unter sich parallel sind, wenn die Erzeugende GG′G″ eine Curve von doppelter Krümmung ist; oder wenn sie zwar einfach gekrümmt ist, aber mit der Axe nicht in einerlei Ebene

liegt. Die verſchiedenen Kreiſe GMA, G′M′A′, ..., welche von den Halbmeſſern GO, G′O′, ... beſchrieben werden, heißen Parallelkreiſe der Fläche.

§. 76.

Legt man durch die Axe DZ beliebige Ebenen ZOA, ZOM, ſo erhält man die Schnitte AA′A″, MM′M″, welche Meridianlinien oder kurzweg Meridiane der Fläche genannt werden. Dieſe Meridianlinien ſind vollkommen congruent. Denn ſie ſchneiden die Parallelkreiſe unter den gleichen Winkeln AOM, A′O′M′ und A″O″M″; dreht man daher die Ebene ZOM um die Axe ZD, bis OM auf OA fällt, ſo wird zugleich auch O′M′ auf O′A′ und O″M″ auf O″A″ fallen, und die eine Meridianlinie wird alſo mit allen ihren Punkten auf die andere zu liegen kommen.

§. 77.

Hieraus folgt auch, daß die Meridianlinie AA′A″, wenn ſie um DZ gedreht wird, die ganze Umdrehungsfläche durchläuft und mithin als eine neue Erzeugungslinie an der Stelle der urſprünglichen GG′G″ betrachtet werden kann. Dieſe letztere wird von der Meridianlinie unterſchieden ſein, wenn ihre Punkte nicht alle in der nämlichen, durch die Axe DZ gehenden Ebene liegen, wie es wirklich in der Fig. 30. der Fall iſt, welche, als perſpektiviſch auf die Ebene ZOBB″A″A′ gezeichnet, angeſehen werden muß. Deßhalb ſind auch diejenigen Theile der Parallelkreiſe und der Curve GG′G″, welche hinter die Tafel fallen, punktirt angegeben worden.

Man kann übrigens, wenn man irgend eine Curve als Erzeugungslinie kennt, immer die dazu gehörige Meridianlinie conſtruiren, indem man nur die Punkte ſuchen darf, in welchen eine Ebene ZOB die verſchiedenen von den Punkten G, G′, G″ ꝛc. ꝛc. beſchriebenen Parallelkreiſe ſchneidet, worüber ſpäter (§. 148) ein Beiſpiel vorkommen wird.

§. 78.

Die Umdrehungsflächen, von welchen hier die Rede iſt, laſſen noch eine andere Art der Erzeugung zu, Fig. 30.
deren Kenntniß von Wichtigkeit iſt.

Da nämlich jede ſenkrecht durch die Axe DZ gelegte Ebene die Umdrehungsfläche in einem Kreis ſchneidet, deſſen Mittelpunkt in der Axe liegt, und der mit der Curve GG′G″ oder mit dem Meridian BB′ einen Punkt gemeinſchaftlich hat, ſo kann man alſo die Umdrehungsfläche betrachten, als den Ort der verſchiedenen Lagen, die ein beweglicher Kreis annimmt, der beſtändig ſenkrecht auf DZ bleibt, während ſein Mittelpunkt dieſe Gerade durchläuft und ſein Halbmeſſer ſich dergeſtalt ändert, daß der Kreisumfang beſtändig die Curve GG′G″ trifft. Die Linie GG′G″ dient in dieſem Falle als Leitlinie, an deren Stelle man auch die Meridianlinie BB′B″ ſetzen könnte; der bewegliche Kreis hingegen iſt eine, ihre Geſtalt und Lage ändernde, Erzeugungslinie. Dieſe Definition, welche ſich ſehr leicht in die Sprache der Analyſis überſetzen läßt,*) hat den Vortheil, daß ſie alle Umdrehungsflächen in ein und daſſelbe Geſchlecht vereinigt (§. 70), und zwar in dasjenige, welches nur Eine conſtante Erzeugungslinie zuläßt; dieſe Erzeugungslinie iſt hier der bewegliche und ſtets auf der Axe ſenkrechte Kreis, deſſen Weg durch die Meridianlinie bezeichnet wird, welche für jede beſondere Fläche ihre Geſtalt ändert.

§. 79.

Nimmt man zur Meridianlinie eine Gerade, eine Ellipſe, eine Hyperbel oder eine Parabel

*) Analytiſche Geometrie im Raume, 4. Kap.

durch die Umdrehung, beziehlich, einen **Kegel**, **Cylinder**, ein **Ellipsoid**, **Hyperboloid** oder **Paraboloid**; vorausgesetzt, daß die Umdrehungsaxe mit einem der Hauptdurchmesser der Curve zusammenfalle; im entgegengesetzten Falle erhält man zwar auch eine Umdrehungsfläche, aber von einer weit verwickelteren Art. Ein Kreis z. B., der sich um eine Gerade dreht, die zwar in seiner Ebene liegt, aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, erzeugt einen **Wulst** (tore), eine Art ringförmiger Fläche, wovon bald (§. 138) mehres vorkommen wird.

§. 80.

Die eben genannten Umdrehungsflächen, mit Ausnahme des letztern, sind aber nur besondere Fälle allgemeinerer nicht durch Umdrehung entstandener Flächen, welche in der Folge von Nutzen sein werden und deren Erzeugung man daher kennen lernen muß. Es sind die **Flächen vom zweiten Grad**, welche **fünf verschiedene Arten** bilden, unter welchen aber der Kegel, der Cylinder und die Ebene nicht mitbegriffen sind, da diese allzu einfach sind, als daß man sich bei ihnen aufhalten sollte.

§. 81.

Fig. 34. **Das Ellipsoid.** Es sei ACDF eine nach ihren halben Axen OA = a und OC = c construirte Ellipse: sie befinde sich in einer Vertikalebene, für welche man die Tafel annimmt, auf welcher die ganze Fläche perspectivisch dargestellt wird, so werden die punktirten Linien solche Theile der Curven bezeichnen, welche hinter der Ebene jener Ellipse sich befinden. Diese Annahme gilt für das ganze Kapitel. Man construire nun in einer auf OC senkrechten Ebene eine andere Ellipse A′B′D′, welche die Ordinate O′A′ = a′ der ersten Ellipse zur einen, und eine auf O′A′ senkrechte Gerade O′B′ = b′ von beliebiger Größe zur andern halben Axe habe, und lasse hierauf die Curve A′B′D′ sich dergestalt bewegen, daß die Axen ihrer ursprünglichen Lage parallel und in dem anfänglichen Verhältniß $\frac{a'}{b'}$ zu einander bleiben, während die erste von ihnen nach und nach mit den Sehnen D′A′, D″A″, DA, ... der festen Ellipse CAF zusammenfällt; so ist der auf diese Art erzeugte geometrische Ort diejenige Fläche, welche man das **Ellipsoid** nennt. In dem Augenblicke, da die bewegliche Ellipse durch den Mittelpunkt O geht, erreicht sie das Maximum ihrer Größe; die veränderliche halbe Axe a′ wird alsdann zur größten Ordinate OA = a, und bezeichnet OB = b für eben diesen Augenblick die Länge der zweiten Axe b, so heißen die drei Linien

$$AD = 2a,\ BE = 2b,\ CF = 2c$$

die **Axen** oder **Hauptdurchmesser** des Ellipsoids. Hiebei ist noch zu bemerken, daß diese Fläche auf allen Seiten geschlossen ist.*)

§. 82.

Wenn die erzeugende Ellipse A′B′D′ ein Kreis, d. h. wenn O′B′ = O′A′ ist, so erhält man, wie in §. 78, ein durch Umdrehung erzeugtes Ellipsoid, dessen Meridianlinie die Leitcurve CAF ist, und von dessen Hauptdurchmessern zwei, nämlich OA und OB, einander gleich sind.

In dem Falle endlich, da die drei Axen OA, OB und OC gleich lang sind, geht das Ellipsoid in eine Kugel über.

---

*) Drückt man diese Erzeugungsart analytisch aus, so erhält man für die Mittelpunkts-Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

S. Analyt. Geom. im Raume, 9. Kap.

§. 83.

Das Hyperboloid mit einem Mantel (à une nappe).

Man ſetze an die Stelle der Leitellipſe eine Hyperbel A′A″A, deren reelle halbe Axe OA = a und die Fig. 35.
naginäre OC = c iſt; hierauf conſtruire man in einer auf OC ſenkrechten Ebene wieder eine Ellipſe, deren eine
xe A′D′ zugleich eine Sehne der Hyperbel ſei: ſo wird dieſe Ellipſe, wenn ſie ſich nach demſelben Geſetz, wie
orhin, bewegt, ein Hyperboloid mit einem Mantel erzeugen, der von unbeſtimmter Größe ſein wird, wie
ie Leithyperbel ſelbſt. In dem Augenblicke, da die bewegliche Ellipſe durch den Mittelpunkt O geht, erreicht ſie
as Minimum ihrer Größe, weil die veränderliche Axe D′A′ in eben dieſem Augenblicke der kleinſten Sehne DA
er Hyperbel gleich wird. Deßhalb heißt auch die Curve ABDE die Verengung (l'ellipse de gorge). Die
rei Geraden AD = 2a, BE = 2b, CF = 2c ſind die drei Axen des Hyperboloids: und weil die letztere
F der Fläche nirgends begegnet, ſo heißt ſie die imaginäre Axe, obgleich die reelle Größe 2c eigentlich nur
er Coefficient des imaginären Ausdrucks iſt, den man durch die Analyſis erhält, wenn man diejenigen Punkte
er Fläche ſucht, welche in der unbeſtimmten Geraden OCO′ liegen.*)

§. 84.

Wenn die beiden reellen Axen OA und OB gleich ſind, ſo iſt die erzeugende Ellipſe A′B′D′ ein Kreis
nd das Hyperboloid iſt ein ſolches, wie man es durch Umdrehung der Hyperbel A′A″A um ihre imaginäre
xe OCO′ erhalten hätte.

§. 85.

Das Hyperboloid mit zwei Mänteln.

Man conſtruire noch eine Hyperbel, nach den beiden gegebenen halben Axen OA = a und OC = c, aber Fig. 36.
, daß OC die reelle Axe werde; hierauf laſſe man die Ellipſe A′B′D′ ſich auf die nämliche Art, wie vorhin,
ewegen, ſo wird eine andere Art von Hyperboloid entſtehen, das zwei Mäntel von unbeſtimmter Größe hat,
elche durch einen Zwiſchenraum von einander geſchieden ſind, innerhalb deſſen kein Punkt der Fläche ſich befindet.

Zwiſchen den beiden Punkten C und F nämlich wird die veränderliche Sehne A′D′, welche zugleich eine
xe der beweglichen Ellipſe iſt, imaginär, und eben ſo auch die zweite Axe O′B′, welche mit der erſtern ein
onſtantes Verhältniß behalten ſoll. Die Erzeugungsellipſe iſt alſo innerhalb des Zwiſchenraumes CF völlig ima-
inär und gibt keinen reellen Punkt der Fläche. Da man jedoch weiß, daß für den Punkt O die halbe Axe
′A′ = OA$\sqrt{-1}$ wird, ſo muß man, um den reellen Coefficienten der andern Axe, welche ebenfalls imaginär
t, zu finden, eine Senkrechte OB auf die Ebene AOC errichten, von ſolcher Länge, daß

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB\sqrt{-1}}{OA\sqrt{-1}} = \frac{OB}{OA};$$

lsdann ſind AD = 2a, BE = 2OB = 2b, die ſogenannten imaginären Axen des Hyperboloids mit zwei
Mänteln, während CF = 2c die reelle Axe iſt.**)

---

*) Die Mittelpunktsgleichung des Hyperboloids mit einem Mantel iſt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**) Die Mittelpunktsgleichung des Hyperboloids mit zwei Mänteln iſt $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1$, wenn man die reelle Axe für die Axe der x nimmt.

§. 86.

Damit das Hyperboloid ein solches werde, wie man es durch Umdrehung der beiden Aeste CA″A′ und FA‴ der Hyperbel um ihre reelle Axe COF erhalten würde, müssen die beiden imaginären Axen OA und OB gleich sein, weil in diesem Falle auch O′A′ = O′B′, und mithin die erzeugende Ellipse ein Kreis ist.

§. 87.

Das elliptische Paraboloid.

Fig. 37. Man nehme als unveränderliche Leitlinie eine Parabel D″OA″ und als veränderliche Erzeugungslinie die Ellipse A′B′D′, welche senkrecht auf der Axe OX der Parabel steht, und deren erste Axe O′A′ = a′ eine veränderliche Ordinate der Parabel und die zweite O′B′ = b′ eine Gerade von beliebiger Größe sei, die aber zur ersten ein unveränderliches Verhältniß behalte. Bewegt sich nun die Erzeugungsellipse in der Richtung der Axe OX, während sie stets senkrecht auf letzterer bleibt, so erzeugt sie eine Fläche von unbestimmter Größe, welche ein elliptisches Paraboloid genannt wird, weil alle ebenen Schnitte, die man durch dieselbe machen kann, entweder eine Parabel oder eine Ellipse geben. *)

§. 88.

Sind die beiden Axen der Erzeugungsellipse gleich, so erhält man eine Umdrehungsfläche (§. 78), welche durch die Umdrehung der Parabel OA′A″ um die Axe OX erzeugt werden könnte.

§. 89.

Das hyperbolische Paraboloid.

Fig. 38. Man behalte die Parabel D″OA als Leitlinie bei; statt der erzeugenden Ellipse aber, der man sich bisher bedient hat, nehme man eine Hyperbel D′H′, A′G′, welche in einer auf OX senkrechten Ebene construirt ist und die Linien O′A′ und O′B′ zu halben Axen hat. Das Verhältniß dieser beiden Axen zu einander bleibe dasselbe, während die reelle Axe O′A′ nach und nach den Ordinaten O′A′, O″A″, ... der unveränderlichen Parabel gleich wird. Bewegt sich nun die erzeugende Hyperbel so fort, daß sie stets ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so wird sie zwei offene Flächen erzeugen, welche durch den innern leeren cylindrischen Raum D″OA″ von einander geschieden sind und welche sich, der Richtung O′X nach, immer weiter ausdehnen werden, wie die Parabel selbst: in der Richtung von O′ gegen V hingegen nimmt die reelle Axe O′A′ immer mehr ab und wird endlich Null in dem Punkt O; mithin werden die eben genannten Flächen sich in diesem Punkte vereinigen und die Hyperbel wird, in dieser Lage, in zwei unbestimmte Gerade KOK und LOI übergehen, welche beide ganz in der erzeugten Fläche liegen und den Asymptoten aller vorhergehenden Hyperbeln parallel sein werden.

Gleich über dem Punkt O wird die Hyperbel wieder zum Vorschein kommen, aber in einer, rücksichtlich ihrer Asymptoten, verkehrten Lage, wie z. B. in dem Punkt O‴ in der Lage H‴B‴G‴.

Die Axen nämlich, welche in der Figur durch O′A′ und O′B′ dargestellt wurden, sind, analytisch ausgedrückt:

$$a' = O'A' \text{ und } b' = O'B'\sqrt{-1}.$$

---

*) Die Scheitelgleichung dieses Paraboloids in Beziehung auf OX, als die Axe der x ist

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p^1} = x$$

nun in O''' die Ordinate O'''A''' der Parabel imaginär ist, so erhält man also, wenn die Hyperbel in die ne A'''O'''B''' gekommen ist, für ihre erste Axe den Ausdruck

$$a''' = O'''A'''.\ V-1;$$

muß also der Ausdruck für die zweite Axe, welche mit der ersten in dem Verhältniß $\frac{b'}{a'}$ stehen soll, die Form

$$b''' = a'''.\frac{b'}{a'} = O'''A'''.\frac{O'B'}{O'A'}$$

ehmen. Dieser Ausdruck ist aber eine reelle Größe und in der Figur durch O'''B''' dargestellt.

Daraus geht hervor, daß, oberhalb des Punktes O', die senkrecht auf der Ebene A'OD' stehenden Axen reellen Axen der erzeugenden Hyperbel seien, und daß durch die beiden Aeste dieser Curve abermals zwei hen erzeugt werden, von denen die eine vor, die andere hinter der Ebene A'OD' liegt. Diese beiden Flä- aber, schließen sich durch die Geraden KOK und LOI an die beiden vorhergehenden an, und bilden daher letzteren eine einzige nicht unterbrochene Fläche von zwei entgegengesetzten Krümmungen. Den Namen yperbolisches Paraboloid hat diese Fläche daher, weil durch die Analysis bewiesen wird, daß alle ebenen nitte, welche durch sie gemacht werden können, entweder Parabeln oder Hyperbeln sind, diejenigen besondern le ausgenommen, in denen der Schnitt eine einzige Gerade oder auch zwei sich schneidende Geraden gibt. *)

§. 90.

Es muß hier bemerkt werden, daß das hyperbolische Paraboloid nie durch Umdrehung erzeugt werden nte; denn nach Dem, was eben über die Natur seiner ebenen Schnitte gesagt wurde, gibt keiner eine ge- offene Curve und kann also nicht kreisförmig sein.

§. 91.

Die im §. 89 angegebene Erzeugungsart des hyperbolischen Paraboloids erleidet zwar eine Art graphischer erbrechung, weil oberhalb des Punktes O die Parabel, welche zur Leitlinie dient, imaginär wird; da aber ch die Analysis diese Schwierigkeit gehoben wird, so hat man hier jene Erzeugungsart beibehalten, weil sie der der vorhergehenden Fläche analog ist, und weil sie die den beiden Paraboloiden beigelegten Benennungen tfertigt und auch das Dasein der beiden in dem zweiten Paraboloid gelegenen Geraden deutlich zeigt. Dessen eachtet soll jetzt noch eine andere ununterbrochene und beiden Paraboloiden gemeinschaftliche Erzeugungsart eführt werden.

Man construire in zweien senkrecht auf einander stehenden Ebenen zwei Parabeln A'''OD''' und B'''OE''', che einerlei Scheitel, einerlei Axe OX und beliebige Parameter haben, und welche nach derselben Seite hin l sind; hierauf lasse man die eine dieser Parabeln so an der andern hingleiten, daß sie, ohne ihre Gestalt zu ern, ihrer ursprünglichen Lage parallel und mit ihrem Scheitel stets in der unbeweglichen Parabel bleibe, so lt man das elliptische Paraboloid.

Man construire wieder zwei Parabeln A''OD'' und B'''OE''' unter denselben Bedingungen, wie vorhin, Fig. 38.

*) Um die Figur 38 besser zu verstehen, erinnere man sich, daß dieselbe, einer früheren Voraussetzung gemäß, auf der Vertikal-ebene D''OA'', als auf einer perspectivischen Tafel, verzeichnet ist; alle punktirten Linien sind daher hinter dieser Ebene. Da es jedoch ziemlich schwer ist, durch eine perspectivische Zeichnung ein klares Bild von diesem Paraboloid zu geben, so dürfte man wohl daran thun, ein wirkliches Model zu Hilfe zu nehmen, das man leicht vermittels geradlinig und nach einem ge-wissen Gesetz ausgespannter Fäden construiren kann; s. die §§. 543, 554 und Fig. 120. Die auf den Scheitel O, als An-fangspunkt der Ordinaten, und auf die Axe OX bezogene Gleichung des hyperbolischen Paraboloids ist

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p^1} = x$$

nur mit dem Unterſchiede, daß ſie nach entgegengeſetzter Richtung hohl ſeien; hierauf laſſe man die A″OD″ ſo auf der andern als unbeweglich angenommenen Parabel hingleiten, daß ſie, ohne ihre Geſtalt zu ändern, ſich ſelbſt parallel bleibe und mit ihrem Scheitel die andere Parabel durchlaufe; ſo erhält man das hyperboliſche Paraboloid.*)

§. 92.

Um die Erklärung der am häufigſten vorkommenden geometriſchen Oerter zu vervollſtändigen, müßte jetzt noch von den entwickelbaren Flächen (surfaces développables) und von den windſchiefen Flächen die Rede ſein. Aber außerdem, daß die charakteriſtiſchen Eigenſchaften dieſer beiden Arten von Flächen nicht klar aufgefaßt werden können, ehe man einen Begriff von Berührungsebenen hat, wird es überhaupt beſſer ſein, dem Leſer Zeit zu laſſen, ſich mit den bis jetzt angeführten Beiſpielen recht vertraut zu machen; eine beſondere Betrachtung jener merkwürdigen Flächenarten wird erſt ſpäter folgen.

§. 93.

Nun erſt kann die im §. 69 gegebene Aufgabe, eine Fläche graphiſch darzuſtellen, gelöst werden. Da nämlich nach der im §. 70 gegebenen allgemeinen Erklärung eine ſolche Fläche immer durch die Bewegung einer gewiſſen Linie erzeugt wird, ſo darf man nur, um den angegebenen Zweck zu erreichen, auf den Projectionsebenen die verſchiedenen Lagen der Erzeugungslinie in ziemlicher Anzahl und nahe bei einander conſtruiren, um durch ein ſolches Syſtem von Curven den Augen ein Bild zu geben von der Stetigkeit, Krümmung und Ausbreitung der erzeugten Fläche.

Hiebei muß man unter den verſchiedenen Curven, durch welche eine beſtimmte Fläche erzeugt werden kann, immer die einfachſte und regelmäßigſte wählen; manchmal auch wendet man, um ein recht deutliches Bild zu erhalten, zwei Syſteme von Erzeugungslinien zugleich an, wie z. B. Meridianlinien und Parallelkreiſe bei Umdrehungsflächen. Bei der perſpectiviſchen Darſtellung der verſchiedenen Flächen, von welchen bisher die Rede war, wurden wirklich ſolche Mittel angewendet.

§. 94.

Außerdem iſt es auch von großem Nutzen, die Spuren einer Fläche, d. h. ihre Durchſchnitte mit den Grundebenen, ſo wie die Umriſſe anzugeben, inner- oder außerhalb derer ſich die Projectionen aller Punkte der Fläche befinden, wenn anders ſolche Grenzen wirklich exiſtiren; denn dieſe Umriſſe zeigen oft ſehr deutlich die Geſtalt der Gegenſtände an. Damit man ſie aber genau beſtimmen lerne, muß erſt noch von den Berührungsebenen geſprochen werden.

Im Ganzen bemerke man, daß, wenn die Geſtalt der Fläche, welche gezeichnet werden ſolle, zum Voraus bekannt iſt, man ſich, zur Vereinfachung der Zeichnung, immer auf einige von den hier im Detail angegebenen Mitteln beſchränken könne.

*) S. Analyt. Geom. im Raum, 8. Kap.

Zweites Kapitel.

Von den Berührungsebenen überhaupt.

§. 95.

Unter der Berührungsebene an einer krummen Fläche in einem gegebenen Punkt versteht man die-
ige Ebene, welche die Tangenten aller der Curven enthält, die man in derselben Fläche durch
n gegebenen Punkt ziehen kann.

Hier muß nun zuerst bewiesen werden, daß es für jeden Punkt einer krummen Fläche eine Ebene von der
vähnten Eigenschaft gibt; denn es ist nicht a priori klar, warum die durch einen solchen Punkt gezogenen
ngenten nicht eher eine Kegelfläche bilden, wie solches für gewisse besondere Punkte wirklich der Fall ist.
aher folgender

Lehrsatz. Wenn man durch einen gegebenen Punkt einer krummen Fläche drei beliebige
urven in dieser Fläche zieht, so liegen die drei Tangenten, welche man durch eben jenen
unkt beziehlich an die drei Curven ziehen kann, in einer und derselben Ebene.

Beweis. Es sei GMg die Gestalt und Lage der Erzeugungslinie, in dem Augenblicke, da sie durch den Fig. 31.
gebenen Punkt M geht; ferner sei DMd eine auf der krummen Fläche gezogene Curve, auf welcher die Er-
ugungslinie hingleiten muß, indem sie die Fläche erzeugt: endlich sei MX eine dritte, beliebige, aber ebenfalls
der krummen Fläche liegende Curve. Kommt nun die Erzeugende bei ihrer Fortbewegung in die Lage G′M′g′,
wird sie unfehlbar auch die Curve MX in einem gewissen Punkt P′ treffen, wenn nur der Punkt M′ nahe
mug bei dem Punkte M auf der Leitlinie DMd genommen wurde. Verbindet man daher die Punkte M, M′, P′
rch gerade Linien von unbestimmter Länge, so werden diese, in Bezug auf die drei Curven MD, MX, G′g,
ekanten sein; auch werden sie alle drei in einer und derselben Ebene liegen. Bewegt sich nun die Erzeugungs-
ie G′g′ an der Leitlinie MD wieder gegen ihre vorige Lage Gg zurück und dreht sich die Ebene der drei
ekanten so um den Punkt M, daß sie immer zu gleicher Zeit mit der Erzeugungslinie durch die Punkte M″ und
″, M‴ und P‴, ... geht, in welchen letztere nach und nach die Curven MD und MX schneidet, so wird
e um M bewegliche Ebene beständig die drei veränderlichen Sekanten enthalten. Ist nun
dlich die Erzeugungslinie wieder in ihre anfängliche Lage GMg gekommen, so fällt der bewegliche Punkt M′
it M zusammen: in demselben Augenblicke aber wird auch der Punkt P′ der Curve MX mit M zusammenfallen;
daß also nun die beiden Punkte P′ und M′ in der veränderlichen Curve G′g′ vereinigt sind. Die drei verän-
rlichen Sekanten sind also nun Tangenten geworden an den Curven MD, MX, MG; und da eben jene drei
ekanten, für jede Lage der Erzeugenden, in einer und derselben Ebene blieben, so müssen sie also auch jetzt noch,
s sie zu den Tangenten MT, M″T′, M‴T″ geworden sind, sich in einer einzigen Ebene befinden, welche nichts
ndres ist, als die Grenze derjenigen Lagen, in welche die bewegliche Ebene der veränderlichen Sekanten nach
nd nach gekommen ist. Da nun die Curve MX ihrer Lage nach ganz willkührlich genommen wurde, so folgt,
ß die durch die Tangenten der Curven MG und MD gelegte Ebene, die Tangente jeder andern durch M ge-
genen Curve enthalten müsse; diese Ebene ist also, der im Anfang dieses Paragraphen gegebenen Definition
folge, eine Berührungsebene an der krummen Fläche im Punkte M. *)

*) Die Aufstellung dieses Lehrsatzes schien deßhalb unumgänglich nothwendig, um später die kurzgefaßten und so nützlichen Betrachtungen des §. 158 aus der Methode des unendlich Kleinen entlehnen zu können. Denn nur nachdem man streng bewiesen hat, daß alle an einen und denselben Punkt einer krummen Fläche gezogenen Tangenten sich in einer einzigen Ebene befinden,

§. 96.

Wenn eine Fläche aus zwei oder mehreren Mänteln besteht, welche sich schneiden, wie es z. B. bei einer Kegelfläche vorkommt, deren Leitcurve eine Knotenlinie ist; so scheinen allerdings die Punkte des Durchschnitts dieser Mäntel im Allgemeinen keine Berührungsebenen zuzulassen; betrachtet man aber die beiden Mäntel als zwei von einander unabhängige Flächen, welche sich schneiden, so können durch jeden Punkt ihres Durchschnitts zwei Berührungsebenen gelegt werden, von denen die eine ganz allein der ersten und die zweite ganz allein der zweiten Fläche zugehört. Man sieht also, daß dieser besondere Fall keine Ausnahme macht.

§. 97.

Jedoch ergeben sich manchmal wirkliche Ausnahmen; so daß nämlich für gewisse *besondere* Punkte einer krummen Fläche keine Berührungsebenen möglich sind. Dieses sind solche Punkte, für welche die Erzeugungs- oder die Leitlinie zu einem einzigen Punkte wird. Ein solcher Punkt ist z. B. die Spitze einer Kegelfläche. Denn alle die verschiedenen Seitenlinien, welche sich daselbst schneiden, sind Gerade, welche sämmtlich in der krummen Fläche liegen und welche sich selbst zu Tangenten haben; von diesen Tangenten aber befinden sich jede zwei in einer besondern Ebene. Die Spitze eines Kegels ist daher ein besonderer Punkt der Kegelfläche, für welchen es keine Berührungsebene gibt. Stellt man sich auch wirklich die Kegelfläche dadurch entstanden vor, daß (wie in §. 72) die Erzeugungslinie sich selbst parallel an einer Seitenkante, als der Leitlinie, gegen die Spitze zu hingleitet, während die Leitstrahlen (§. 72) immer dasselbe Verhältniß unter sich behalten, so ist klar, daß die Erzeugende sich immer mehr und mehr verengt, bis sie endlich, in der Spitze angekommen, zu einem Punkte wird, für welchen es in der That keine Tangente mehr gibt und auf welchen also die allgemeine Erklärung des §. 95 keine Anwendung findet.

Auf eine ähnliche Art erklärt sich die Ausnahme für diesen besondern Punkt, wenn man von der im §. 71 gegebenen Entstehungsart des Kegels ausgeht. Denn in diesem Falle ist eine der Leitlinien, an welchen die bewegliche und gerade Erzeugungslinie hingleitet, ein einziger Punkt, nämlich die *Spitze* des Kegels, für welchen keine Tangente möglich ist.

---

ist es erlaubt, die krumme Fläche als aus *ebenen Flächenelementen* zusammengesetzt anzusehen, weil letztere sodann aus *Linienelementen* bestehen, welche den Curven auf der Fläche und ihren Tangenten gemeinschaftlich sind.

Was den Beweis dieses Lehrsatzes betrifft, so hat man den Einwurf gemacht, das die Gerade M′ P′ in Beziehung auf die Curve G′ g′ allerdings eine Sekante sei, deren zwei Durchschnittspunkte sich in M vereinigt haben, daß aber inzwischen die Linie G′ g′ ihrer Form nach nicht unverändert geblieben sei, welche Bedingung doch gewöhnlich angenommen werde, wenn man die Tangente als eine Grenze der Sekante definire. Hierauf diene zur Antwort, daß man in der ebenen Geometrie diese Fortdauer der Gestalt nur stillschweigend annimmt, weil man sich daselbst nur mit solchen Curven beschäftigt, die als unveränderlich gegeben sind; denkt man sich nun aber in einer Ebene einen Kreis beschrieben, der eine Gerade schneidet, und läßt man den Radius desselben so lange an Größe abnehmen, bis die beiden Durchschnittspunkte in Einen zusammenfallen, so ist alsdann ohne allen Zweifel der veränderliche Kreis zu einer Tangente an der Geraden geworden. Die Fortdauer der Gestalt ist also durchaus nicht nothwendig, und wollte man sie schlechterdings fordern, so würde man dadurch den allgemeinen Charakter der Tangente an einer Curve ohne Grund beschränken. Diese ist somit die Grenze der Lagen, welche eine Sekante annimmt, deren Durchschnittspunkte sich fort und fort einander nähern; vorausgesetzt, daß diese Punkte auf demselben Zweig der Curve liegen, und daß letztere ihre Gestalt und Lage nur nach einem stetigen Gesetze ändere; dieses aber geschieht wirklich in Beziehung auf die Curve G′ g′, weil die krumme Fläche selbst als stetig vorausgesetzt wird.

Endlich ist noch beizufügen, das man selbst irgend zwei Curven gegenseitig als Tangenten an einander betrachten kann, wenn sie, nachdem sie sich vorher geschnitten, ihre Gestalt oder Lage so nach einem stetigen Gesetze geändert haben, daß ihre Durchschnittspunkte zusammengefallen sind; denn es ist klar, daß diese beiden Curven nun eine *gemeinschaftliche Tangente* erhalten haben, welche die Grenze aller Lagen derjenigen veränderlichen Geraden ist, welche durch die beiden Durchschnittspunkte der sich schneidenden Curven geht.

Ein ähnlicher Umstand zeigt sich bei denjenigen Umdrehungsflächen, deren Meridianlinie die Axe unter einem Winkel schneidet, der ein stumpfer, ein spitzer oder auch Null ist: für einen solchen, in der Umdrehungsaxe gelegenen Punkt einer krummen Fläche gibt es keine Berührungsebene; im Gegentheil bilden die Tangenten, welche in den verschiedenen Lagen der Meridianlinie an diesen Punkt gezogen werden, den Mantel eines senkrechten Kegels. Dieser Fall ereignet sich unter anderm, wenn sich ein Kreis um eine seiner Sehnen (welche nicht der Durchmesser ist) dreht.

§. 98.

Man muß hier wohl bemerken, daß die im §. 95 gegebene Definition der Berührungsebene durchaus nicht fordert, daß eine solche Ebene nur einen einzigen Punkt mit der ganzen krummen Fläche gemein habe. Dieses ist zwar bei ganz converen Flächen der Fall; aber bei andern Flächen kann die Berührungsebene eines Punktes der krummen Fläche in verschiedenen Punkten begegnen, ja sie kann dieselbe sogar in einer Curve schneiden, welche durch den Berührungspunkt geht, wie solches z. B. beim Wulst (§. 138) und bei windschiefen Flächen der Fall ist. Dieser Umstand aber verhindert nicht, daß die Berührungsebene die Tangenten aller der Curven enthalte, welche man auf der krummen Fläche durch den Berührungspunkt ziehen kann, und sie berührt also die Fläche wirklich in diesem Punkte, während sie dieselbe in andern Punkten schneidet.

§. 99.

Gleichwohl gibt es gewisse Arten von krummen Flächen, wo die Berührungsebene eines Punktes die krumme Fläche zugleich nach der ganzen Länge einer Geraden berührt. Man betrachte z. B. den Cylinder ABC mit beliebiger Grundlinie. Legt man hier durch die Erzeugende AB und durch die an die Grundlinie gezogene Tangente BT eine Ebene, so wird diese nicht nur die Tangenten aller der Curven enthalten, welche man in der krummen Fläche durch den Punkt B ziehen kann (was schon aus dem in §. 95 bewiesenen Lehrsatz erhellt), sondern auch noch die Tangenten aller andern Curven, welche man auf der krummen Fläche durch die verschiedenen Punkte der Erzeugenden AB ziehen kann. Fig. 32.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, darf nur bewiesen werden, daß die Tangente MV, welche man an irgend eine Curve MX in ihrem Durchschnittspunkt mit AB gezogen hat, in die Ebene ABT falle. Man lege daher durch AB und einem in der Nähe von B gelegenen Punkt D eine Ebene ABR, so wird solche die Cylinderfläche in einer mit AB parallen Geraden DE, und die Curve MX in einem auf DE gelegenen Punkt G schneiden; so daß also die beiden Sekanten BDR und MGS in jener schneidenden Ebene enthalten sein werden. Nun drehe man diese so um AB, daß der Punkt D sich dem Punkt B nähere, so werden die Durchschnittspunkte D und G zwar ihre Lage auf den Curven MX und CDB ändern, aber sie werden immer zugleich in Einer beweglichen und mit AB beständig parallen Geraden bleiben; so daß also, wenn der eine D dieser Punkte mit B zusammenfällt, zu gleicher Zeit auch der andere G mit M zusammenfallen wird. Ist also die bewegliche Ebene in die Lage ABT gekommen, so ist die veränderliche Sekante MGS, welche immer in dieser Ebene blieb, zu einer Tangente MV geworden. Es befindet sich also diese Tangente wirklich in der Ebene ABT. Hieraus aber folgt, daß eine Ebene, welche eine Cylinderfläche in irgend einem Punkt berührt, nothwendigerweise auch die ganze Fläche nach der Länge derjenigen geraden Erzeugungslinie, welche durch den Berührungspunkt geht, berühren müsse.

§. 100.

Auch bei conischen Flächen hat die Berührungsebene dieselbe Eigenschaft, und diese läßt sich auf eine ähnliche Art erweisen, indem man zeigt, daß die beiden Durchschnittspunkte D und G beständig in derselben veränderlichen

Geraden bleiben, welche aber hier, statt mit AB prallel zu sein, letztere in der Spitze des Kegels schneidet. Später endlich wird man sehen, daß die nämliche Eigenschaft auch bei einer gewissen Classe von Flächen stattfindet, welche man entwickelbare Flächen nennt, und von welchen die Cylinder- und Kegelflächen nur besondere Arten sind.

§. 101.

Man würde sich jedoch sehr irren, wenn man glauben wollte, daß eine solche Art der Berührung, wo die Berührungsebene die krumme Fläche nach der Länge einer Geraden berührt, jedesmal stattfinde, so oft die krumme Fläche eine Gerade zur Erzeugenden habe; denn man wird in Bälde Flächen kennen lernen (man nennt sie windschiefe), welche zwar von einer Geraden erzeugt werden, bei welchen aber gleichwohl die Berührungsebene nur für einen einzigen Punkt den Bedingungen einer wahren Berührung entspricht, obgleich sie eine Gerade mit der krummen Fläche gemein hat (§. 142, 154).

§. 102.

Fig. 32. Aus dem im §. 99 bewiesenen Lehrsatze ergibt sich eine wichtige Folgerung, von welcher später noch oft Gebrauch gemacht werden wird, nämlich: wenn eine Curve MX und ihre Tangente MV auf eine Ebene projicirt werden, so ist von den beiden Projectionen dieser Linie widerum die eine die Tangente der andern. Um z. B. die Curve MX zu projiciren, muß man sich einen Cylinder MBCX vorstellen (§. 4), der durch diese Curve geht, und senkrecht auf der gegebenen Projectionsebene steht. Dieser Cylinder wird alsdann die Projectionsebene in einer Curve BC schneiden, welche die Projection von MX ist. Um nun ferner die Gerade MV zu projiciren muß man eine Ebene VMB durch MV legen, welche, da sie den Cylinder in M berührt, denselben auch in B berühren muß (§. 99). Sie wird folglich auch die Tangente BT an der Grundlinie BC enthalten; diese Tangente ist also der Durchschnitt der projicirenden Ebene mit der Grundebene, d. h. die Projection von MV.

Die nämliche Folgerung gilt auch dann noch, wenn die Curve sowohl als auch ihre Tangente durch schiefe Linien auf die Grundebene projicirt werden, vorausgesetzt, daß diese Linien immer parallel unter sich sind.

§. 103.

Faßt man alles zusammen, was bis jetzt über die Berührungsebenen gesagt wurde, so geht daraus hervor, daß man, um eine Ebene zu construiren, welche irgend eine Fläche in einem gegebenen Punkt berühre, für's Erste zwei Curven von möglichst einfacher Gestalt in der Ebene durch den gegebenen Punkt ziehen und hierauf die Tangenten dieser Curven an ebendemselben Punkte suchen müsse; alsdann wird die durch diese beiden Tangenten gelegte Ebene (§. 22), die gesuchte Berührungsebene sein. Verschiedene Beispiele solcher Constructionen werden in Bälde vorkommen.

Wenn durch den gegebenen Punkt eine Gerade geht, welche ganz in der krummen Fläche liegt, so ist diese Gerade zugleich ihre eigene Tangente und muß, als solche, ganz in der Berührungsebene liegen; doch darf man nicht immer hieraus schließen, daß die Berührungsebene die krumme Fläche nach der ganzen Länge dieser Geraden berühren werde (§. 101).

§. 104.

Die Normale einer Fläche ist eine auf der Berührungsebene senkrechte Gerade, welche durch den Berührungspunkt geht. Diese Normale kann also leicht construirt werden (§. 33), nachdem man einmal die Spuren der Ebene bestimmt hat, welche die Fläche in dem gegebenen Punkte berühren soll.

§. 105.

Es ist hier am geeigneten Orte, eine allgemeine Regel für die Darstellung des sichtbaren Umrisses eines Körpers zu geben. Unter dem sichtbaren Umriß (contour apparent) eines Körpers aber versteht man diejenige Linie auf seiner Oberfläche, welche die für das Auge des Beobachters sichtbaren Theile von den unsichtbaren scheidet.

Es sei O die Lage des beobachtenden Auges, und man denke sich durch diesen Punkt alle an den gegebenen Körper möglichen Berührungsebenen gelegt; so werden solche die Körperoberfläche in den Punkten A, B, C . . . . berühren. Diese Punkte aber bilden eine Curve, in welcher alle diejenigen Punkte enthalten sind, in welchen die von O aus gezogenen Sehstrahlen die Oberfläche des Körpers berühren; mithin bestimmt die Curve ABCD die Grenze desjenigen Theiles vom Körper, den das in O befindliche Auge wahrnehmen kann. Dieser sichtbare Umriß aber verändert seine Gestalt und Lage, so bald der Augpunkt sich verändert. Setzt man diesen z. B. in O′, so wird A′B′C′D′ der Umriß sein. Es muß daher für jeden Fall die Lage des Augpunktes gegeben, und hieraus der Umriß bestimmt werden. Graphische Operationen dieser Art aber gehören in die Perspective und würden hier die Figuren unnöthigerweise verwickelt machen; hält man dagegen die in §. 16 aufgestellte Annahme fest, nach welcher, für jede Horizontalprojection, der Augpunkt in unendlicher Entfernung und zwar in einer Vertikalen OO′ angenommen wird, welche durch irgend einen Punkt des Gegenstandes geht, so werden alle die Berührungsebenen, aus deren Berührungspunkten mit der Oberfläche die Curve ABC . . . sich ergibt, vertikal auf der Horizontalebene stehen, und ihre Construction wird leichter und in den meisten Fällen auf eine sehr einfache Art ausgeführt werden können, wie die folgenden Figuren es zeigen. Fig. 3

§. 106.

Es folgt hieraus, daß der sichtbare Umriß einer auf die Horizontalebene projicirten Fläche erhalten wird, wenn man ihre Berührungspunkte mit allen den Berührungsebenen sucht, welche vertikal auf der Horizontalebene stehen.

Was die vertikale Projection der nämlichen Fläche betrifft, so hat sie ihren besondern Augpunkt, der in unendlicher Entfernung in einer auf der Vertikalebene Senkrechten liegt (§. 16). Hieraus folgt, daß ihr Umriß in Beziehung auf diese Projection ein anderer sein müsse, als in Beziehung auf die Horizontalebene; und man erhält ihn, wenn man die Berührungspunkte der Fläche mit allen denjenigen Berührungsebenen sucht, welche senkrecht auf der Vertikalebene stehen.

§. 107.

Nun können auch die Regeln ergänzt werden, welche in den §§. 15 und 16 für die Zeichnung und Punktirung der Hauptlinien aufgestellt wurden. Denn aus dem Vorhergehenden folgt, daß diejenigen Linien oder Theile von Linien, welche auf irgend einer beliebigen Fläche sich oberhalb des auf die Horizontalprojection bezogenen Umrisses befinden, die einzigen sichtbaren auf dieser Projection sein werden; und daß ebenso in Beziehung auf die Vertikalebene nur diejenigen Linien sichtbar sind, welche sich vor dem auf diese Ebene bezogenen Umrisse befinden. Dabei aber darf man nicht vergessen, daß eine und dieselbe Linie sichtbar sein kann in der einen Projection und unsichtbar in der andern, weil für jeden dieser Fälle der Gesichtspunkt wieder ein anderer ist: so daß man also wohl zu unterscheiden hat, welche der beiden für die Hauptlinien angegebenen Darstellungsarten man in jeder der Grundebenen anzuwenden habe, wobei jedoch zu bemerken ist, daß diese Unterscheidungen nicht auch auf Hilfslinien ausgedehnt werden dürfen (§. 15 Nr. 2).

§. 108.

Außerdem wird in den folgenden Figuren, so oft irgend eine unbestimmte, berührende oder schneidende Ebene vorkömmt, solche immer als nicht wirklich vorhanden betrachtet, sondern angenommen werden, man habe nur ihre Spuren geben oder suchen wollen; denn sonst würde eine solche Ebene fast immer einen großen Theil oder das Ganze der darzustellenden Fläche verbergen, und man würde auf letzterer, welche doch der Hauptgegenstand der Figur ist, nicht mehr unterscheiden können, welche Theile oben, unten oder einander entgegengesetzt liegen. Dadurch aber würde alle Deutlichkeit des graphisch darzustellenden Bildes verloren gehen. Zu Beseitigung dieses Uebelstandes nun dient die angegebene Beschränkung, und es wird solche bei den folgenden Figuren, auch ohne daß ihrer ausdrücklich erwähnt würde, immer vorausgesetzt werden.

Drittes Kapitel.

Von den Berührungsebenen an Cylinder- und Kegelflächen.

§. 109.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt auf der Oberfläche eines beliebigen Cylinders soll eine Berührungsebene gelegt werden.

Fig. 39. Auflösung. Es sei AECG die Leitlinie des Cylinders, von welcher angenommen wird, daß sie in der Horizontalebene liege und ein Kreis sei; für jede andere Curve ist die Methode ganz die nämliche, wie die hier angewendete. Ferner sei (ab, a′b′) die Gerade, mit welcher die geradlinige Erzeugungslinie beständig parallel bleiben soll, während sie sich an AECG hinbewegt. Nun bestimme man zuerst den sichtbaren Umriß der Cylinderfläche auf der Horizontalebene. Dieser ist, nach §. 106, durch die Berührungspunkte aller vertikalen Berührungsebenen gegeben. Da aber jede Ebene dieser Art zugleich eine Seitenlinie*) des Cylinders enthält, so muß folglich ihre horizontale Spur mit der Horizontalprojection dieser Seitenlinie zusammenfallen, und also parallel mit ab sein. Und weil ferner eine solche Berührungsebene den Cylinder nach der ganzen Länge jener Seitenlinie (d. h. der Erzeugungslinie) berührt (§. 99); so muß ihre Spur eine Tangente an der Leitlinie AECG sein. Zieht man daher an diese Curve die beiden mit ab parallelen Tangenten AB und CD, so werden diese die Spuren der vertikalen Berührungsebenen und zugleich auch die Horizontalprojectionen derjenigen Erzeugungslinien (AB, A′B′) nnd (CD, C′D′) sein, in welchen jene Ebenen die Cylinderfläche berühren. Die beiden Linien AB und CD bilden also den sichtbaren Umriß der Cylinderfläche auf der Horizontalebene und jede Seite dieser Fläche, welche sich unterhalb jener beiden Linien befindet, d. h. welche ihre Endpunkte in dem Halbkreis AGC hat, wird unsichtbar sein in Beziehung auf die Horizontalebene.

---

*) Es wird hier und im Folgenden manchmal für die verschiedenen Lagen der Erzeugungslinie eines Cylinders oder Kegels, der Kürze halber, das Wort Seite, Seitenlinie, gebraucht. Niemals aber darf man diesen Geraden den Namen „Elemente“ geben; denn die Elemente einer Raumgröße müssen letzterer immer ähnlich sein. So sind also z. B. die Elemente einer Fläche nichts anderes als kleine Flächen, deren Summe die ganze Fläche ist. Da nun später (§. 159) das Wort „Elemente“ in seinem wahren Sinne gebraucht werden wird, so würde, wenn man ihm einen doppelten Sinn beilegen wollte, eine für die Theorie der windschiefen Fläche sehr nachtheilige Verwirrung daraus entstehen. Eben so wird hie und da durch das Wort Grundlinie die Leitlinie eines Kegels oder Cylinders bezeichnet werden, besonders wenn diese Curve sich in der Horizontalebene befindet.

Der ſichtbare Umriß auf der Vertikalebene wird durch diejenigen Berührungsebenen gebildet, welche ſenkrecht auf jener Grundebene ſtehen (§. 106); die horizontalen Spuren dieſer Berührungsebenen müſſen daher ſenkrecht auf der Axe ſtehen, und, wie vorhin, Tangenten an der Grundlinie AECG ſein. Es ſind folglich EE′ und GG′ dieſe Spuren. Da ferner eben jene Ebenen den Cylinder nach der Länge der Erzeugenden EF und GH berühren, deren Vertikalprojectionen die mit a′b′ parallelen E′F′ und G′H′ ſind; ſo bilden alſo dieſe letzteren Linien den ſichtbaren Umriß der Cylinderfläche auf der vertikalen Grundebene, und es wird daher jede Seite, welche ſich hinter dieſen Linien befindet, oder deren Endpunkte ſich in dem Halbkreis EAG befinden, unſichtbar ſein in Beziehung auf die vertikale Grundebene.

§. 110.

Nun kann zur Auflöſung der vorliegenden Aufgabe geſchritten werden. Es ſei M die Horizontalprojection des gegebenen Punktes, durch welchen die Berührungsebene gelegt werden ſoll; da aber dieſer Punkt in der Cylinderfläche liegen muß, ſo darf man ſeine zweite Projection nicht nach Belieben annehmen, ſondern dieſe muß aus der erſten folgen. Denkt man ſich daher eine Erzeugende durch M hindurchgezogen, ſo wird dieſe in der mit ab parallelen ML horizontal projicirt ſein. Dieſe Gerade ML aber trifft die Grundlinie des Cylinders in L; folglich muß L die horizontale Spur jener Erzeugenden ſein, deren vertikale Projection die mit a′b′ parallele L′K′ iſt. Projicirt man daher den Punkt M auf L′K′, ſo erhält man M′ als Vertikalprojection des auf dem Cylinder gegebenen Berührungspunktes.

Es iſt jedoch noch eine zweite Auflöſung möglich. Denn weil die Gerade ML die Grundlinie in zwei Punkten L und V ſchneidet, ſo kann man ſagen, V ſei die horizontale Spur einer andern Seite des Cylinders, die ebenfalls durch MV projicirt wird, deren Vertikalprojection aber V′K′ iſt. Projicirt man daher den Punkt M auf dieſe letztere Gerade in M″, ſo hat man einen zweiten Punkt (M, M″) auf dem Cylinder, der mit dem erſten Punkte (M, M′) gleiche Horizontalprojection M hat.

§. 111.

Man conſtruire zuerſt die Berührungsebene für den Punkt (M, M′). Da nun dieſe Ebene die Erzeugende (ML, M′L′) enthalten muß, ſo wird ihre Spur durch den Fußpunkt L dieſer Geraden gehen; und da ſie den Cylinder nach der ganzen Länge dieſer Erzeugenden berühren ſoll (§. 99), ſo muß ſie nothwendig auch diejenige Gerade LQ enthalten, welche die Grundlinie in L berührt. Die Linie LQ iſt mithin der horizontale Spur der geſuchten Ebene. Fig. 3

Um die andere Spur zu erhalten, ſuche man den Punkt K′, wo die Gerade (ML, M′L′), die in der Berührungsebene liegt, die Vertikalebene ſchneidet; alsdann wird QK′ die vertikale Spur der Berührungsebene ſein. Trifft es ſich aber, wie hier in Fig. 39, daß der Durchſchnitt der Linie PQ mit der Axe über das Zeichenblatt hinausfällt, ſo denke man ſich durch den Punkt (M, M′) und zwar in der Berührungsebene, eine horizontale Hilfslinie gezogen, deren Horizontalprojection offenbar die mit PL parallele MX, und deren Vertikalprojection die mit der Axe parallele M′X′ ſein wird; hierauf ſuche man den Punkt X′, wo dieſe Horizontale die vertikale Grundebene ſchneidet, ſo wird dieſer ein Punkt der vertikalen Spur der Berührungsebene ſein, für welchen man alſo X′K′ erhält. Man kann ſich jedenfalls dieſer zweiten Verfahrungsart als Probe der erſten bedienen.

Was die Berührungsebene betrifft, welche dem Punkt (M, M″) entſpricht, ſo bemerke man, daß in dieſem Falle die Berührungsſeite durch MV und M″V′ projicirt wird. Zieht man daher durch den Fußpunkt V dieſer Seite eine Tangente VS an die Grundlinie des Cylinders, ſo wird ſolche die horizontale Spur der neuen Berüh-

rungsebene sein. Die andere Spur SK'' findet man, wie vorhin, indem man den Punkt K'' sucht, in welchem die Berührungsseite die Vertikalebene schneidet, oder auch, indem man die Horizontale (MY, M''Y') durch ihre Projectionen, und aus diesen den Punkt Y' bestimmt, in welchem genannte Horizontale die Vertikalebene schneidet.

§. 112.

Man bemerke hiebei, daß von den beiden Berührungsebenen PQR' und PSR' jede eine Seite des Cylinders enthält und daß diese beiden Seiten parallel sind. Die Berührungsebenen können sich mithin nur in einer mit diesen Seiten parallelen Geraden schneiden (S. Nr. 3 der Anmerkung zu §. 22). Construirt man daher, nach §. 27, diesen Durchschnitt (PR, P'R'), so muß derselbe mit (ab, a'b') parallel sein, woraus sich ein neues Mittel ergibt, die Richtigkeit der vorhergehenden Operationen zu erproben.

§. 113.

Aus den in §. 108 angegebenen Gründen werden in der Figur nur die Spuren der Berührungsebenen construirt, indem man letztere gar nicht als wirklich vorhanden betrachtet; da aber eben diese Spuren wirkliche Linien sind, so muß man diejenigen ihrer Theile punktiren, welche durch die Projectionen des Cylinders auf den beiden Grundebenen verdeckt werden. Was die verschiedenen Seiten des Cylinders betrifft, so hätte man diejenigen unter ihnen stricheln können, welche als Hilfslinien gedient haben; doch ist es besser, alle diese Geraden als eben so viele Erzeugungslinien zu betrachten, die alle zusammen ein deutlicheres Bild von der Gestalt des Cylinders geben, und welche man bald durch einen vollen Strich, bald durch Punkte bezeichnet hat, je nachdem sie sichtbar oder unsichtbar sind, nach den in §. 109 aufgestellten Regeln.

§. 114.

Will man die Curve construiren, nach welcher die vertikale Grundebene von der Cylinderfläche geschnitten wird, so darf man nur die verschiedenen vertikalen Spuren der Erzeugungslinien construiren, wodurch man die Linie F'K'D'H'K''B' erhält, welche im vorliegenden Falle eine Ellipse sein wird. Diese muß die beiden Spuren der Berührungsebenen in den Punkten K' und K'' berühren, weil eben diese Ebenen die Tangenten aller der Curven enthalten (§. 99), welche auf der Cylinderfläche durch die verschiedenen Punkte einer Berührungsseite gezogen sind.

Um den höchsten und niedersten Punkt der Curve F'K'D'H'.... zu finden, darf man nur die beiden Erzeugenden construiren, welche denjenigen Punkten T und t der Grundlinie entsprechen, an welchen die Tangenten parallel mit der Axe sind. Denn jede der zu diesen Erzeugenden, z. B. (TU, T'U'), gehörigen Berührungsebenen schneidet die Vertikalebene in einer mit der Axe parallelen Geraden, folglich in einer Horizontallinie; und da ein solcher Durchschnitt die Curve F'K'D'H'.... berühren muß, so bezeichnet also U' den Punkt, in welchem die Tangente horizontal ist. Man bemerke noch, daß dieser Schluß richtig bleibt für jeden Cylinder, seine Grundlinie mag ein Kreis oder irgend eine andere Curve sein.

§. 115.

Wenn statt der in der Horizontalebene liegenden Grundlinie der Cylinderfläche irgend eine andere Curve im Raume als Leitlinie gegeben, und durch ihre beiden Projectionen bestimmt gewesen wäre, so hätte man diesen Fall auf den vorhergehenden zurückführen können, indem man durch die verschiedenen Punkte der gegebenen Curve Parallelen mit (ab, a'b') gezogen und ihre horizontalen Spuren gesucht hätte; dadurch hätte man die Grundlinie AELG erhalten, welche vorhin unmittelbar gegeben war.

§. 116.

Aufgabe. Man ſoll an eine Cylinderfläche eine Berührungsebene legen, welche durch einen außerhalb dieſer Fläche gegebenen Punkt gehe.

Auflöſung. Es ſeien zur Beſtimmung der Cylinderfläche die nämlichen Stücke gegeben, wie vorhin; der Punkt im Raume aber, durch welchen die Berührungsebene gehen ſoll, ſei (N, N′).

Man ziehe durch dieſen Punkt eine mit der Erzeugenden parallele Linie (NP, N′P′), welche offenbar ganz in der geſuchten Berührungsebene liegen wird, weil letztere jedenfalls eine Seite des Cylinders, d. h. eine Erzeugende enthalten muß. Conſtruirt man alſo die horizontale Spur P dieſer Geraden, ſo erhält man einen Punkt der Spur der geſuchten Ebene; und da dieſe Spur die Grundlinie des Cylinders berühren ſoll (§. 99), ſo wird ſie eine der beiden Tangenten PLQ und PVS ſein, die man aus P an die Grundlinie ziehen kann. Es gibt mithin zwei Ebenen, welche der Aufgabe Genüge leiſten, und man erhält ihre vertikalen Spuren leicht, weil jede derſelben die Gerade (PN, P′N′) und die Seite enthält, welche durch den Berührungspunkt L oder V geht. *) Uebrigens könnte man ſich auch, wie in §. 111, durch den Punkt (N, N′) eine Horizontale in der einen oder andern Berührungsebene gezogen denken, und die vertikale Spur dieſer Geraden conſtruiren.

§. 117.

Aufgabe. Man ſoll an eine Cylinderfläche eine Berührungsebene legen, welche parallel mit einer gegebenen Linie ſei.

Auflöſung. Es ſei ARCG die Grundlinie des Cylinders auf der Horizontalebene und (EF, E′F′) eine Fig. 4
ſeiner Erzeugungslinien. Die Gerade, mit welcher die Berührungsebene parallel ſein ſoll, ſei (mn, m′n′).

Man conſtruire nun zuerſt wieder den ſichtbaren Umriß der Cylinderfläche auf den beiden Grundebenen, ganz wie in §. 109; hierauf ziehe man durch einen Punkt der Linie (mn, m′n′) eine mit der Erzeugungslinie parallele (ma, m′a′), und lege durch dieſe beiden Linien eine Ebene. Dieſe Ebene, deren horizontale Spur an iſt, muß parallel mit der geſuchten Berührungsebene ſein, weil letztere, welche eine Seite des Cylinders enthält, parallel iſt mit den beiden in ma und mn projicirten Geraden. Die Spur dieſer Berührungsebene wird alſo eine von den beiden Tangenten PQ und TS ſein, welche man, parallel mit an, an die Grundlinie gezogen hat. Die Aufgabe hat alſo wieder zwei Auflöſungen, und man erhält die vertikalen Spuren QR′ und SV′ ſehr leicht mittels der Berührungsſeiten, von denen (PR, P′R′) der einen, und (TV, T′V′) der andern Berührungsebene zugehört. Da hier die beiden Berührungsebenen nothwendig parallel ſind, ſo müſſen es auch ihre horizontalen und vertikalen Spuren ſein.

§. 118.

Beim Schluſſe dieſer Aufgaben über Cylinderflächen iſt noch zu bemerken, daß die Forderung, eine Berührungsebene an einen Cylinder zu legen, welche noch durch eine nach Belieben gegebene Gerade oder, was daſſelbe iſt, durch zwei außerhalb des Cylinders gegebene Punkte gehe, unſtatthaft wäre. Denn eine Ebene, welche einen Cylinder in einem Punkte berührt, berührt ihn zugleich nach der ganzen Länge der durch dieſen Punkt gehenden Erzeugungslinie (§. 99), und es iſt alſo zur Beſtimmung der

*) Es trifft ſich hier, daß die Berührungspunkte L und V auf derſelben mit ab parallelen Geraden liegen, weil die Figur der vorhergehenden Aufgabe auch zu der vorliegenden benützt wurde. Nimmt man aber den Punkt (N, N′) ganz willkürlich, ſo findet im Allgemeinen jener Umſtand nicht ſtatt, was jedoch in den Betrachtungen, welche bei Auflöſung der vorigen Aufgabe angeſtellt wurden, nichts ändert.

Ebene jetzt nur noch ein einziger, außerhalb dieser Linie liegender, Punkt nöthig. Fügt man aber diesem Punkte noch einen andern hinzu, durch welchen die Berührungsebene gehen soll, so liegt dieser entweder in der durch die Erzeugungslinie und den ersten Punkt bestimmten Ebene oder nicht; im ersten Falle ist er also eine überflüssige weitere Bedingung, und im zweiten Falle macht er die Aufgabe unmöglich. Von der Art des ersten Falles wäre z. B. die Bedingung, daß die gegebene Gerade mit der Erzeugungslinie parallel laufen solle.

§. 119.

Aufgabe. Man soll durch einen auf einer Kegelfläche gegebenen Punkt eine Berührungsebene legen.

lg. 41. **Auflösung.** Es sei ABCD die Leitlinie, von der angenommen wird, sie befinde sich in der horizontalen Grundebene; (S, S′) sei die Spitze des Kegels.

Man construire zuerst den sichtbaren Umriß dieser Fläche auf der Horizontalebene, indem man, nach §. 106, alle möglichen vertikalen Berührungsebenen sucht. Eine solche Ebene aber wird zu ihrer horizontalen Spur die Horizontalprojection derjenigen Erzeugenden haben, welche in ihr liegt; daher also diese Spur durch den Punkt S gehen muß. Da sie ferner auch die Grundlinie berühren soll (vorausgesetzt, daß wirklich noch eine Berührung der Ebene nach der ganzen Länge einer Erzeugenden statt finde), so folgt daraus, daß die beiden Tangenten SA und SB, welche durch den Punkt S gehen, die Spuren vertikaler Ebenen sind, welche den Kegel nach den beiden Seiten (SA, S′A′) und (SB, S′B′) berühren, und welche mithin den sichtbaren Umriß der Kegelfläche in Beziehung auf die Horizontalebene bilden. Jede Erzeugende also, welche unterhalb dieser beiden Tangenten liegt, d. h. deren Endpunkte in dem Theile ADB der Grundlinie liegen, muß unsichtbar sein auf der Horizontalebene.

Was den sichtbaren Umriß auf der vertikalen Grundebene betrifft, so ist er gegeben durch diejenigen Berührungsebenen des Kegels, welche senkrecht auf dieser Grundebene stehen (§. 106). Es müssen daher die horizontalen Spuren dieser Ebenen senkrecht auf der Axe stehen, und da sie zugleich, wie vorhin, Tangenten an der Grundlinie sein sollen, so sind CC′ und DD′ diese Spuren. Ferner, weil jene Ebenen den Kegel nach der Länge der Erzeugungslinien (CS, C′S′) und (DS, D′S′) berühren, so folgt daraus, daß diese beiden Geraden den sichtbaren Umriß der Kegelfläche auf der Vertikalebene bilden; und es wird daher jede Seite, welche hinter diesen Geraden liegt, oder deren Endpunkte in dem Theil CAD der Grundlinie liegen, unsichtbar sein auf der Vertikalebene.

§. 120.

Es sei nun M die Horizontalprojection des gegebenen Punktes. Die andere Projection darf nicht willkührlich genommen werden; denn da der gegebene Punkt sich auf der Kegelfläche befindet, so muß er in einer gewissen Erzeugenden liegen, deren Horizontalprojection keine andere Gerade als SM sein kann. Diese Gerade nun hat zu ihrer horizontalen Spur den Punkt E oder G, und mithin ist ihre Vertikalprojection S′E′ oder S′G′. Bezieht man daher auf letztere die Projection M durch eine auf der Axe senkrechte Gerade, so erhält man M′ oder M″ als Vertikalprojection des gegebenen Punktes. Die Aufgabe hat also wieder zwei Auflösungen.

§. 121.

l. 41. Man construire zuerst die Berührungsebene für den ersten jener beiden Punkte, nämlich für (M, M′). Diese Ebene muß die Erzeugende (SE, S′E′) enthalten, und den Kegel nach der ganzen Länge dieser Geraden berühren (§. 100); folglich wird ihre erste Spur die Tangente PEQ sein, die man durch den Punkt E an die Grundlinie gezogen hat.

Ihre vertikale Spur muß durch den Punkt (F, F'), in welchem die Berührungsseite die Vertikalebene schneidet, und durch den Punkt Q gehen, in welchem die Spur PE die Axe schneidet; da aber der Punkt Q hier wieder über das Zeichnenblatt hinausfällt, so denke man sich durch den Punkt (M, M') eine Horizontale (MX, M'X') in der gesuchten Berührungsebene gezogen, deren vertikale Spur in X' alsdann ein neuer Punkt der gesuchten Spur QX'F' sein wird.

Ebenso, da für den Punkt (M, M'') die Berührungsseite (SG, S'G') ist, so wird die Tangente GV die horizontale Spur der durch (M, M'') gehenden Berührungsebene sein; ihre vertikale Spur VF'' aber ergibt sich, wenn man den Punkt F'' sucht, in welchem die Berührungsseite (GS, G'S') die Vertikalebene schneidet; oder man kann sich auch, wie vorhin, einer in der Berührungsebene gelegenen Horizontalen (MY, M'' Y') bedienen.

§. 122.

Da von den beiden Berührungsebenen, welche auf diese Weise bestimmt werden, jede eine Erzeugende des Kegels enthält, so müssen sie beide durch die Spitze (S, S') gehen; daraus aber folgt, daß ihr nach §. 27 construirter Durchschnitt ebenfalls durch diesen Punkt gehen, und daß die erste Projection PR dieses Durchschnittes durch S und die andere P'R' durch S' gehen müsse. Daraus aber ergibt sich eine Probe für die Richtigkeit der vorhergehenden Constructionen. Ferner müssen die vertikalen Spuren QX'F' und VF'' die Durchschnittscurve des Kegels mit der Vertikalebene in den Punkten F' und F'' berühren. Diese Curve aber erhält man, wenn man die vertikalen Spuren der verschiedenen Erzeugungslinien construirt.

§. 123.

Aufgabe. Man soll an eine Kegelfläche eine Berührungsebene legen, welche durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punkt gehe.

Auflösung. Es sei wieder ABC die Grundlinie, (S, S') die Spitze des Kegels und (N, N') der Punkt im Raume, durch welchen die Berührungsebene gehen soll. Man bestimme, wie vorhin, den sichtbaren Umriß der Kegelfläche auf jeder der beiden Grundebenen. Fig. 4

Da nun die gesuchte Berührungsebene eine Erzeugungslinie enthalten soll, so muß sie durch die Spitze (S, S') gehen; und da sie auch durch (N, N') gehen soll, so muß sie die Linie (SN, S'N') enthalten. Sucht man also die horizontale Spur P dieser Geraden und zieht durch sie die Tangenten PEQ und PGV an die Grundlinie, so werden diese die horizontalen Spuren der beiden Berührungsebenen sein, welche der Aufgabe Genüge leisten.

Die beiden vertikalen Spuren bestimmt man mittels der Geraden (SN, S'N'), welche in beiden Ebenen zugleich liegt; oder auch mittels der Berührungsseiten dieser Ebenen, welche offenbar (SE, S'E') und (SG, S'G') sind. Man könnte aber auch eine horizontale Hilfslinie dazu anwenden, welche man in beiden Ebenen durch den Punkt (N, N') gezogen hätte, wie es schon mehre Male geschehen ist.

§. 124.

Aufgabe. Man soll an eine gegebene Kegelfläche eine Berührungsebene legen, welche einer gegebenen Geraden parallel sei.

Auflösung. Es seien zu Bestimmung der Kegelfläche wieder die nämlichen Stücke, wie in der vorigen Aufgabe, gegeben, und (mn, m'n') sei die Gerade, mit welcher die Berührungsebene parallel sein soll. Da nun diese Ebene durch die Spitze des Kegels gehen muß, so ziehe man durch diese eine der (mn, m'n') parallele Gerade (SP, S'P'); so wird letztere in der gesuchten Ebene liegen, und ihre Spur P wird ein Punkt der horizontalen Spur eben dieser Ebene sein. Zieht man also durch P die beiden Tangenten PEQ und PGV, so wird Fig. 4

jede derselben die Spur einer Berührungsebene sein, welche der Aufgabe entspricht. Die vertikalen Spuren ergeben sich wie im vorhergehenden Paragraphen.

§. 125.

Weil jede Ebene, welche eine Kegelfläche in einem Punkte berührt, mit dieser Fläche zugleich eine ganze Seite gemein hat (§. 100), so gilt die in §. 118 gemachte Bemerkung auch hier; so daß also von einer Berührungsebene an einem Kegel nicht gefordert werden kann, daß sie noch durch eine Gerade oder durch zwei außerhalb der Kegelfläche gegebene Punkte gehe, wenn nicht diese Gerade zugleich durch die Kegelspitze geht, in welchem Fall es, wie in §. 123, nur eines einzigen Punktes zur Bestimmung der Berührungsebene bedarf.

Es mögen hier, am Schluß dieses Kapitels, noch einige Aufgaben stehen, zu deren Auflösung die Mittel nur angedeutet werden.

§. 126.

Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade soll eine Ebene gelegt werden, welche mit der horizontalen Grundebene einen bestimmten Winkel α mache.

Von einem beliebigen Punkt der gegebenen Geraden ziehe man nach der Horizontalebene eine senkrechte und eine schiefe Linie, und zwar letztere so, daß sie parallel mit der Vertikalebene sei, und daß ihre Vertikalprojection einen Winkel α mit der Axe mache. Hierauf denke man sich die schiefe Linie um die senkrechte gedreht, so wird sie einen geradstehenden Kegel beschreiben, dessen Grundlinie eine leicht zu bestimmende Kreislinie ist, und dessen Seiten alle mit der Horizontalebene den gegebenen Winkel α machen. Legt man daher eine Berührungsebene an diesen Kegel, welche zugleich durch die gegebene Gerade geht, was nach §. 123 geschehen kann, so erhält man eine Ebene, welche den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

§. 127.

Aufgabe. An einen gegebenen Cylinder soll eine Berührungsebene gelegt werden, welche mit der horizontalen Grundebene den gegeben Winkel α mache.

Auflösung. Man construire wieder, wie in der vorigen Aufgabe, durch Umdrehung einen Kegel, dessen Seiten mit der Horizontalebene einen Winkel α machen. Hierauf ziehe man durch die Spitze dieses Kegels eine Gerade, parallel mit den Erzeugungslinien des Cylinders, und lege durch diese Gerade eine Berührungsebene an den Kegel (§. 123). Endlich lege man an den Cylinder eine mit letzterer Ebene parallele Berührungsebene. Dieses geschieht, wie in §. 117, indem man an die Grundlinie des Cylinders eine Tangente zieht, parallel mit der Spur der an den Kegel gelegten Berührungsebene. Man sieht leicht, daß die Aufgabe unmöglich wird, wenn die Parallele, welche man durch die Kegelspitze ziehen muß, die Horizontalebene innerhalb der Grundlinie des Kegels trifft.

Sollte die nämliche Aufgabe gelöst werden in Beziehung auf einen gegebenen Kegel von beliebiger Grundfläche, so müßte die Auflösung dahin abgeändert werden, daß man als Spitze des durch Umdrehung entstandenen Hilfskegels denjenigen Punkt nähme, welcher der durch die Aufgabe bestimmten Kegelfläche zur Spitze dient; hierauf würde man eine den beiden Grundlinien dieser Kegelflächen gemeinschaftliche Tangente ziehen, welche alsdann die horizontale Spur der gesuchten Ebene wäre.

§. 128.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt soll eine Gerade gezogen werden, welche eine Kegelfläche berühre und einer gegebenen Ebene parallel sei.

Auflösung. Man construire zuerst eine Ebene, welche den Kegel berührt und durch den gegebenen unkt geht; hierauf durchschneide man diese Ebene durch eine andere, welche durch den nämlichen Punkt geht und r gegebenen Ebene parallel ist; so wird der Durchschnitt dieser beiden Ebenen offenbar die gesuchte Gerade sein.

Viertes Kapitel.

Von den Berührungsebenen an Umdrehungsflächen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

§. 129.

Durch jeden Punkt M einer Umdrehungsfläche geht ein Meridian AMD und ein Parallelkreis FMG (§. 75); Fig. 43.
ht man daher an diese beiden Curven beziehlich die Tangenten MT und MV, so wird eine durch diese Linien legte Ebene, die Berührungsebene an dem Punkt M der Umdrehungsfläche sein (§. 103). Nun ist die Tanente MV, welche ganz in der Kreisebene FNG liegt, sowohl auf dem Halbmesser MO, als auch auf der e AO*) senkrecht; mithin ist sie es auch auf der Meridianebene AOM, und daher ist die Berührungsebene, lche MV enthält, ebenfalls senkrecht auf jener Meridianebene. Da diese Folgerung ganz unabhängig ist von r Natur der Curve AMD und von der Lage des Punktes M, so ergibt sich daraus folgender merkwürge Lehrsatz:

In jeder Umdrehungsfläche ist die Berührungsebene stets senkrecht auf derjenigen Meridianebene, welche durch den Berührungspunkt geht.

§. 130.

Errichtet man in dem Punkt M eine Normale MN; so muß diese, weil sie senkrecht auf der Berührungsne steht, ganz in die Meridianebene AMD fallen und daher die Axe schneiden. Also: in jeder Umdreungsfläche wird die Axe von der Normale geschnitten.

Dieser Durchschnitt wird für alle diejenigen Normalen MN, PN, FN...., welche zu dem nämlichen Pallelkreis gehören, in einem und demselben Punkte erfolgen. Denn dreht man den Meridiankreis AMD um die e, so wird, während der Umdrehung, die Gerade MN stets senkrecht auf MT bleiben. Da ferner eben diese rade MN zugleich in der umgedrehten Meridianebene bleibt, so wird sie auch, wie diese (§. 129), nach und ch senkrecht auf jede Tangente MV des Parallelkreises zu stehen kommen; mithin ist MN immer senkrecht auf ei Tangenten und bleibt folglich in allen Lagen, welche sie während ihrer Umdrehung um die Axe annimmt, ie Normale auf die Umdrehungsfläche. Weil nun ferner während dieser Umdrehung der Punkt N unbeweglich ibt, so bilden also alle zu einem und demselben Parallelkreis gehörigen Normalen den Mantel eines senkrechten Kegels, dessen Spitze in der Axe liegt. Diese Spitze verändert sich aber von einem arallelkreis zum andern.

Es folgt nun die wirkliche Construction der Berührungsebenen an Umdrehungsflächen, nachdem im Vorgehenden die allgemeinen Eigenschaften derselben aufgezeigt worden sind.

---

*) Denn da AO senkrecht auf dem Parallelkreis FMG steht, so würde auch eine durch M, parallel mit AO, gezogene Linie senkrecht auf FMG stehen, und daher der Tangente MV unter einem rechten Winkel begegnen (§. 43). Anm. d. Uebers.

§. 131.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt auf einer Umdrehungsfläche, deren Meridian bekannt ist, soll eine Berührungsebene gelegt werden.

T. 44. **Auflösung.** Um die Construction zu vereinfachen, nehme man die Horizontalebene so, daß die Umdrehungsaxe senkrecht auf ihr stehe; so wird diese Gerade, da sie eine Vertikale ist, durch den Punkt O horizontal und durch die Gerade O'Z' vertikal projicirt werden. Ferner sei A'B'D' die Vertikalprojection des Hauptmeridians, d. h. desjenigen, dessen Ebene parallel ist mit der Vertikalebene, und dessen Horizontalprojection also die mit der Axe parallele Linie OB ist. Dieser Meridian ist hier eine Ellipse, von deren Hauptdurchmessern einer mit der Umdrehungsaxe zusammenfällt, so daß also durch die Umdrehung ein Ellipsoid erzeugt wird (§. 79); übrigens sind für jede andere Meridiancurve die hier angestellten Betrachtungen und Constructionen die nämlichen.

Der größte Parallelkreis, d. h. der Aequator der Fläche ist offenbar der durch die kleine Halbaxe C'B' beschriebene Kreis, dessen Horizontalprojection der ihm gleiche Kreis BKE ist. Dieser letztere bildet zugleich den sichtbaren Umriß des Ellipsoids in Beziehung auf die Horizontalebene (§. 106); denn längs des Aequators (B'E', BKE) hin, sind alle Berührungsebenen vertikal, weil jede derselben eine Meridiantangente enthält, welche vertikal ist, wie B'B. Was den sichtbaren Umriß, in Beziehung auf die Vertikalebene, betrifft, so ist dieser der Hauptmeridian (A'B'D'E', BE) selbst: denn dieser Umriß soll nach §. 106 von den Berührungspunkten aller derjenigen Berührungsebenen gebildet werden, welche senkrecht auf der Vertikalebene stehen; nun aber sind die Berührungsebenen längs des Meridians (A'B'D'E', BE) alle senkrecht auf seiner Ebene (§. 129) und mithin auch senkrecht auf der Vertikalebene. Es ist hier unnöthig, die Erzeugungslinie noch in einigen andern Lagen zu zeichnen, um ein deutlicheres Bild von der Umdrehungsfläche zu erhalten (§. 93): aus dem, was bereits gezeichnet ist, ergibt sich dieses Bild klar genug. Doch wird später gezeigt werden (§. 137), wie man die Projectionen so vieler Meridiane, als man nur immer will, construiren könne.

§. 132.

Es sei nun M die Horizontalprojection des auf der Umdrehungsfläche gegebenen Punktes; die zweite Projection dieses Punktes darf nun nicht willkührlich genommen werden, sondern sie muß in dem Durchschnitte der Vertikalen M mit dem in OK projicirten Meridiane liegen. Dreht man aber diesen so lange um die Axe (O, A'D'), bis er mit der Ebene des Hauptmeridians OB zusammenfällt, so wird nun A'B'D' seine Vertikalprojection sein; und da während dieser Umdrehung der Punkt M den Bogen MG beschrieben hat, so muß für die jetzige Lage des umgedrehten Meridians, G' oder G'' die gesuchte Vertikalprojection des gegebenen Punktes sein. Führt man hierauf den beweglichen Meridian wieder in seine vorige Lage OK zurück, so wird der fragliche Punkt, der während dieser Bewegung immer in gleicher Höhe über der Horizontalebene bleibt, seine Vertikalprojection beständig in der Horizontalen G'F' oder G''F'' behalten. Daraus aber folgt, daß er in seiner ursprünglichen Lage den Punkt M' oder M'' zur Vertikalprojection gehabt haben müsse. Es gibt also zwei Punkte (M, M') und (M, M'') auf der Umdrehungsfläche, die beide einerlei Horizontalprojection M haben.

§. 133.

T. 44. Man betrachte zuerst den Punkt (M, M'). Die Berührungsebene nun, welche durch diesen Punkt gelegt werden soll, muß durch zwei Tangenten der Umdrehungsfläche gehen, von denen die eine den durch (M, M') gehenden Meridian, und die andere den durch eben diesen Punkt gehenden Parallelkreis im nämlichen Punkt berührt. Da aber die Projection des erwähnten Meridians nicht gegeben ist, und mithin auch keine Tangente

unmittelbar an denſelben gezogen werden kann, ſo klappe man ſeine Ebene OMK noch einmal auf den Hauptmeridian OB auf. Dadurch wird der Punkt (M, M') in (G, G') zu liegen kommen, und man kann nun leicht durch dieſen letztern die Tangente GH' ziehen, welche die Horizontalebene in dem Punkt H der Linie OB ſchneiden wird. Führt man nun aber den beweglichen Meridian wieder in ſeine vorige Lage OMK zurück, ſo wird der Fußpunkt H der Tangente einen Kreisbogen HT beſchreiben, während der Berührungspunkt G' wieder nach M' zurückkehrt. Projicirt man daher den Punkt T auf die Axe SU, ſo erhält man die Linien M'T' und MT als Projectionen der Tangente desjenigen Meridans, welcher durch den Punkt (M, M') geht. Man bemerke hiebei, daß die Verlängerung dieſer Tangente der Umdrehungsaxe in demſelben Punkte Z' begegnen muß, in welchem ſie von der Geraden G'H' geſchnitten wurde.

Der durch den Punkt (M, M') gehende Parallelkreis wird horizontal durch den Kreis GMF und vertikal durch die Gerade G'F' projicirt; mithin hat er zur Tangente die Horizontale (MV, M'V'), welche ſenkrecht auf der Meridianebene OMK ſteht. Durch die beiden Tangenten (MT, M'T') und (MV, M'V') iſt nun die geſuchte Berührungsebene beſtimmt, und man hat daher nur noch ihre beiden Spuren zu conſtruiren. Von dieſen aber wird die horizontale durch den Fußpunkt T der erſten Tangente gehen, und zugleich wird ſie mit der Geraden MV parallel ſein, welche die Projection einer in der Berührungsebene liegenden Geraden iſt. Man erhält daher TU als die horizontale Spur der Berührungsebene. Die vertikale Spur findet man, wenn man den Punkt V' conſtruirt, in welchem die Gerade (MV, M'V') die Vertikalebene ſchneidet, und hierauf MV' zieht.

Die zum Punkt (M, M'') gehörige Berührungsebene erhält man auf eine ähnliche Art, indem man zuerſt den Punkt M'' auf den Punkt G'' des Hauptmeridians aufklappt, hierauf an letztern die Tangente G''L' zieht, und alsdann den Fußpunkt (L, L') dieſer Geraden in den Punkt R der Meridianebene OK zurückführt. Dadurch erhält man (RM, R'M'') als die Tangente des Meridiankreiſes OM in dem Punkt (M'', M). Die Tangente des Parallelkreiſes hingegen iſt hier (MV, M''V''). Aus dieſen beiden Tangenten aber findet man auf dieſelbe Art, wie vorhin, die Spuren RS und SV'' der Berührungsebene an (M, M'').

§. 134.

Es iſt leicht einzuſehen, daß die horizontale Spur jeder Berührungsebene an einer Umdrehungsfläche ſenkrecht ſein müſſe auf der horizontalen Spur der Meridianebene, ſo lange wenigſtens die Umdrehungsaxe vertikal iſt. Denn da die erſtere Spur in dieſem Falle immer parallel ſein wird mit der Tangente MV des Parallelkreiſes, welche eine Horizontale iſt und ſenkrecht auf der Meridianebene ſteht; ſo muß ſie ebenfalls ſenkrecht auf dieſer Ebene und auf dem in ihr liegenden Meridiangrundſchnitte ſtehen.

§. 135.

Die beiden Berührungsebenen in (M, M') und (M, M''), deren horizontale Spuren TU und RS parallel ſind, müſſen ſich in einer Horizontallinie ſchneiden;*) und dieſer Durchſchnitt wird, wegen der Symmetrie der Umdrehungsfläche, in der Ebene des Aequators E'B' liegen. Denn die beiden Tangenten G'H' und G''L', welche man an die Meridianellipſe gezogen hat, ſchneiden ſich in einem Punkte α, der in der kleinen Axe dieſer Ellipſe liegt. Bringt man nun letztere in die Lage des Meridians OK, ſo wird der Punkt α, der beiden Tangenten gemeinſchaftlich bleibt, in den Punkt β zu liegen kommen und in der Ebene des Aequators E'B' bleiben. Da nun der horizontale Durchſchnitt beider Berührungsebenen nothwendig durch den Punkt β gehen muß, ſo wird er ganz in der (ſelbſt horizontalen) Ebene des Aequators liegen. Aus eben dieſem Grunde aber

*) Vergl. Anmerk. zu §. 22. Nro. 3.

müssen auch die vertikalen Spuren der Berührungsebenen sich in einem auf der verlängerten E′B′β gelegenen Punkte P schneiden.

§. 136.

Fig. 44. Um die Normale der Umdrehungsfläche für den Punkt (M, M′) zu erhalten, darf man sich nur erinnern, daß alle Normalen, welche zu einem und demselben Parallelkreis gehören, die Are in dem nämlichen Punkte schneiden (§. 130), und daß jede derselben in derjenigen Meridianebene liegt, welche durch den Berührungspunkt geht. Nachdem man also den Punkt M′ in den Punkt G′ des Hauptmeridians aufgeklappt hat, ziehe man durch den letzteren eine Gerade G′N′ senkrecht auf die Tangente G′H′. Diese Senkrechte schneidet die Are in dem Punkte N′. Zieht man daher N′M′, so wird solche die Vertikalprojection der Normale für den Punkt M′ sein, Ihre Horizontalprojection aber fällt offenbar in die Linie OM.

Da diese Normale senkrecht ist auf der Berührungsebene TUV′, so müssen auch die Spuren dieser letzteren beziehlich senkrecht sein auf den Geraden OM und N′M′γ (§. 33). Man kann sich dieser Bemerkung bedienen, um die Richtigkeit der schon ausgeführten Constructionen zu erproben, oder auch, wenn man will, um die Spuren der Berührungsebene a priori zu finden, indem man durch einen gegebenen Punkt (M, M′) eine auf der Geraden (MO, M′N′) senkrechte Ebene legt. (S. §. 36.)

§. 137.

In §. 132 wurde gezeigt, wie man aus der gegebenen Horizontalprojection M eines Punktes auf der Fläche leicht die Vertikalprojection M′ oder M″ desselben Punktes finden könne. Wendet man daher dieses Verfahren auf verschiedene Punkte K, M, Q . . . . an, die man als Horizontalprojectionen mehrerer in der Meridiancurve OK liegender Punkte nimmt, so kann man leicht die Vertikalprojection dieser Curve construiren, welche die Geraden T′M′ und R′M″ berühren wird. Wendet man hierauf die nämliche Construction auch noch auf andere Meridianebenen als OK an, so erhält man so viele Lagen der beweglichen Ellipse A′B′D′ als man nur immer will, und man kann daher die graphische Darstellung der Umdrehungsfläche so vollständig als möglich machen (§. 93).

Durch ähnliche Operationen kann man, wenn die Projectionen der Erzeugungslinie irgend einer Umdrehungsfläche gegeben sind, leicht den Hauptmeridian oder auch jeden andern Meridianschnitt finden. Man kann sich z. B. als Aufgabe denjenigen Fall setzen, da die Erzeugende eine Gerade ist, welche die Are nicht schneidet, und man wird für den Meridian eine Hyperbel finden, wie solches auch später (§. 148) gezeigt werden wird.

§. 138.

Aufgabe. Eine Berührungsebene an einen Wulst *(tore)* zu legen.

Fig. 45. Wenn sich ein Kreis (A′B′C′B″, ABC) um eine Gerade (O″Z′, O) dreht, welche nicht durch seinen Mittelpunkt geht, aber in einer Ebene mit ihm liegt, so erzeugt ein solcher Kreismeridian eine Art ringförmige Fläche, die man Wulst nennt. Alle Horizontalprojectionen der einzelnen Punkte dieser Umdrehungsfläche liegen zwischen der Horizontalprojection des Aequators, den der Halbmesser OC = O′C′, und der Horizontalprojection des Kehlkreises (cercle de gorge), den der Halbmesser OA = O′A′ beschreibt.

Es ist hier wohl zu bemerken, daß die beiden Halbkreise B′C′B″ und B′A′B″ zwei an Form sehr von einander verschiedene Flächen erzeugen, obgleich beide sich längs der Kreislinien vereinigen, welche von den Endpunkten B′ und B″ des vertikalen Durchmessers beschrieben werden. Die äußere Fläche ist convex, d. h. alle Curven, welche auf ihr durch einen und denselben Punkt (N, N′) gezogen werden, liegen auf einer Seite der

n eben dieſen Punkt gelegten Berührungsebene. Um dieſe Ebene wirklich zu beſtimmen, ziehe man an den Meridian die Tangente N′P′ und fälle aus dem Fußpunkt P′ dieſer Geraden die Senkrechte PP′ auf die Spur N des Meridians (§. 134), ſo ſind N′P′ und P′P die beiden Spuren der Berührungsebene an (N, N′). Nun ſieht man aus der Figur, daß der Meridian B′N′B″ ſowohl, als auch der Parallelkreis N′I′ links von er Berührungsebene PP′N′ liegen; und obgleich hier, zur Vereinfachung der Conſtruction, der auf dem Hauptmeridian liegende Punkt (N, N′) gewählt wurde, ſo iſt doch einleuchtend, daß für jeden andern Punkt der äußern Fläche ſich das Nämliche ergeben würde, weil dieſe durch Umdrehung erzeugt und mithin rings um die Axe herum ſymmetriſch iſt.

Nimmt man hingegen einen Punkt (M, M′) auf der innern Fläche an, ſo wird die an dieſen Punkt gelegte Berührungsebene die Fläche durchſchneiden. Denn der Meridian B′M′B″ iſt offenbar rechts von dieſer Ebene, während der Parallelkreis M′V′ links von derſelben iſt: die Ebene M′T′T wird alſo den Wulſt in einer Knotenlinie ſchneiden, deren Horizontalprojection (MHEGE″Mhge″M) iſt; die Conſtruction dieſer Curve kommt ſpäter (§. 267) vor. Dieſes Durchſchnittes ungeachtet aber enthält die Ebene M′T′T die Tangenten des Meridians, des Parallelkreiſes und aller andern Curven, die man auf der krummen Fläche durch den Punkt (M, M′) ziehen kann; ſo daß alſo jene Ebene den Wulſt wirklich in dieſem Punkte berührt, während ſie ihn in allen andern Punkten, die ſie noch mit ihm gemeinſchaftlich hat, ſchneidet. Dieſer Umſtand rührt aber daher, daß die innere Fläche nicht convex iſt, ſondern Curven von entgegengeſetzter Krümmung enthält.

§. 139.

In der Figur 45, welche die Hauptparallelkreiſe der krummen Fläche darſtellen ſoll, wird zwar ein Theil der vertikalen Spur M′T′ der an den innern Theil der Fläche angelegten Berührungsebene von dem Wulſte verdeckt: deſſen ungeachtet aber wurde er mit vollem Strich angegeben, weil er zugleich die Vertikalprojection der Durchſchnittscurve iſt, deren vorderer Zweig hrefg auf der Vertikalebene ſichtbar iſt.

§. 140.

Das **Umdrehungs-Hyperboloid** mit einem Mantel. So wurde in §. 84 diejenige Umdrehungsfläche genannt, welche von einer halben Hyperbel beſchrieben wird, die ſich um ihre imaginäre Axe dreht; aber dieſe nämliche Fläche, welche verſchiedene, ſehr merkwürdige Eigenſchaften beſitzt, kann noch auf eine andere Art erzeugt werden, indem ſich nämlich eine Gerade um eine andere unbewegliche Gerade, mit der ſie nicht in einerlei Ebene liegt, ſo dreht, wie es das in §. 75 aufgeſtellte Geſetz der Umdrehung fordert. Fig. 47.

Um dieſes zu beweiſen, ſei OZ die unbewegliche und ADM die bewegliche Gerade; ferner ſei OD ihre kürzeſte Entfernung, welche horizontal ſein wird, wenn die Umdrehungsaxe vertikal iſt. Dieſe Linie OD wird bei ihrer Umdrehung um OZ einen Horizontalkreis EDF beſchreiben, der offenbar der kleinſte aller Parallelkreiſe — der Kehlkreis — die Verengung der Umdrehungsfläche ſein wird, und deſſen Tangente DP nothwendig die Horizontalprojection der beweglichen Geraden ADM ſein muß. Daraus aber folgt, daß dieſe Gerade irgend eine Meridianebene ZOX in einem Punkt M ſchneiden werde, welcher auf der in P errichteten Vertikalen ſich befindet.*) Conſtruirt man nun auf dieſe Art alle die Punkte M, M′, F...., in welchen die unbewegliche Ebene ZOX nach und nach von der beweglichen Geraden ADM in ihren verſchiedenen Lagen geſchnitten wird; ſo erhält man die Meridiancurve MM′F der, durch die Gerade ADM erzeugten, Umdrehungsfläche. Nun iſt noch

*) Die Figur iſt perſpectiviſch auf die Ebene ZOX als auf eine Tafel gezeichnet; daher denn alle Hauptlinien, welche hinter dieſer Tafel liegen, punktirt ſind.

zu erweiſen, daß dieſe Curve eine Hyperbel ſei, welche die Linie $OF = OD$ zur reellen Halbare habe. Man beſtimme daher einen ihrer Punkte, z. B. M, durch Coordinaten, welche den Aren OX und OZ parallel ſind; und da die Entfernung OD ſowohl, als auch der Winkel MDP, den die Gerade ADM mit dem Horizont bildet, während ihrer Umdrehung unverändert bleiben, ſo ſetze man $OP = x$, $PM = z$, $OD = \delta$, tang. $MDP = \alpha$, ſo erhält man aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken MPD und ODP:

$$\text{tang. } MDP = \frac{MP}{DP} = \frac{MP}{\sqrt{OP^2 - OD^2}};$$

und wenn man die vorhin angenommenen Bezeichnungen ſubſtituirt:

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 - \delta^2}};$$

woraus man die Gleichung $z^2 = \alpha^2 (x^2 - \delta^2)$ erhält, welche beweist, daß die Meridiancurve wirklich eine Hyperbel iſt, deren reelle Halbare $= \delta$. Daraus aber folgt ſodann weiter, daß der von der beweglichen Geraden ADM durchlaufene Ort ein durch Umdrehung erzeugtes Hyperboloid mit einem Mantel iſt.

§. 141.

Dieſe Umdrehungsfläche läßt noch eine zweite geradlinige Erzeugende zu; denn zieht man in der Vertikalebene MDP, welche den Kehlkreis EDF berührt, eine Gerade BDN, die mit der Vertikalen DV einen Winkel $NDV = VDM$ macht, ſo wird dieſe Gerade, wenn ſie ſich um OZ dreht, die nämliche Fläche, wie ADM, erzeugen, weil irgend zwei Punkte M und N, die man in gleicher Höhe auf dieſen Geraden nimmt, den nämlichen Kreis MNL beſchreiben werden. Um dieſe letztere Behauptung zu rechtfertigen, darf man nur die Punkte M, N, Z, V, in welchen eine Horizontalebene die verſchiedenen Linien ſchneidet, von denen geſprochen wurde, zu zwei und zwei verbinden; ſo kann man mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke MVD und NVD, welche offenbar congruent ſind, beweiſen, daß es auch die rechtwinkligen Dreiecke ZVM und ZVN ſein müſſen; daraus aber folgt, daß $ZM = ZN$, und daß alſo die beiden Punkte M und N gleichweit von der Are OZ entfernt ſind. Es gibt alſo auf einem Hyperboloid zwei Syſteme von Geraden,

$$A, A_1, A_2, \ldots . E, B_1, B_2, \ldots .,$$

von denen das erſte aus den aufeinanderfolgenden Lagen, welche die Erzeugende AD annimmt, das zweite hingegen aus den verſchiedenen Lagen der Erzeugenden BD beſteht. Und da alle dieſe Geraden, zu zwei und zwei, in vertikalen Ebenen, wie MDN, ſich befinden, ſo folgt daraus, daß alle Erzeugungslinien der beiden Syſteme ſich auf der Ebene des Kehlkreiſes und zwar als Tangenten an deſſen Umfang projiciren.

§. 142.

Durch jeden Punkt R auf der Oberfläche des Hyperboloids gehen zwei von dieſen Geraden; denn die beiden Erzeugungslinien AD und BD gehen in zwei verſchiedenen Zeitpunkten ihrer Umdrehung durch dieſen Punkt R und nehmen daſelbſt zwei von einander verſchiedene Lagen RA_2 und RB_2 ein, weil die erſte links und die zweite rechts von dem Meridian ZOR liegt. Es folgt daraus, daß die Berührungsebene in R durch die beiden Linien RA_2 und RB_2 beſtimmt iſt, weil dieſe Linien ſich auf der Umdrehungsfläche befinden, und als Gerade ihre eigenen Tangenten ſind. Man bemerke aber wohl, daß die Ebene A_2RB_2, ob ſie gleich die Gerade RB_2 ganz enthält, die Fläche in keinem andern Punkt dieſer Geraden, als in R, berührt, denn in dem Punkt D_2 z. B. iſt aus dem nämlichen Grunde, wie vorhin, $A_2 D_2 B_2$ die Brührungsebene; nun kann aber dieſe letztere nicht mit $A_2 RB_2$ zuſammenfallen, weil die beiden Erzeugenden $A_2 R$ und $A_2 D_2$, welche einerlei Syſtem angehören, nicht in einer und derſelben Ebene liegen können, wie ſogleich bewieſen werden ſoll.

Lehrſatz. Zwei Gerade AD und $A_2 D_2$, welche zu einerlei Syſtem von Erzeugungslinien gehören, liegen nie in einer und derſelben Ebene. Fig. 47.

Beweis. Die beiden Geraden AD und $A_2 D_2$, deren Horizontalprojectionen die in T ſich ſchneidenden Tangenten DT und $D_2 T$ ſind, können nichts gemeinſchaftlich haben, als die Punkte, welche auf der Vertikalen TS liegen; nun ſchneidet aber dieſe Vertikale die Linie $A_2 D_2$ oberhalb des Kehlkreiſes — in S, und die AD unterhalb deſſelben in S', weil die untern Theile dieſer zwei zu einerlei Syſtem gehörigen Erzeugungslinien, beide auf der linken Seite der ihnen zugehörigen Meridiankreiſe ZOD_2 und ZOD liegen und der Punkt T zwiſchen dieſen beiden Meridianen ſich befindet: mithin können ſich erſtens die beiden Geraden AD und $A_2 D_2$ nicht ſchneiden; zweitens ſind ſie auch nicht parallel, denn ihre horizontalen Projectionen ſchneiden ſich in T; folglich liegen die Erzeugenden AD und $A_2 D_2$, welche beide dem Syſtem A angehören, nicht in einer und derſelben Ebene.

Betrachtet man diejenigen Horizontalprojectionen zweier dieſer Geraden, welche durch die Endpunkte des nämlichen Durchmeſſers im Kehlkreiſe gehen, ſo ſind dieſe zwar parallel; im Raume ſelbſt aber wird die eine der Erzeugenden rechts, die andere links geneigt ſein in Beziehung auf den Meridian, der durch jenen Durchmeſſer geht, ſo daß ſie alſo nicht parallel ſein können. Daß ſie ſich alsdann aber auch nicht ſchneiden können, iſt ebenfalls klar.

Auf eine ähnliche Art läßt ſich beweiſen, daß auch die Geraden B, B_2, B_3 .... vom zweiten Syſtem nicht zu zwei und zwei in einerlei Ebene liegen können.

§. 144.

Lehrſatz. Jede Gerade vom Syſtem A ſchneidet (ohne ihre Lage zu verändern) alle Geraden B, B_2, A_3, ... des andern Syſtems.

Beweis. Für die Geraden AD und BD, welche in einerlei Vertikalebene liegen, iſt dieſer Satz einleuchtend; aber nun vergleiche man auch AD mit irgend einer Geraden $B_2 D_2$ des andern Syſtems. Dieſe beiden Linien werden durch die Tangenten DT und $D_2 T$ am Kehlkreiſe horizontal projicirt, und da ſich dieſe Tangenten in T ſchneiden, ſo muß die Vertikale TS' nothwendig den beiden Geraden AD und $B_2 D_2$ begegnen; der Punkt dieſer Begegnung aber muß für jede derſelben unterhalb des Kehlkreiſes fallen, da bekannt iſt, daß DA auf der linken Seite des Meridians ZOD, und $D_2 B_2$ auf der rechten Seite des Meridians ZOD_2 liegt, während der Punkt T zwiſchen beiden Meridianen ſich befindet. Ferner erhellt aus der Form der Meridiancurve, daß eine Gerade wie TS', welche parallel mit der Axe OZ iſt, die Umdrehungsfläche nur in zwei Punkten ſchneiden könne, von denen nur einer S' in den unterhalb des Kehlkreiſes liegenden Theil der Fläche fallen wird; ſo daß alſo dieſer einzige Punkt mit denen zuſammenfallen muß, in welchen die Vertikale TS' den Erzeugenden DA und $D_2 B_2$, welche auf dieſer untern Fläche liegen, begegnete. Dieſe Erzeugenden ſchneiden ſich alſo wirklich in dem Punkt S'.

Im Falle man zwei Gerade vergleicht, von denen die eine dem Syſtem A, die andere dem Syſtem B angehört, und welche durch die Endpunkte eines und deſſelben Diameters im Kehlkreiſe gehen; ſo wird man finden, daß ſie parallele Projectionen haben, und daß ſie ſelbſt im Raume parallel ſind: ihr Durchſchnitt geſchieht alſo in einem unendlich entfernten Punkte, aber beide Erzeugende liegen wenigſtens in einerlei Ebene.

Auf eine ähnliche Art erweist man, daß jede Erzeugende vom Syſtem B, ohne ihre Lage zu ändern, alle Erzeugenden vom Syſtem A ſchneidet oder ſich wenigſtens in einerlei Ebene mit jeder derſelben befindet.

§. 145.

Unter dem allgemeinen Namen **windschiefe Fläche** versteht man jede Fläche, die dadurch erzeugt wird, wenn sich eine Gerade so bewegt, daß von allen den Lagen, welche sie während ihrer Bewegung annimmt, nie zwei in einerlei Ebene fallen. Betrachtet man nun das Hyperboloid der Fig. 47. entweder als den Ort der verschiedenen Lagen A, A_2, A_3, ..., welche die Erzeugende AD während ihrer Umdrehung um OZ annimmt, oder als den Ort der verschiedenen Geraden B, B_2, B_3, . . . vom andern System, so sieht man, daß es in beiden Fällen obiger Definition der windschiefen Fläche entspricht (§. 143); das Umdrehungshyperboloid mit einem Mantel gehört also jener allgemeinen Classe von Flächen an, die man windschiefe nennt, und von welchen im siebenten Abschnitt besonders die Rede sein wird.

§. 146.

Fig. 47. Wenn man durch den Mittelpunkt O des Hyperboloids parallel mit den Erzeugenden DA und DB, zwei Gerade Oa und Ob zieht, so werden diese mit der Axe OZ zwei gleiche Winkel bilden, und werden mithin, wenn man sie um OZ dreht, einen und denselben geraden Kegel beschreiben, dessen Seitenlinien alle beziehlich parallel sein werden mit den Erzeugenden A, A_2, A_3 . . . und B, B_2, B_3 . . . . . des Hyperboloids. Man kann ihn den asymptotischen Kegel der Fläche nennen; denn, um ihn aus letzterer zu erhalten, darf man nur in der Meridiangleichung (§. 140) $z^2 = \alpha^2 (x^2 - \delta^2)$ die Entfernung $OD = \delta$ gleich Null setzen, so erhält man für den Meridian des geraden Kegels, $z = \pm \alpha x$, d. h. zwei Gerade, welche die Asymptoten jener Meridianhyperbel sind.

§. 147.

Läßt man die Entfernung δ wachsen oder abnehmen, ohne zugleich α oder die Neigung der Erzeugungslinien AD zu ändern, so erhält man nach und nach verschiedene Hyperboloide, deren Meridiane ähnliche Curven sind; denn die Axen der Meridianhyperbel sind δ und $\alpha\delta$*) und daher ihr Verhältniß $\frac{\alpha\delta}{\delta} = \alpha$, also eine von δ unabhängige Größe. Daraus aber folgt, daß alle jene verschiedenen Hyperboloide ähnliche und concentrische Flächen sind; und da sich diese Aehnlichkeit auch auf den asymptotischen Kegel, für welchen δ gleich Null ist, erstrecken muß, so kann man behaupten, daß die Durchschnitte, die man erhält, wenn man das Hyperboloid und den asymptotischen Kegel durch einerlei Ebene schneidet, ähnliche und concentrische Curven seien.**) Dieser Satz wird später von Nutzen sein.

§. 148.

Nun kann, nachdem die Natur und die Haupteigenschaften des Umdrehungshyperboloids gezeigt worden sind, zur genauen Darstellung desselben mittels zweier Projectionsebenen geschritten werden.

Fig. 46. Es seien O und l' O' Z' die beiden Projectionen der Umdrehungsaxe, welche noch immer als vertikal angenommen wird. Die bewegliche Gerade nehme man in irgend einer beliebigen Lage, in welcher ADB ihre

*) Bezeichnet nämlich δ die reelle und β die imaginäre (Halb-) Axe der Hyperbel, so ist bekanntlich

$$z^2 = \frac{\beta^2}{\delta^2}(x^2 - \delta^2).$$

Und da aus §. 140 auch $z^2 = \alpha^2 (x^2 - \delta^2)$, so ist mithin $\alpha^2 = \frac{\beta^2}{\delta^2}$, also $\alpha\delta = \beta$.

Anmerk. des Ueberf.

**) Siehe Analyt. Geom. im Raum, 9. Kap.

horizontale und $A'D'\beta$ ihre vertikale Projection sei. Nun construire man zuerst den Meridian der Umdrehungsfläche. Dieses geschieht, indem man die verschiedenen Punkte sucht, in welchen die Vertikalebene OG von der Geraden (AB, $A'\beta$) in ihren auf einander folgenden Lagen geschnitten wird. In ihrer gegenwärtigen Lage schneidet sie die Ebene OG in dem Punkt (M, M''), welcher also der gesuchten Curve angehören und in welchem diese die Projection $A'M''\beta$ berühren muß. Denn obgleich die Tangente am Meridian und die Gerade (AB, $A'\beta$) im Raume sehr von einander verschieden sind; so liegen doch beide in der Berührungsebene, welche durch (M, M'') geht; und da diese Ebene senkrecht auf der Meridianebene OG und folglich auch senkrecht auf der vertikalen Projectionsebene steht, so muß hier $A'\beta$ mit der Vertikalprojection der Tangente zusammenfallen. Die Gerade $A'\beta$ wird also wirklich die Projection der Meridiancurve in M'' berühren.

Nun wird während der Umdrehung von AB irgend ein Punkt (n, n') dieser Linie einen Kreisbogen beschreiben, der sich horizontal in nN und vertikal in n'N' (welche eine Horizontale sein muß) projicirt. Ist daher der Punkt (n, n') in der Vertikalebene OG angelangt, so werden N und N' seine Projectionen sein. Man hat also wieder einen neuen Punkt der Meridiancurve G'N'M'G'', und alle andern werden auf die nämliche Art construirt. Wendet man dieses Verfahren auf den Endpunkt (D, D') der Horizontalen (OD, O'D') an, welche auf der Axe und zugleich auf der Erzeugenden senkrecht ist, und ihre kürzeste Entfernung mißt, so erhält man den Punkt (F, F') des Meridians, welcher der Axe am nächsten ist, und welcher bei der Umdrehung der beweglichen Geraden den kleinsten der Parallelkreise oder den Kehlkreis beschreibt, der hier in DFE und E'F' projicirt ist. Eben so wird der Fußpunkt (A, A') der Erzeugenden, indem er den Kreis ALG beschreibt, der die Horizontalprojection der Umdrehungsfläche ist, den Punkt (G, G') der Meridiancurve bestimmen. Nun muß zwar die Ausdehnung dieser Curve unbegrenzt sein, weil die Erzeugungslinie selbst eine Linie von unbestimmter Größe ist; allein es wird hier, um einen deutlicheren Begriff von der Fläche zu geben, angenommen, die Erzeugende habe ihre Endpunkte in (A, A') und (B, β), welche gleich weit von dem Punkte (D, D'), der den Kehlkreis beschreibt, entfernt sind. Durch diese Annahme erhält man eine Fläche, welche von zwei gleich großen Kreisen begrenzt wird, die beide den Kreis GAH zur Horizontalprojection und die Linien G'H' und G''H'' zu Vertikalprojectionen haben. Daß der Meridian G'F'G'' ein Zweig von einer Hyperbel sei, welche den Durchmesser E'F' des Kehlkreises zur reellen Axe hat, wurde schon im §. 140 erwiesen, und es ist noch zu bemerken, daß hier, wie bei allen Umdrehungsflächen der Hauptmeridian G'F'G'' genau den sichtbaren Umriß der Fläche in Beziehung auf die Vertikalebene bilde, weil alle Berührungsebenen längs dieses Meridians senkrecht auf jener Ebene stehen (§. 129). Aus einem ähnlichen Grunde ist der Kehlkreis DFE der sichtbare Umriß des Hyperboloids in Beziehung auf die Horizontalebene; denn alle Berührungsebenen längs des Kehlkreises sind vertikal.

§. 149.

Um die graphische Darstellung dieses Hyperboloids und seiner Erzeugung durch eine gerade Linie zu vervollständigen, muß man diese Gerade in mehreren verschiedenen Lagen construiren. Da sie nun während ihrer Umdrehung in constanter Entfernung von der Axe bleiben soll, so wird ihre Horizontalprojection stets eine Tangente an dem Kreis DFE sein. Man ziehe daher nach Belieben die Tangente $A_2D_2B_2$, hierauf projicire man den Fußpunkt A_2 auf die Projectionsaxe in den Punkt A'_2, und den Berührungspunkt D_2 auf E'F' in D'; so erhält man $A'_2D'_2\beta_2$ als die Vertikalprojection derjenigen Geraden, die in A_2B_2 horizontal projicirt ist; und da der Endpunkt β_2, der sich auf dem oberen Kreis G''H'' befindet, offenbar in B_2 projicirt sein muß, so läßt sich leicht die Richtigkeit der Construction erproben, indem man untersucht, ob B_2 und β_2 in einer auf der Projectionsaxe senkrechten Linie liegen. Die andern Lagen der Erzeugungslinie werden auf eine ähnliche Art construirt und ihre vertikalen Projektionen müssen stets die Meridianhyperbel berühren, wie es im vorigen Paragraphen für Fig. 4

die erſte Gerade ADB erwieſen wurde. Nur in dem Falle, da man die Horizontalprojection parallel mit der Projectionsaxe nimmt, wie KL, wird die entſprechende Vertikalprojection Q′ β eine Aſymptote der Hyperbel ſein, weil eine ſolche Erzeugende die Meridianebene nur in unendlicher Entfernung treffen kann; ihre Vertikalprojection hört aber darum nicht auf, eine Tangente an der Meridianhyperbel zu ſein, nur iſt der Berührungspunkt unendlich weit entfernt, d. h. ſie iſt eine Aſymptote.

§. 150.

Um mehr ſymmetriſche Reſultate zu erhalten, hat man in gegenwärtiger Figur den Kreisumfang GAH in vierzehn gleiche Theile getheilt und hierauf die Sehnen AB, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, . . . ſo gezogen, daß ſie gleich große Bogen umſpannen; daraus folgt, daß alle dieſe Sehnen, welche einander gleich ſein müſſen, zugleich Tangenten an einem und demſelben Kreiſe EDF ſein werden. Die ihnen entſprechenden vertikalen Projectionen hat man auf die im vorigen Paragraphen beſchriebene Art erhalten. Ob nun gleich dieſe Sehnen zu zwei und zwei einen Theilpunkt des Kreisumfanges gemeinſchaftlich haben, ſo kann man doch leicht unterſcheiden, welche Theile unter- und welche oberhalb des Kehlkreiſes liegen, weil die erſteren, als unſichtbar auf der Horizontalebene, hier punktirt angegeben wurden. Was die Vertikalebene betrifft, ſo ſind hier nur diejenigen Theile der Erzeugungslinien unſichtbar, welche hinter die Meridianebene, durch welche der ſichtbare Umriß auf der Vertikalebene beſtimmt wird (§. 148), fallen. Dieſe Theile mußten daher ebenfalls punktirt werden.

§. 151.

Aus §. 141 iſt bekannt, daß das Hyperboloid noch ein anderes Syſtem geradliniger Erzeugungslinien zuläßt, deren Horizontalprojectionen gleichfalls die Tangenten AB, $A_2 B_2$, . . . ſind, welche aber im Raume eine Lage haben, die, in Beziehung auf die Vertikale, der Lage der vorhergehenden Erzeugenden entgegengeſetzt iſt. So würde z. B. diejenige dieſer neuen Erzeugunslinien, deren Projection die Tangente BDA *) iſt, ihren Fußpunkt in (B, B′) und ihren obern Endpunkt in (A, α) haben, während ſie die Gerade ABD des vorigen Syſtems in dem Punkt (D, D′) ſchnitte; ihre Vertikalprojection wäre alſo die Linie B′D′α, welche im vorigen Syſtem die Projection der Geraden LMC war. Um aber dieſes Zuſammenfallen der Projectionen zu vermeiden, wurden in gegenwärtiger Figur nur die Erzeugenden des einen Syſtems dargeſtellt; hätte man beide Syſteme zugleich darſtellen wollen, ſo wären die mit vollem Strich gezogenen Theile des einen auf die punktirten des andern Syſtems gefallen, und man hätte die ſichtbaren oder unſichtbaren Theile in jedem Syſtem nicht mehr unterſcheiden können. Ueberdieß iſt es gar nicht ſchwer, ſelbſt aus gegenwärtiger Figur die Geraden des Syſtems B auszufinden, wenn man nur die mit vollem Strich gezeichneten Theile für punktirt nimmt und umgekehrt, wie es bei der Linie BDA geſchehen iſt. Man hätte auch noch mehr Erzeugungslinien zeichnen können, um den Effect der Zeichnung zu vermehren; doch mußte in dieſer Beziehung ein Opfer gebracht werden, um die Lage derjenigen Punkte und Linien, welche dem Leſer als beſonders merkwürdig zu bezeichnen waren, ſo deutlich als möglich angeben zu können.

§. 152.

Fig. 46. **Aufgabe.** Eine Berührungsebene an das Hyperboloid zu legen.

Auflöſung. Es ſey R die Horizontalprojection des durch die Aufgabe bezeichneten Berührungspunktes. Um nun die andere Projection zu erhalten, bemerke man, daß durch den auf der Oberfläche gegebenen Punkt eine Erzeugende vom Syſtem A geht, welche horizontal durch die Tangente PRA des Kehlkreiſes und vertikal

*) Um die Lage der verſchiedenen Geraden deutlicher anzugeben, wird immer derjenige Buchſtabe zuerſt genannt werden, welcher den untern Endpunkt der Geraden bezeichnet, von der die Rede iſt.

ch P′α projicirt iſt; projicirt man daher R auf den Punkt R′ der letzteren Geraden, ſo hat man in (R, R′) vollſtändige Projection des Berührungspunktes. Aber es gibt noch eine zweite vertikale Projection, welche horizontalen R entſpricht. Denn da man durch R, außer PRA, noch eine Tangente BRQ an den Kehlkreis en kann, deren Vertikalprojection B′Q″ iſt, und welche auch zu den Erzeugenden des Syſtems A gehört; ſo f man nur den Punkt R in den Punkt R″ der Geraden B′Q″ projiciren, um einen zweiten Punkt (R, R″) der Oberfläche des Hyperboloids zu erhalten, deſſen Horizontalprojection ebenfalls R iſt.

§. 153.

Man betrachte nun zuerſt den Punkt (R, R′) und erinnere ſich aus §. 142, daß durch denſelben zwei Erzeugungslinien des Hyperboloids durchgehen müſſen; die eine iſt die Gerade (PRA, P′R′α), welche dem Syſtem A angehört; die andere, welche dem Syſtem B angehört, würde die Geraden QRB und Q′R′β zu Projectionen haben. Da nun die Berührungsebene in (R, R′) dieſe beiden Geraden enthalten muß, ſo wird QPS ihre horizontale Spur ſein. Um die andere Spur SV′ zu erhalten, darf man ſich nur in der Berührungsebene eine Horizontale durch (R, R′) gezogen denken, von deren Projectionen RV und R′V′ die erſte mit der Spur QPS und die zweite mit der Projectionsaxe parallel iſt; ſo wird durch den Punkt (V, V′), in welchem dieſe Horizontale die Vertikalebene ſchneidet, die Lage der vertikalen Spur SV′ beſtimmt.

Die Berührungsebene in (R, R″) wird ebenfalls durch zwei Erzeugungslinien beſtimmt, welche ſich in dieſen Punkte ſchneiden;

die eine iſt (BRQ, B′R″Q″) aus dem Syſtem A,
die andere (ARP, A′R″P″) aus dem Syſtem B.

Die horizontale Spur dieſer Ebene wird alſo die Linie AB ſein, und die vertikale erhält man, wie vorhin, mittels einer Horizontalen, die man ſich in der Berührungsebene durch (R, R″) gezogen denkt.

§. 154.

Man betrachte nochmals die Berührungsebene PSV′, welche das Hyperboloid in (R′, R) berührt, und Fig. 46.
merke, daß ihre horizontale Spur PQ ſenkrecht ſteht auf der durch den Berührungspunkt gehenden Meridianebene ist, wie ſolches auch nach §. 134 bei jeder Umdrehungsfläche mit vertikaler Axe der Fall ſein muß. Aber eben ſie Ebene PSV′ berührt das Hyperboloid ſonſt in keinem andern Punkte der Geraden (PRA, P′R′α), obſchon ſie ganz in ihr liegt. Berührte ſie daſſelbe z. B. in (T, T′), ſo müßte ihre horizontale Spur PQ ſenkrecht auf dem Meridian OT ſtehen, was unmöglich iſt. Außerdem geht durch den Punkt (T, T′) der Geraden (PRA, R′α), welche dem Syſtem A angehört, noch eine Erzeugungslinie (HTB$_2$, H′T′β$_2$) des Syſtems B, welche unbar **außerhalb** derjenigen Berührungsebene liegt, von welcher die Rede iſt, weil der Fußpunkt H dieſer Erzeugenden außerhalb PQ liegt. Folglich entſpricht die Ebene PSV′ für den Punkt (T, T′) der Definition der wahren Berührung nicht, weil ſie nicht alle durch (TT′) gehenden Linien der Umdrehungsfläche in ſich enthält. In dem Punkt (R, R′) aber enthält die Ebene nicht nur die beiden Erzeugenden, welche ſich daſelbſt ſchneiden, ſondern auch die Tangente an den Parallelkreis, welche (RV, R′V′) iſt, ferner die Tangente an den Meridian, und überhaupt die Tangente jeder andern Curve, welche man durch (R, R′) auf dem Hyperboloid ziehen kann.

Dieſe beſondere Eigenſchaft der Berührungsebene an der windſchiefen Fläche des Hyperboloids iſt zwar ſchon im §. 142 bewieſen worden, doch wurde für nöthig erachtet, hier den Beweis zu wiederholen und durch die Betrachtungen zu unterſtützen, weil ſehr viel daran liegt, daß man ſich einen deutlichen Begriff machen könne von der Lage einer Ebene, welche die Fläche in einem Punkt (R, R′) berührt, und ſie in allen andern Punkten, welche ſie noch mit ihr gemein hat, ſchneidet, wie hier nach den zwei Geraden (PRA, P′R′α) und (QRB, Q′R′β).

§. 155.

Alle Aufgaben über Berührungsebenen, welche in diesem Abschnitte aufgelöst wurden, bezogen sich auf *cylindrische*, *conische* und *Umdrehungsflächen*. Es wäre aber überflüssig, noch mehr Beispiele dieser Art über andere Flächenarten anzuführen; denn die Verfahrungsweise für jeden besondern Fall läßt sich immer auf das allgemeine Verfahren des §. 103 zurückführen, und es werden sich in der Folge genug Gelegenheiten ergeben, dasselbe anzuwenden. Dagegen wäre jetzt noch diejenige Aufgabe über Berührungsebenen zu behandeln, *wenn der Berührungspunkt nicht auf der Fläche gegeben ist*. Für cylindrische und conische Flächen ist diese Aufgabe bereits gelöst worden, weil die Auflösung so einfach war, daß es nicht nöthig schien, sie zu verschieben; für andere Flächen hingegen kann die Auflösung dieser Aufgabe erst in einem der folgenden Abschnitte gegeben werden, weil sie manchmal ein Verfahren erheischt, das sich auf die Durchschnitte der Flächen gründet.

Dritter Abschnitt.

Von den entwickelbaren und von den Umhüllungsflächen.

Erstes Kapitel.

Von den entwickelbaren Flächen.

§. 156.

Eine biegsame, aber nicht dehnbare Fläche, welche sich ohne Bruch oder Verdoppelung abrollen und auf einer Ebene ausbreiten läßt, heißt entwickelbar, abwickelbar (développable).

Man sieht leicht ein, daß nicht jede Fläche (z. B. ein Stück von einer Kugel) diese Eigenschaft hat; es muß also in der Erzeugungsart einer entwickelbaren Fläche irgend eine besondere Bedingung vorkommen, welche sie für jene Umformung fähig macht. Diese Bedingung wird bald (§. 175) allgemein nachgewiesen werden; zuvor aber scheint es räthlich, erst zwei besondere Arten von Flächen, welche sich auf einer Ebene ausbreiten lassen, zu untersuchen: nämlich die Cylinder- und Kegel-Flächen. Auch ist jetzt der schickliche Augenblick gekommen, Betrachtungen über die Methode des Unendlichkleinen einzuführen: eine Methode, welche, richtig aufgefaßt, alle nur wünschenswerthe Schärfe und für die Folge den doppelten Vortheil gewährt, daß sie anzustellende Untersuchungen abkürzen, und die graphischen Operationen der darstellenden Geometrie mit Leichtigkeit vorbereiten hilft.

§. 157.

Da die Tangente einer Curve die Gränze aller der Lagen ist, welche eine Sekante annimmt, deren Durchschnittspunkte sich fort und fort nähern; so kann man also die Tangente als eine Gerade betrachten, welche durch zwei einander unendlich nahe Punkte der Curve geht, oder welche ein Element mit letzterer gemein hat. Auf diese Art setzt man freilich an die Stelle der Curve ein in dieselbe eingeschriebenes Polygon, dessen Seiten und äußere Winkel unendlich klein sind, und dessen Seiten, wenn man sie verlängert, zu Tangenten an der Curve werden; hält man aber von den Eigenschaften eines solchen eingeschriebenen Polygons nur diejenigen fest, welche unabhängig von der Zahl und Größe seiner Seiten gelten, so darf man dieselben auch noch als gültig annehmen, wenn man bei der Vermehrung der Polygonsseiten zur Gränze gelangt ist, d. h. wenn diese Seiten unendlich klein geworden sind, da denn der Unterschied zwischen Polygon und Curve gänzlich verschwindet, und beide als ganz identische Größen angesehen werden können.

§. 158.

Nun aber wurde in §. 95 streng erwiesen, daß, wenn man durch einen und denselben Punkt einer krummen Fläche verschiedene Curven zieht, und durch eben diesen Punkt Tangenten an jene Curven legt, diese Tangenten alle in der nämlichen Ebene liegen: man kann also sagen, diese Ebene, welche die Berührungsebene genannt wurde, habe mit der krummen Fläche ein Flächenelement gemeinschaftlich, das durch alle die Linien-Elemente gebildet werde, welche die verschiedenen Curven und ihre Tangenten gemeinschaftlich haben. Dieses

Flächenelement, das Element der Berührung, ist im Allgemeinen, nach allen Richtungen hin unendlich klein, wenn anders die krumme Fläche nicht von der Art ist, daß mehrere auf einander folgende Punkte derselben einerlei Berührungsebene haben.

§. 159.

Fig. 48. Von einem Cylinder z. B. ist bekannt, daß er von einer Berührungsebene BAT nach der ganzen Länge einer Erzeugenden AMB berührt werde (§. 99): hier hat also die Berührungsebene mit der krummen Fläche ein Element ABB'A' von unbestimmter Länge gemeinschaftlich, das aber zwischen den beiden unendlich nahen Erzeugenden enthalten ist, welche durch die der Grundlinie AC und ihrer Tangente AT gemeinschaftlichen Punkte A und A' gehen. Wie in der Note zum §. 109, so muß auch hier das Flächenelement von der Erzeugenden wohl unterschieden werden. Dieß ist in der That sehr wesentlich: denn bei windschiefen Flächen wird es sich zeigen, daß die Erzeugende eine der krummen Fläche und der Berührungsebene gemeinschaftliche Gerade ist, während das Flächenelement von unbestimmter Länge nicht ganz in jener Ebene liegt.

Eine conische Fläche, welche von ihrer Berührungsebene nach der ganzen Länge einer Erzeugenden berührt wird (§. 100), hat, wie die Cylinderfläche, mit der Berührungsebene ein Flächenelement von unbestimmter Länge gemeinschaftlich, das aber zwischen zwei unendlich nahen Erzeugenden enthalten ist.

§. 160.

Eine Cylinderfläche ist immer entwickelbar.

Fig. 48. Man denke sich die Cylinderfläche durch eine auf den Erzeugenden senkrechte Ebene, nach der Curve CA geschnitten. Diese Curve heißt der senkrechte Schnitt*) des Cylinders, und man kann sie als die Grundlinie oder als die Leitlinie der beweglichen Geraden betrachten, welche den Cylinder erzeugt hat. Hierauf setze man, für einen Augenblick, das eingeschriebene Polygon CAA'A'' an die Stelle jener Curve, so erhält man statt des Cylinders ein senkrechtes Prisma. Nun lasse man die Seitenfläche B''A''A'B' sich so lange um
Fig. 49. die Kante B'A' drehen, bis sie mit der Seitenfläche B'A'AB in einerlei Ebene zu liegen kommt; so wird die Kante A'A'' in die Lage A'a'' kommen, und sich in der Verlängerung von AA' befinden, weil beide Geraden fortwährend senkrecht auf der Kante A'B' bleiben. Ferner lasse man die Ebene BAa''b'' sich um die Kante AB so lange drehen, bis sie mit der folgenden Seitenfläche in einerlei Ebene zu liegen kommt, und fahre so fort, so werden nach und nach alle Seitenflächen des Prisma in eine einzige Ebene zu liegen kommen. Die prismatische Fläche ist also entwickelt, ohne daß ihre Größe sich geändert hätte. Zugleich bemerke man, daß alle Seiten des Polygons CAA'A'' nach der Entwicklung eine einzige gerade Linie bilden, auf welcher alle Seitenkanten des Prisma senkrecht stehen, wie solches für die beiden ersten Polygonseiten AA' und A'A'' bewiesen worden ist. Die Länge dieser geraden Linie wird der Summe aller Polygonseiten gleich sein, während die verschiedenen Kanten AB, A'B', ... ihre anfängliche Länge beibehalten haben.

§. 161.

Fig. 48. Alle diese Folgerungen bleiben wahr, wie groß auch die Seitenzahl des Polygons seyn mag, das man der Curve CAA' substituirt hat; sie gelten also auch noch für einen Cylinder, der die Gränze der eingeschriebenen

*) Der Kürze halber wird hier oft derjenige Cylinder ein gerader, senkrechter genannt, dessen Grund- oder Richtungs-Linie ein senkrechter Schnitt ist, ohne daß man damit ausdrücken wollte, dieser Schnitt sei ein Kreis; es soll also jene Benennung nichts Besonderes in der Natur des Cylinders bezeichnen; im Gegentheil kann jede Cylinderfläche, wenn man sie, wie hier, durch eine auf den Erzeugenden senkrechte Ebene schneidet, ein senkrechter Cylinder genannt werden.

Prismen ist, oder, um das Nämliche mit andern Worten auszudrücken, für einen Cylinder, der nichts anderes ist als ein Prisma mit einer Grundfläche von unendlich vielen Seiten. Es ist also

1) jede cylindrische Fläche entwickelbar;

2) bei dieser Entwicklung wird der auf den Erzeugenden senkrechte Durchschnitt zu einer geraden Linie;

3) diese Erzeugenden bleiben senkrecht auf jener Geraden, und behalten ihre anfängliche Länge über oder unter derselben bei.

§. 162.

Wäre irgend eine Curve GMM′ auf der Cylinderfläche verzeichnet, so würde, wenn man wieder ein Prisma statt des Cylinders setzte, jene Curve durch ein Polygon GMM′M″ vertreten werden; entwickelte man nun das Prisma, indem man seine Seitenflächen sich so um die auf einander folgenden Kanten drehen ließe, bis sie sich alle in einer Ebene befänden; so würden zwar die Seiten des Polygons hinsichtlich ihrer Länge keine Aenderung erleiden, aber das Polygon selbst würde seine Gestalt ändern, weil z. B. der Winkel MM′M″*) in den Winkel MM′m″ überginge. Ferner, da die Seite M′M″ bei dieser Entwickelung sich um die Kante B′M′ als um eine Axe dreht, so wird der Winkel B′M′M″ unverändert und dem Winkel B′M′m″ gleich bleiben; eben so bleibt auch der Winkel BMM′ oder TMA unverändert, dessen einer Schenkel TMM′ beim Uebergange des Polygons GMM′M″ in die Curve GMM′ (Fig. 48.) zu einer Tangente an letzterer wird. In sofern nun alle diese Bemerkungen ganz unabhängig sind von der größern oder mindern Kleinheit der Seitenflächen des Prisma, und da sie also auch noch wahr sein müssen für die Gränze dieses Prisma, nämlich für den Cylinder der Fig. 48., so folgt daraus, 1) daß wenn man einen Cylinder, auf dessen Fläche irgend eine Curve GM verzeichnet ist, entwickelt, diese Curve in eine andere übergehe, die man die verwandelte nennen kann, und deren Bögen die nämliche absolute Länge haben, wie die der ursprünglichen Curve; 2) diejenigen Theile der Erzeugungslinien MA, M′A′ . . . ., welche zwischen dieser Curve und dem senkrechten Durchschnitt CAA′ enthalten sind, bleiben von derselben Größe und senkrecht auf derjenigen Geraden, in welche bei der Entwickelung die Grundlinie CAA′ übergeht; 3) jede Tangente MT an der ursprünglichen Curve bildet mit der Erzeugenden MA einen Winkel, welcher unverändert bleibt, und überdieß erscheint jene Tangente MT nach der Entwickelung als Tangente an der verwandelten Curve. Diese letztere Behauptung hat ihren Grund darin, daß bei der Entwickelung des Prisma die Linie MT nicht aufhört die Verlängerung einer Seite des verwandelten Polygons zu seyn. Fig. 49. Fig. 48.

Es wird bald in mehreren Figuren gezeigt werden, wie man von diesen verschiedenen Sätzen Gebrauch machen kann, um graphisch die Entwickelung eines Cylinders sowohl, als auch der auf seiner Fläche verzeichneten Curven auszuführen.

§. 163.

Es wurde schon bemerkt, daß irgend eine auf einer Cylinderfläche verzeichnete Curve sich bei der Entwickelung jener Fläche in eine andere Linie verwandle, welche im Allgemeinen wieder eine Curve ist; doch gibt es gewisse besondere Fälle, in welchen jene erste Curve sich in eine Gerade verwandelt. Um nun die Bedingungen, unter welchen letzteres geschieht, leichter zu finden, setze man wieder an die Stelle des Cylinders und

*) Das Supplement dieses Winkels, nämlich M″M′t das, bei der Curve, zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten enthalten wäre, heißt der Contingenzwinkel, und dient dazu, die Krümmung der Curve an diesem Orte zu schätzen, wie später gezeigt werden wird (§. 198).

der Curve das ſenkrechte Prisma und das Polygon GMM′ der Fig. 49. Damit nun die Seite M′M″, wenn ſie in die Lage M′m″ kommt, ſich in der Verlängerung von MM′ befinde, iſt es hinreichend, daß

$$\text{Winkel } B'M'm'' = A'M'M = BMM'$$ ſei;

und da aus §. 152 erhellt, daß der erſte dieſer Winkel dem urſprünglichen Winkel B′M′M″ gleich bleibt, ſo reducirt ſich die vorhergehende Bedingung darauf, daß

$$\text{Winkel } B'M'M'' = BMM'$$ ſei;

die nämliche Bedingung findet auch für die übrigen auf einander folgenden Seiten des Polygons ſtatt; mithin müſſen alle Seiten des Polygons GMM′M″ die Kanten des Prisma unter einem und demſelben Winkel ſchneiden, wenn bei der Entwickelung des Prisma das Polygon zu einer geraden Linie werden ſolle. Trägt man nun dieſe von der Zahl und Größe der Seitenflächen des Prisma unabhängigen Bedingungen auf den Cylinder über und erinnert ſich, daß, nach §. 157, die Verlängerungen der Polygonſeiten, wenn dieſe unendlich klein ſind, zu Tangenten an derjenigen Curve werden, der ſich das eingeſchriebene Polygon fort und fort nähert, je kleiner man ſeine Seiten nimmt, ſo erhält man folgenden Lehrſatz:

Wenn eine auf eine Cylinderfläche gezeichnete Curve GM bei der Entwickelung jener Fläche zu einer Geraden werden ſoll, ſo dürfen nur alle an dieſe Curve gezogenen Tangenten einen unveränderlichen Winkel mit den Erzeugungslinien des Cylinders bilden.

Diejenigen Curven, welche dieſer letzteren Bedingung Genüge leiſten, heißen Schraubenlinien (hélices), was auch die Grundlinie des Cylinders, auf welchem ſie verzeichnet ſind, für eine Curve ſein mag. Die Schraubenlinien ſind mithin die einzigen Curven, welche bei der Entwickelung der Cylinderfläche geradlinig werden.

§. 164.

48. Dieſe Linien haben folgende merkwürdige Eigenſchaft:

Irgend ein Bogen GM der Schraubenlinie iſt die kürzeſte Linie, welche man zwiſchen den Punkten G und M auf der Cylinderfläche ziehen kann.

Denn vergleicht man mit dieſem Bogen GM eine andere zwiſchen den Punkten G und M gezogene Curve, ſo wird letztere nicht geradlinig werden, wenn man den Cylinder entwickelt: mithin wird ſie (nach der Entwickelung) länger ſein als der Bogen GM der Schraubenlinie, der nach der Entwickelung des Cylinders zu einer Geraden geworden iſt; aus §. 162 aber iſt bekannt, daß bei dieſer Entwickelung die verwandelten Curven die nämliche Länge behalten, wie die urſprünglichen Curven: mithin muß auch vor der Entwickelung des Cylinders der Bogen der Schraubenlinie kürzer ſein als jede andere Linie zwiſchen den Punkten G und M.

§. 165.

Man bemerke hier zugleich, daß alle Curven, welche nach der Entwickelung des Cylinders geradlinig werden, urſprünglich von doppelter Krümmung ſind, d. h. drei nächſtgelegene Tangenten derſelben, oder drei auf einander folgende Elemente befinden ſich nicht in einerlei Ebene. Man betrachte, um ſich hiervon zu überzeugen, in dem Polygon der Fig. 49. drei auf einander folgende Seiten KM, MM′, M′M″, von denen vorausgeſetzt wird, daß ſie mit den Kanten des Prisma gleiche Winkel α bilden. Wäre es nun möglich, daß dieſe drei Seiten wirklich in einer einzigen Ebene lägen, ſo müßten auch drei durch irgend einen Punkt G parallel mit jenen Seiten gezogene Gerade in einer und derſelben Ebene liegen; da aber von dieſen drei Geraden jede den gleichen Winkel α mit der Kante GD bildete, ſo müßten ſie in der Oberfläche eines ſenkrechten Kegels liegen, deſſen Axe GD wäre; nun können aber von den Erzeugenden einer Kegelfläche niemals drei in einerlei Ebene liegen, weil alsdann drei Punkte der Grundlinie, welche ein Kreis iſt, in einer geraden Linie ſich befinden. Es können daher auch die drei auf einander folgenden Seiten KM, MM′, M′M″ nicht in einerlei Ebene

jen. Da nun dieſer Satz ſtattfindet, wie klein auch die Seiten ſein mögen, ſo findet er auch noch ſtatt die Verlängerungen derſelben, wenn das Polygon zur ſtetigen Curve geworden iſt, in welchem Falle jene rlängerungen Tangenten an dieſer Curve ſind. Schraubenlinien ſind mithin immer Linien von doppelter ümmung.

§. 166.

Von dieſem allgemeinen Satze iſt der einzige Fall auszunehmen, wenn der Winkel α ein rechter iſt; denn dann verwandelt ſich der Kegel ſelbſt, deſſen im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, in eine Ebene. Nun die beſondere Schraubenlinie, welche der Vorausſetzung $\alpha = 90°$ entſpricht, nichts anderes als der ſenkrechte rchſchnitt CAA', und es iſt ſchon aus §. 161 bekannt, daß dieſer Durchſchnitt bei der Entwickelung des linders geradlinig wird. Man kann alſo wenigſtens behaupten, daß unter allen ebenen Curven, welche f einer Cylinderfläche verzeichnet werden können, nur der ſenkrechte Durchſchnitt bei der Entckelung jener Fläche geradlinig werde.

§. 167.

Bei Gelegenheit der Schraubenlinien, von denen ſo eben erwieſen wurde, daß ſie keine ebenen Curven Fig. 49.
), wird hier noch bemerkt, daß in jeder, beliebig im Raum gelegenen, Linie von doppelter Krümmung, wenn h niemals drei, doch immer zwei auf einander folgende Elemente MM' und M'M'' in einerlei Ebene liegen. eſe Ebene MM'M'' heißt die Krümmungsebene (plan osculateur) der Curve in dem Punkt M. Für den nkt K hingegen wäre KMM' die Krümmungsebene u. ſ. w. Von den verſchiedenen Krümmungsebenen haben o je zwei ein Zwiſchen-Element gemeinſchaftlich, d. h. ſie ſchneiden ſich in demſelben. Zuſammenfallen können nur dann, wenn die Curve eben iſt. Aus den weiter oben angeſtellten Betrachtungen geht übrigens hervor, ß die Krümmungsebene nichts anderes iſt als diejenige Ebene, welche durch zwei nächſtfolgende Tangenten Curve geht.

§. 168.

Es iſt klar, daß eine ſtetige Curve, ſie ſei eben oder nicht, nur eine einzige Tangente an einem gegebe- n Punkte haben kann; dagegen läßt ſie in eben dieſem Punkte eine unendliche Menge von Normalen zu, d. h. ade Linien, welche ſenkrecht auf dem Berührungspunkte der Tangente ſtehen. Dieſe Normalen nun bilden alle ammen eine auf der Tangente ſenkrechte Ebene, welche man die Normalebene der Curve an dem gegebenen nkte nennt. Bei einer krummen Fläche iſt es alſo gerade das Gegentheil: dieſe läßt in jedem ihrer Punkte e unendliche Menge von Tangenten zu, welche zuſammen die Berührungsebene bilden; für eine ſolche Berühngsebene gibt es aber nur eine einzige Normale, d. h. eine Linie, welche in dem Berührungspunkte ſenkrecht f jener Ebene ſteht.

§. 169.

Eine coniſche Fläche iſt immer entwickelbar.

Es wäre hier überflüſſig, wenn man alle die vorbereitenden Betrachtungen wieder anſtellen wollte, welche Fig. 50.
im Cylinder für nöthig erachtet wurden. Die Grundlinie des Kegels mag eine Curve ſein, von welcher Art wolle, ſo betrachte man ſie als ein Polygon CAA'A'' von unendlich vielen Seiten, den Kegel ſelbſt als e Pyramide und jede Seitenfläche SAA' deſſelben als ein Flächenelement von unendlich kleiner Breite, wel- s der krummen Fläche und ihrer Berührungsebene längs der Erzeugenden SA gemeinſchaftlich iſt (§. 159). ierauf laſſe man die Seitenfläche SA'A'' ſich ſo lange um die Kante SA' drehen, bis ſie mit der Seiten-

fläche SAA' in eine Ebene zu liegen kommt. Ferner lasse man diese beiden, in eine Ebene vereinigten Seitenflächen sich um die Kante SA drehen, bis sie mit der folgenden Seitenfläche in eine Ebene zu liegen kommen. Fährt man so fort, so erhält man einen Polygonal-Sector,*) der aus allen den Seitenflächen der Pyramide besteht, die man nach und nach in eine und dieselbe Ebene gelegt hat, und der an Größe der pyramidalischen Oberfläche gleich sein wird. Bei dieser Verwandlung bleiben die Seiten und Winkel der Seitenflächen SA'A'', SAA', ... unverändert, so wie auch die der beliebigen Dreiecke SM'M'', SMM', ... während die Winkel AA'A'', MM'M'' ihre Größe ändern; und da diese Bemerkungen gleich wahr bleiben, wie klein auch die Seitenflächen der Pyramide sein mögen, so gelten sie auch noch für die Gränze dieses Körpers, nämlich für den Kegel, auf welchem die Polygone CAA'A'' und GMM'M'' zu stetigen Curven werden, deren Tangenten die Verlängerungen der Elemente AA' und MM' sind.

§. 170.

Hieraus ergeben sich also nachstehende Folgerungen:

1) Jede conische Fläche ist entwickelbar und bei der Entwickelung behalten die Erzeugenden oder irgend welche Theile derselben gleiche Länge.

2) Die Grundlinie des Kegels oder jede andere auf seiner Fläche verzeichnete Curve wird eine Linie, deren Krümmung von der der ursprünglichen Curve verschieden ist, und welche man die verwandelte nennt. Die Bögen dieser verwandelten Curve aber behalten die nämliche absolute Länge wie die der ursprünglichen Curve. Wenn diese letztere in allen ihren Punkten gleich weit von der Spitze entfernt war, so verwandelt sie sich in einen Kreisbogen, dessen Halbmesser jener Entfernung gleich ist.

3) Jede Tangente der ursprünglichen Curve bildet mit der Erzeugenden einen Winkel, welcher bei der Entwickelung unverändert bleibt, und eben jene Tangente erscheint auch nach der Entwickelung wieder als Tangente an der verwandelten Curve.

Später wird gezeigt werden, wie man diese verschiedenen Sätze anwenden kann, um die Entwickelung eines Kegels graphisch auszuführen.

§. 171.

Damit eine auf einem Kegel verzeichnete Curve GMM' bei der Entwickelung des Kegels sich in eine Gerade verwandle, ist es hinreichend, wenn zwei auf einander folgende Elemente MM' und M'M'' eine solche Richtung haben, daß

$$\text{Winkel } SM'M'' = SM't;$$

und da die Verlängerungen dieser Elemente Tangenten an der ursprünglichen Curve sind, so reducirt sich diese Bedingung darauf, daß zwei auf einander folgende Tangenten dieser Curve gleiche Winkel mit der dazwischenliegenden Erzeugenden bilden. Diese Winkel sind aber nicht constant für alle Tangenten, wie es beim Cylinder der Fall war (§. 163).

§. 172.

Fig. 50. Jede Curve, bei welcher sich die vorerwähnte Bedingung erfüllt findet, hat auch die Eigenschaft, die kürzeste unter allen Linien zu sein, welche zwischen zweien ihrer Punkte auf der Kegelfläche ziehen kann, und dieses zwar aus denselben Gründen, welche in §. 164 angegeben wurden. Aber diese Curve hat nicht die Gestalt einer

*) Oder vielmehr zwei an der Spitze entgegengesetzte Sectoren, wenn man zugleich die obere Pyramide SBB'B'', welche die Stelle des zweiten Kegelmantels vertritt, entwickelt.

mehr und mehr zur Spitze S erhebenden Spirale. Denn der Winkel SMM' ist kleiner als SM'M'', weil rer dem Winkel SM't gleich ist; da also der spitzige Winkel SMt, welchen die Tangente Mt mit der entsprechenden Erzeugungslinie bildet, für die nächst auf einander folgenden Tangenten M'M'' ꝛc. ꝛc. immer wächst, so wird die Entfernung SM ihr Minimum erreicht haben, wenn jener Winkel ein rechter gewor- ist, und man erhält für diesen Fall den der Spitze S am nächsten liegenden Punkt der Curve. Von hier aber entfernt sich die Curve wieder mehr und mehr von der Kegelspitze, weil nun der Winkel SMt stumpf orden ist und zu wachsen fortfährt. Bei einem durch Umdrehung erzeugten Kegel z. B. ist die kürzeste Linie chen zwei Punkten seiner kreisförmigen Grundlinie nicht der zwischen denselben enthaltene Kreisbogen, sondern Curve von hyperbolischer Art, deren Spitze gleich weit von jenen beiden Punkten entfernt ist, und welche der Entwickelung des Kegels zu einer Sehne desjenigen Kreisbogens wird, in welchen sich die ursprüngliche ndlinie verwandelt. Die beiden zu dieser Sehne parallelen Radien sind auf der ursprünglichen Kegelfläche nigen Erzeugenden, welche jener hyperbolischen Curve als Asymptoten dienen.

§. 173.

Eine auf einer conischen Fläche verzeichnete Curve hingegen, welche eine ähnliche Eigenschaft hätte, wie Schraubenlinie (§. 163), d. h. deren Tangenten alle einen constanten Winkel mit den entsprechen- Erzeugenden bildeten, würde die Form einer Spirale haben, die sich ohne Aufhören der Kegelspitze erte, ohne sie je zu erreichen, so daß diese Spitze ein asymptotischer Punkt der Spirale wäre; bei der wickelung aber würde diese Curve sich offenbar in eine logarithmische Spirale verwandeln, denn es ist mnt, daß letztere alle ihre Leitstrahlen unter einem constanten Winkel schneidet.*)

Wäre dieser Winkel ein rechter, so wäre die verwandelte Curve ein Kreis, und da alsdann alle Leit- hlen gleich sind, so könnte die ursprünglich auf den Kegel verzeichnete Curve nichts anderes gewesen sein als sphärische Curve, d. h. eine solche, die sich aus dem Durchschnitt des gegebenen Kegels mit einer Kugel er- , die ihren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels hat (§. 319).

§. 174.

Entwickelbare Flächen im Allgemeinen. Fig. 51.

Um nun die über Kegel- und Cylinderflächen angestellten Betrachtungen zu verallgemeinern, stelle man vor, eine Fläche werde durch eine Gerade erzeugt, welche sich so bewegt, daß jede zwei auf ander folgende oder unendlich nahe Lagen derselben sich in einer und derselben Ebene befinden.

Es wird bald (§. 180) gezeigt werden, wie diese Bedingung auf verschiedene Art erfüllt werden kann; den jetzigen Augenblick aber genügt es, anzunehmen, sie sei auf irgend eine Weise erfüllt worden, und , A'B', A''B'' . . . . seien unendlich nahe Lagen der beweglichen Geraden. Alsdann aber müssen sich, obiger inition der Fläche zufolge, die beiden auf einander folgenden Erzeugungslinien AB und A'B' nothwendig eiden**) in einem gewissen Punkte M'; eben so muß die Erzeugende A'B' von der nächstfolgenden A''B'' in m Punkte M'' und letztere wieder von der darauf folgenden in M''' geschnitten werden ꝛc. ꝛc., so daß diese schiedenen auf einander folgenden Durchschnitte ein Polygon MM'M''M''' . . . . oder vielmehr, wenn man

*) Die Gleichung für die logarithmischen Spirale ist $v = \log r$, wo r den Leitstrahl, und v den veränderlichen Winkel bezeichnet, den r mit einer festen Geraden bildet. Bezeichnet nun w den Winkel der Tangente mit dem Leitstrahl, so ist

$$\text{tang } w = r\frac{dv}{dr} = 1.$$ Also ist w constant. Anm. d. Ueberf.

**) Sie können auch parallel sein; aber man kann, um diesen besondern Fall dem allgemeinen unterzuordnen, annehmen, der Durchschnittspunkt sei unendlich entfernt.

die Erzeugenden unendlich nahe annimmt, eine stetige Curve VMM'M''U bilden, an welcher jene Geraden offenbar Tangenten sein werden. Diese Curve nennt man die Wende-Curve (arête de rebroussement) der Fläche. Der Grund dieser Benennung wird später (§. 178) nachgewiesen werden.

§. 175.

Fig. 51. Eine nach dem vorhergehenden Gesetze erzeugte krumme Fläche ist entwickelbar.

Da nämlich jede zwei auf einander folgenden Erzeugungslinien AMB und A'M'B' in einerlei Ebene liegen, so schließen sie einen Winkelraum auf der Fläche ein, von unbestimmter Länge und unendlich kleiner Breite. Dieser Winkelraum ist nothwendig eben: denn die Linienelemente AA', PP' .... der verschiedenen auf der Fläche gezogenen Curven haben zwei Punkte mit der Geraden AM und A'M' gemeinschaftlich und befinden sich daher mit dieser in einerlei Ebene. Eben so schließen die beiden Erzeugenden A'M'B' und A''M''B'' ein anderes Flächenelement von unbestimmter Länge, das ebenfalls eben ist, ein u. s. f. Läßt man daher das erste dieser Elemente sich um die Gerade A'M'B wie um eine Are drehen, bis es mit dem nächstfolgenden in einerlei Ebene kommt, und läßt ferner diese in Eine Ebene vereinigten Elemente sich um A''B'' drehen, bis sie in die Ebene des dritten Elements kommen, so erhält man endlich, wenn man dieses Verfahren fortsetzt, die ganze krumme Fläche in eine einzige ununterbrochene Ebene aufgerollt, die an Größe der krummen Fläche gleich sein wird. Es leuchtet aber von selbst ein, 1) daß bei dieser Umwandlung weder die bestimmten Theile MA, M'A', ... der Erzeugenden, noch die Bögen AA', A'A'' ihre Länge ändern; 2) daß die Winkel MAA' oder MAT, MA'A'' oder MA'T', ..., welche von den Erzeugenden mit den Tangenten einer auf der Fläche beliebig gezogenen Curve gebildet werden, unverändert bleiben; 3) daß hiegegen die Contingenz-Winkel, wie TA'T', oder ihre Supplemente, wie AA'A'', ihre Größe ändern, und daß mithin die Curve AD sich in eine andere verwandeln wird, deren Krümmung von der ursprünglichen verschieden ist. Somit ist also bewiesen, daß jede Fläche, welche der Bedingung des §. 174 Genüge leistet, der Entwickelung fähig ist.

§. 176.

Umgekehrt: Diese Bedingung ist nothwendig. Denn wenn eine krumme Fläche in eine Ebene ohne Bruch und Falte soll ausgebreitet werden können, so muß sie offenbar aus ebenen Flächenelementen bestehen, welche sich zu zwei und zwei in geraden, unbegränzten Linien an einander anschließen. Diese geraden Linien dienen als die Aren, um welche die Flächenelemente bei der Entwickelung sich nach und nach drehen müssen, um sich in eine Ebene aufzurollen. Wäre hiegegen der geradlinige Durchschnitt zweier an einander, liegender Elemente begränzt durch ein anderes Flächenelement, so entstände an diesem Orte der Fläche ein körperliches Dreieck oder Vieleck, dessen Seiten nicht in eine einzige Ebene ausgebreitet werden könnten ohne leere Zwischenräume zu lassen; und da dieser Umstand sich für jeden Punkt wiederholen würde, in welchem mehr als zwei Elemente an einander lägen, so würde also keine Stetigkeit in der Entwickelung der Fläche mehr stattfinden.

§. 177.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Ebene, welche eine entwickelbare Fläche in irgend einem Punkt P berührt, letztere zugleich nach der ganzen Länge der Erzeugenden APMB berühre, welche durch jenen Punkt geht. Da nämlich, nach §. 175, die Linienelemente AA', PP', BB' .... der Curven AD, PX, BC, ... in der Ebene der beiden einander unendlich nahen Geraden AMB und A'M'B' liegen, so folgt daraus, daß diese Ebene alle, an die Punkte A, P, B, ... jener Curven gezogenen, Tangenten enthalten müsse; es ist also eine und dieselbe Ebene AMA' oder BAT, welche die entwickelbare Fläche nach der ganzen Länge der Erzeugungslinie AMB berührt. Will man daher für einen auf einer solchen Fläche gegebenen

Punkt Q die Berührungsebene construiren, so darf man nur durch die Erzeugende AQB und durch die Tangente AT einer beliebig auf der Fläche gezogenen Curve, eine Ebene legen.

Diese Eigenschaft, welche schon oben (§§. 99—100) für die Cylinder- und Kegelflächen bewiesen wurde, ist also allen entwickelbaren Flächen gemeinschaftlich, und sie verdient um so mehr Aufmerksamkeit, da sie nicht auch zugleich für windschiefe Flächen gilt, obgleich die Erzeugungslinien dieser letzteren ebenfalls geradlinig sind. Ueberdieß dient sie später als Mittel zu einer neuen Erzeugungsart entwickelbarer Flächen, indem man solche als Umhüllungsflächen einer beweglichen Ebene betrachtet (§. 183). Man bemerke auch, daß die Ebene AM′A, oder BAT, welche die entwickelbare Fläche berührt, genau mit der Krümmungsebene der Wendecurve VMU zusammenfällt, weil die beiden Erzeugenden AM′ und A′M′ Tangenten an dieser Curve sind.

§. 178.

Es wurde schon gesagt, daß die Curve VMU, welche durch die auf einander folgenden Durchschnitte der Erzeugungslinien gebildet wird, die Wendecurve der entwickelbaren Fläche heiße; um aber die Richtigkeit dieser Benennung einzusehen, darf man nur jede Erzeugungslinie AB, als aus zwei Theilen MA und MB bestehend, betrachten, von denen der eine unter-, der andere oberhalb des Berührungspunktes M liegt; ferner bezeichne man durch den Namen unterer Mantel das Stück der Fläche, welches durch die Theile MA, M′A′, M″A″, . . . erzeugt wird, und durch oberer Mantel das durch die Theile MB, M′B′, M″B″, ... erzeugte Stück*). Will man nun durch einen beliebigen aber stetigen Zug (der nur nicht in der Richtung einer Erzeugenden gehen darf) von einem Mantel zum andern übergehen, so sieht man leicht, daß dieser Uebergang nur in einer Curve βNα geschehen könne, welche an der Stelle, wo sie die Linie VMU schneidet, einen Wendepunkt hat. Dieser sehr wichtige Umstand wird vielleicht noch deutlicher werden, wenn die ganze Figur auf irgend eine Horizontalebene projicirt wird. Es sei daher vnu (Fig. 52.) die Grundlinie des vertikalen Cylindes, der die Curve VNU auf die Horizontalebene projicirt, und ab, a′b′, ... seien die Projectionen der Erzeugenden; diese müssen Tangenten an der Linie vnu sein. Daraus aber folgt, daß keine jener Erzeugenden den vertikalen Cylinder vnu durchschneiden könne, und daß also die beiden Mäntel der entwickelbaren Fläche außerhalb des Cylinders bleiben, an welchem sie sich nur längs der Curve VNU anlehnen. Denkt man sich ferner diesen Cylinder als einen festen Körper und die in ab projicirte Erzeugende als eine unbiegsame Linie, welche, ohne zu gleiten, um den Cylinder sich so herumbewegt, daß sie stets eine Tangente an der Curve VNU bleibt, so ist einleuchtend, daß diese bewegliche Gerade die entwickelbare Fläche ganz durchlaufen werde. Bei dieser Bewegung aber bemerkt man zugleich, daß irgend ein fester Punkt β, der auf dem obern Theile mb der Erzeugenden liegt, sich dem Cylinder anfänglich nähert, so daß er z. B. in β′ zu liegen kommt, wenn die Erzeugende sich in a′b′ projicirt, und endlich in n, wenn die Erzeugende in a″b″ projicirt wird. Von hier an aber kömmt, wenn die Erzeugende ihre Bewegung um den Cylinder fortsetzt, der Punkt β unterhalb des Berührungspunktes zu liegen, so daß er sich immer weiter vom Cylinder entfernt, und z. B. für die Lage a‴b‴ der Erzeugenden, in α‴, und für die Lage a⁗b⁗ in α⁗, ... fällt. Man sieht also deutlich, daß die vom Punkt β beschriebene Curve aus zwei Aesten besteht, die in n ihren Wendepunkt haben und von denen der erste ββ′n auf dem obern, der andere nα‴ auf dem untern Mantel der Fläche sich befindet. In §. 456 wird der besondere Fall behandelt werden, in welchem die Curve VNU eine Schraubenlinie ist.

Fig 51.u.

*) Diese Theile der Erzeugenden sind zwar von unbestimmter Länge; damit aber die entgegengesetzte Form beider Mäntel mehr in die Augen falle, wird hier angenommen, jene Geraden endigen sich in zwei Horizontalebenen, welche die Fläche in den Curven AD und BC schneiden, von denen die erste ihre convexe und die zweite ihre concave Seite dem Auge des Beobachters zuwendet.

§. 179.

Faßt man alles Vorhergehende zusammen, so ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1) Eine krumme Fläche ist entwickelbar, wenn sie durch eine Gerade erzeugt wird, welche sich so bewegt, daß jede zwei ihrer auf einander folgenden Lagen in einer und derselben Ebene liegen. Dieses ist eine charakteristische Eigenschaft aller Flächen dieser Classe, zu welcher auch die Cylinder- und Kegelflächen, als besondere Arten, gehören: denn im Cylinder sind die geradlinigen Erzeugenden beständig parallel, im Kegel hingegen schneiden sich alle in einem und demselben Punkte.

2) Auf jeder entwickelbaren Fläche läßt sich eine, durch die auf einander folgenden Durchschnitte der Erzeugenden gebildete Wendecurve nachweisen. Die geradlinigen Erzeugenden sind Tangenten an dieser Curve, welche die ganze Fläche in zwei bestimmte Mäntel theilt. Bei Kegelflächen reducirt sich die Wendecurve auf einen einzigen Punkt — die Kegelspitze; und bei Cylindern liegt sie in unendlicher Entfernung.

3) Die Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche ist allen Punkten einer und derselben geradlinigen Erzeugenden gemeinschaftlich, und fällt mit der Krümmungsebene der Wendecurve zusammen.

4) Bei der Entwickelung der Fläche ändern weder bestimmte Theile der Erzeugenden, noch die Bögen irgend einer auf der Fläche verzeichneten Curve ihre absolute Länge, und die Tangenten an dieser Curve bilden mit den Erzeugungslinien Winkel, welche constant bleiben. Anders verhält es sich mit den, zwischen zweien dieser auf einander folgenden Tangenten eingeschlossenen Contingenz-Winkeln, weßhalb auch die Curve bei der Entwickelung sich in eine Linie verwandelt, die eine andere Krümmung hat.*)

§. 180.

Es soll nun untersucht werden, wie man der, zur Definition entwickelbarer Flächen nöthigen Bedingung (§. 174) Genüge leisten könne.

Fig. 51. Man nehme irgend zwei Curven AD und BC als fest im Raume an; hierauf lasse man eine bewegliche Gerade so an diesen Leitcurven hingleiten, daß jede zwei auf einander folgende Lagen sich in einerlei Ebene befinden. Hat man zu diesem Zwecke irgend einen Punkt A′ auf der ersten Curve gewählt, so darf der ihm entsprechende Punkt auf der zweiten Curve nicht willkührlich genommen werden, weil man durch nichts versichert wäre, daß die durch beide Punkte gezogene Gerade mit ihrer nächst folgenden Lage in einerlei Ebene liege.**) Man denke sich daher eine conische Fläche, die den Punkt A′ zur Spitze und die Curve BC zur Grundlinie habe; hierauf lege man an diese Fläche eine Berührungsebene, welche durch die Gerade AT′ gehe, die eine Tangente ist an dem Punkt A′ der Leitcurve AD; construirt man nun die Gerade A′B′, nach welcher die Berührungsebene den Hilfskegel berührt, so ist A′B′ diejenige Lage, welche die erzeugende Gerade annehmen muß, wenn sie durch den Punkt A′ der Leitcurve geht. Die andern Lagen A″B″, A‴B‴, ... erhält man auf eine ähnliche Art. Um sich von der Richtigkeit dieser Construction zu überzeugen, darf man sich nur vorstellen, die bewegliche Gerade gleite, wenn sie von der Lage A′B′ zur nächstfolgenden A″B″ übergeht, auf den Tangenten A′A″T′ und B′B″S′ hin, welche mit den eigentlichen Leitlinien in den Elementen A′A″ und B′B″ zusammenfallen; nun liegen aber

*) Die Wendecurve ist hievon auszunehmen; denn für diese bleiben die Contingenzwinkel unverändert, weil sie durch die Erzeugenden selbst gebildet werden, welche bei der Entwickelung der Fläche als Umdrehungsaxen dienen: so bleibt z. B. der Winkel AM′A′ constant, und eben so sein Supplement MM′M″.

**) Ausgenommen, man wollte den in A′ befindlichen Punkt der Geraden unbeweglich lassen, während der andere Endpunkt auf der Curve BC hingleitete; dadurch aber erhielte man nichts als eine conische Fläche, bei welcher, als einer ganz besondern Art entwickelbarer Flächen, man nicht stehen bleiben kann.

beiden Tangenten offenbar in einer und derſelben Ebene nämlich in der Berührungsebene, welche man
en Hilfskegel gelegt hat; mithin befinden ſich auch die beiden Erzeugenden A'B' und A"B" in eben derſel-
Ebene.

§. 181.

Es wäre zur vollſtändigen Beſtimmung der entwickelbaren Fläche ſogar hinreichend geweſen nur eine ein- Fig. 51.
Leitlinie anzugeben, mit der Bedingung, daß die bewegliche Gerade ſtets eine Tangente an jener Linie ſein
Es ſei z. B. VNU irgend eine beliebige, als feſt im Raume angenommene Linie, die aber von doppelter
nmung ſein muß, wenn man nicht eine einfache Ebene erhalten will. Conſtruirt man nun die Tangenten
B, A'M'B', A"M"B", ... für die äußerſt nahe auf der Curve genommenen Punkte M, M', M", ...,
ellen dieſelben eben ſo viele Lagen der beweglichen Geraden vor, und der Ort aller dieſer Lagen wird eine
ickelbare Fläche ſein; denn von den beiden unendlich nahen Erzeugenden AMB und A'M'B' hat die
das Element MM', die andere das Element M'M" mit der Curve gemeinſchaftlich; dieſe beiden Erzeugenden
iden ſich mithin im Punkt M' und liegen alſo in einer und derſelben Ebene. Das Nämliche läßt ſich
eben dieſe Art auch von den übrigen auf einander folgenden Erzeugungslinien beweiſen; es iſt mithin außer
fel, daß die Fläche, als der Ort aller jener Tangenten, entwickelbar ſei, und die Richtungscurve VNU iſt
egenwärtigem Falle genau die Wendecurve, welche ſtets die Berührungsebenen (§. 177) der entwickelbaren
e zu Krümmungsebenen hat.

Es folgen nun noch einige andere Erzeugungsarten entwickelbarer Flächen.

§. 182.

Wenn man auf einer gegebenen Fläche, die einfach durch S bezeichnet werde, eine feſte aber beliebige Fig. 53.
e CND zieht; hierauf durch die ſehr nahe gelegenen Punkte N, N', N", ... dieſer Curve Berührungs-
n P, P', P", ... an die Fläche legt, welche hier blos durch die Geraden NP, N'P', ... vorgeſtellt
ſo ſchneiden ſich je zwei auf einander folgende dieſer Ebenen in den Geraden AM, A'M', A"M", ...
he ſich zu zwei und zwei in einerlei Ebene befinden. Denn die beiden erſten dieſer Geraden, welche
us den Durchſchnitten der Ebene P' mit der vorhergehenden P und der folgenden P" ergeben, liegen offenbar
in der Ebene P'; eben ſo liegen die Geraden A'M' und A"M" beide in der Ebene P" u. ſ. w. Daraus aber
, daß dieſe verſchiedenen Durchſchnitte eine Reihe ebener Winkelräume AMA', A'M'A", A"M"A"', ...
umen, welche zuſammen einer ſtetigen und entwickelbaren Fläche um ſo näher kommen, je näher man die
hrungspunkte N, N', N', ... auf der Curve CD genommen hat. Um daher jene Gränze zu erreichen,
man ſich nur vorſtellen, die Ebene P bewege ſich ſtetig ſo um die Fläche S, daß ſie letztere ſtets in der
enen Curve CND berühre; alsdann ſagt man, die entwickelbare Fläche ſei die Umhüllung der Lagen,
he die Ebene während ihrer Bewegung annimmt; denn ſie berührt wirklich dieſe Ebene in allen
Lagen, welche nichts anderes ſind, als die Verlängerungen der kleinen Flächenelemente AMA', A'M'A", ...
welchen die Fläche zuſammengeſetzt iſt.

§. 183.

Dieſer Fall beſchränkt ſich keineswegs blos auf die Fläche, von welcher hier die Rede iſt; man kann viel-
ſagen, jede entwickelbare Fläche ſei die Umhüllung der Lagen, welche eine nach einem ge-
en beſtimmten Geſetz bewegliche Ebene annimmt. Denn bei dem allgemeinen Falle der Fig. 51.
ſich (§. 177), daß die krumme Fläche nach der ganzen Länge der Erzeugenden AB von einer einzigen Fig. 51.
e berührt wurde, welche zugleich die unendlich nahe Erzeugende A'B' enthielt, und welche folglich nichts

anderes war als die Verlängerung des Flächenelements AM'A'; eben so war die nächstfolgende Berührungsebene eine Verlängerung des Elements A'M''A'', und diese beide Ebenen schnitten sich in der Geraden A'M'B'; so daß man also die verschiedenen Erzeugenden, da sie nichts anderes sind als die Durchschnitte der auf einander folgenden Berührungsebenen, erhalten und somit die entwickelbare Fläche erzeugen kann, indem man eine unbestimmte Ebene sich so bewegen läßt, daß sie nach und nach die Lagen AM'A', A'M''A'' annimmt. Für jede besondere Fläche aber muß jene Ebene nach einem bestimmten Gesetze sich bewegen, d. h. so, daß sie für jeden Punkt im Raume, durch welchen sie geht, nur eine einzige Lage annehmen kann.

§. 184.

So kann man z. B. die bewegliche Ebene dergestalt an zwei festen Flächen sich hin bewegen lassen, daß sie dieselben beständig berührt; vorausgesetzt, daß weder die eine noch die andere dieser Flächen entwickelbar sei; denn die Berührung einer Ebene mit einer Fläche letzterer Art, kann, wenn auch der Punkt der Berührung ganz unbestimmt gelassen ist, doch nur immer nach der ganzen Länge einer und derselben Erzeugenden geschehen (§. 177); die Berührungsebene an der einen entwickelbaren Fläche müßte also immer zugleich noch durch eine außerhalb dieser Fläche liegende Gerade (d. h. durch eine Erzeugende der andern Fläche) gehen, — eine Bedingung, welche hier aus demselben Grunde unstatthaft ist, aus welchem sie es in den §§. 118 und 125 für Cylinder- und Kegelflächen war.

§. 185.

Man könnte auch die Bedingung aufstellen, daß die bewegliche Ebene sich immer oskulirend (§. 167) zu einer festen Curve verhalten solle, wie z. B. zur Linie VNU in der Figur 51.; die Ebene müßte nämlich in diesem Falle immer durch zwei nächst auf einander folgende Elemente dieser Linie gehen, welche letztere alsdann die Wendecurve an der, durch die auf einander folgenden Durchschnitte der beweglichen Ebene gebildeten, entwickelbaren Fläche sein würde.

§. 186.

Endlich könnte man die Ebene sich auch so bewegen lassen, daß sie beständig die Normalebene (§. 168) an einer gegebenen Curve VNU bliebe; denn wie in §. 182, so ist auch hier leicht einzusehen, daß ihre verschiedenen auf einander folgenden Lagen sich durchschneiden, und daß von den Durchschnitten sich je zwei in einerlei Ebene befinden und somit also eine entwickelbare Fläche bilden würden. Für eine gegebene ebene Curve VNU würde die auf diese Art erzeugte Fläche ein Cylinder werden, weil die Durchschnitte aller Normalebenen senkrecht auf der Ebene der VNU, und mithin unter sich parallel wären.

§. 187.

Fig. 51. Es soll nun untersucht werden, wie eine auf irgend einer entwickelbaren Fläche gezeichnete Curve beschaffen sein müsse, damit sie die kürzeste Linie zwischen zweien ihrer Punkte P und X sei. Dieser Bedingung wird sie Genüge leisten, wenn sie so gezeichnet ist, daß sie nach der Entwickelung der Fläche geradlinig wird; denn aus §. 179 Nr. 4 ist bekannt, daß jede durch die Entwickelung verwandelte Curve die Länge der ursprünglichen behält; auf einer in eine Ebene ausgebreiteten Fläche aber ist bekanntlich eine Gerade die kürzeste zwischen zweien ihrer Punkte: mithin ꝛc. ꝛc.

Damit nun eine Curve PP'X sich bei der Entwickelung in eine gerade Linie verwandle, ist es nothwendig, aber auch hinreichend, daß zwei auf einander folgende Elemente immer gleiche Winkel mit der dazwischen liegenden Erzeugenden machen, d. h. daß in jedem Punkt der Curve

Winkel $MP'R = MP'P''$

sei. Da nämlich diese beiden Winkel ihre Größe nicht ändern, während der erste sich um den gemeinschaftlichen Schenkel MP' dreht; so werden die beiden Elemente PP' und $P'P''$ in eine gerade Linie, und eines in die Verlängerung des andern zu liegen kommen, wenn beide Winkel gleich sind und jener erste Winkel in der Ebene des zweiten angelangt ist. Dieß ist also die Bedingung, der die Curve PX Genüge leisten muß, damit sie ein Minimum sei; es ergibt sich aber hieraus noch eine andere Eigenschaft, welche bemerkt zu werden verdient.

§. 188.

Wenn eine Curve PX ein Minimum ist, so sind alle ihre Krümmungsebenen normal auf der entwickelbaren Fläche, auf welcher jene Curve verzeichnet ist. Fig. 51.

Um dieses zu beweisen, bemerke man zuerst, daß nach der im vorigen Paragraphen aufgestellten Bedingung die beiden auf einander folgenden Tangenten $PP'R$ und $P'P''R'$ gleiche Winkel mit der Erzeugenden $A'M'$ bilden müssen: daraus aber folgt, daß diese Tangenten zwei Seitenlinien eines senkrechten Kegels sind, dessen Axe die Linie $A'M'$ ist; und da sie einander unendlich nahe liegen, so kann man die Ebene $RP'R'$ als Berührungsebene jenes Kegels längs der Seite RP' betrachten. Nun ist in jeder Umdrehungsfläche die Berührungsebene senkrecht auf der Ebene des Meridians, welcher durch den Berührungspunkt geht (§. 129): mithin ist hier die Ebene $RP'R'$ senkrecht auf der Ebene $AM'A'$, welche die Axe des Kegels und die durch den Berührungspunkt gehende Seite $P'R$ enthält. Die erste dieser Ebenen ist aber nichts anderes als die Krümmungsebene $PP'P''$ der gegebenen Curve und die zweite ist genau die Berührungsebene der entwickelbaren Fläche: mithin ist in der That jede Krümmungsebene einer Minimums-Curve eine Normale an letzterer Fläche.

§. 189.

Diese Eigenschaft der Minimumscurve ist um so bemerkenswerther, als sie durchaus wahr bleibt, von welcher Beschaffenheit auch die Fläche sein mag, auf welcher eine solche Curve verzeichnet ist. Es sei CND die kürzeste unter allen Linien, welche auf irgend einer Fläche S durch die Punkte C und D gezogen werden können: legt man nun durch alle Punkte N, N', N'' . . . . dieser Curve Berührungsebenen an S, so werden diese, nach §. 182, eine um S beschriebene entwickelbare Fläche S' bilden, welche offenbar die nämlichen Berührungsebenen hat, wie die Fläche S längs der Curve CND. Daraus aber folgt, daß jedes in der Richtung CND liegende Flächenelement von S, (das man sich nach allen Seiten hin unendlich klein zu denken hat) auch der Fläche S' gemeinschaftlich ist, und daß somit die Curve CND, welche ein Minimum auf der ersten Fläche ist, es auch auf der zweiten sein muß; eben deßhalb aber müssen alle Krümmungsebenen der Curve CND senkrecht sein auf den Berührungsebenen der entwickelbaren Fläche S'; und da diese zugleich auch die Berührungsebenen der Fläche S sind, so kann man also behaupten, daß **die Krümmungsebenen einer auf irgend einer beliebigen Fläche gezogenen Minimumscurve Normalebenen an dieser Fläche seien.** Fig. 53.

Zweites Kapitel.

Von den Umhüllungsflächen.

§. 190.

Umhüllungsfläche (surface enveloppe) oder einfach Umhüllung nennt man den Ort aller der Durchschnittslinien, in welchen sich die auf einander folgenden Lagen einer nach einem bestimmten Gesetz sich bewegenden Fläche, von beständiger oder veränderlicher Gestalt, schneiden. Da, wie sogleich gezeigt werden wird, dieser Ort die Eigenschaft hat, jene bewegliche Fläche in jeder ihrer Lagen längs einer Curve zu berühren, so heißt er die Umhüllung aller jener Lagen, während die Fläche selbst und alle ihre Lagen die umhüllten heißen. Ferner nennt man, aus einem später (§. 203) zu erläuternden Grunde, den Durchschnitt jeder zwei auf einander folgenden umhüllten Lagen — die Charakteristik, und längs dieser geschieht eben die Berührung der Umhüllungsfläche mit der umhüllten. So erhält eine nach einem bestimmten Gesetze sich bewegende Ebene eine entwickelbare Fläche zur Umhüllung (§. 182—186); die Charakteristiken, d. h. die auf einander folgenden Durchschnitte, welche zusammen den Ort der Umhüllung ausmachen, sind hier gerade Linien; und von den verschiedenen umhüllten Lagen der beweglichen Ebene berührt jede die Umhüllung längs einer von jenen Charakteristiken. *) Um sich hierüber ins Klare zu setzen, wird es gut sein, einige weniger specielle Fälle zu betrachten, z. B. solche, wo die umhüllten Flächen nicht eben, sondern gekrümmt sind.

§. 191.

55. Man stelle sich eine bewegliche Kugel vor, deren Mittelpunkt O die Vertikale OZ durchläuft, und deren Halbmesser OA sich nach einem gewissen Gesetze ändert, z. B. so, daß er nach und nach mit allen den verschiedenen Ordinaten OA, O′A′, O″A″ . . . . einer auf der Vertikalebene verzeichneten Curve AA′X zusammenfällt. In diesem Falle werden sich jede zwei unendlich nahe Kugellagen O und O′ in einer horizontalen Kreislinie schneiden, welche durch die Sehne BC projicirt wird, ebenso werden die Kugeln O′ und O″ sich in der Kreis-

*) Alles dieses läßt sich sehr leicht durch die Sprache der Analysis ausdrücken. Es bezeichne

$$U = o$$

die Gleichung für irgend eine Fläche zwischen den Coordinaten x, y, z und der Constanten w. Gibt man nun dieser letztern den nächstfolgenden Werth $w + dw$, so erhält man die Gleichung der nächstfolgenden Fläche, die von der ersten hinsichtlich ihrer Lage und Gestalt nur unendlich wenig verschieden ist, und sie in einer Curve schneidet. Fährt man fort der Constanten w nach und nach alle möglichen Werthe zu geben, so erhält man eine Folge unendlich naher Flächen, welche alle von einer anderen Fläche, der umhüllenden, berührt werden, und zwar jede längs derjenigen Curve, in welcher sie von der nächstfolgenden umhüllten Fläche geschnitten wird. Die Punkte dieser Durchschnittscurve zweier auf einander folgenden Flächen, sind aber offenbar diejenigen, für welche sich die Werthe von x, y, z nicht ändern, wenn der zur ersten dieser Flächen gehörige Werth von w in seinen nächstfolgenden übergeht. Man darf also nur die Gleichung dieser erstern Fläche in Beziehung auf den ihr entsprechenden Werth von w differentiren, um eine Gleichung zu erhalten, welche zu einer Durchschnittscurve gehört. So erhält man z. B. aus der anfänglichen Gleichung

$$U = o \quad (I)$$

die Gleichung

$$\frac{dU}{dw} = o \quad (II)$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen mithin die erste Durchschnittscurve oder Charakteristik, und wenn man nach und nach der Größe w alle möglichen Werthe gibt, so erhält man alle auf einander folgenden Charakteristiken, die zusammen die Umhüllungsfläche bilden. Eliminirt man nun aus den Gleichungen (I) und (II) die Größe w, so erhält man eine von w unabhängige Gleichung x, y und z, welche also die Gleichung für alle Charakteristiken oder für die Umhüllungsfläche selbst ist.

Anmerk. des Ueberf.

linie B′C′ ſchneiden u. ſ. w. Da nun alle dieſe Kreiſe ihre Mittelpunkte in OZ haben, und mit dieſer Geraden ſenkrecht auf eben dieſer Geraden ſtehen, ſo gehören ſie einer Umdrehungsfläche an, welche die Umhüllung der beweglichen Kugel bildet und ſie in jeder ihrer Lagen berührt. Denn weil die beiden unendlich nahen Kreiſe BC und B′C′ der Umdrehungsfläche und der Kugel O′ zugleich angehören, ſo haben dieſe beiden Flächen alle die Flächenelemente gemeinſchaftlich, welche auf der unendlich ſchmalen Zone BB′CC′ liegen; folglich haben beide die nämlichen Berührungsebenen, oder, was dasſelbe iſt, ſie berühren ſich längs dieſer Zone. Eben ſo berührt die Umdrehungsfläche die Kugel O″ längs der Zone B′B″C″C′ u. ſ. w. Die Umdrehungsfläche iſt alſo überhaupt die Umhüllung aller der Kugeln O, O′, O″ ꝛc., welche ſie längs der Kreislinien BC, B′C′ ꝛc. berührt. Dieſe Kreislinien ſind mithin die Charakteriſtiken oder die auf einander folgenden Durchſchnitte der umhüllten Kugeln.

§. 192.

Betrachtet man, für einen Augenblick, nur die größten Kreiſe der beweglichen Kugeln, welche in der Vertikalebene der Figur liegen, ſo ſieht man, daß ihre Umfänge, indem ſie ſich ſchneiden, eine Reihe von Bögen BB′, B′B″ . . . . bilden, deren Umhüllungslinie offenbar ein Meridian DBB′F der Umdrehungsfläche ſein wird. Die Geſtalt dieſes Meridians hängt von dem Geſetze ab, nach welchem ſich die Halbmeſſer OA. O′A′ . . . . ändern. Wären z. B. dieſe Halbmeſſer alle von gleicher Größe, ſo wären auch alle Charakteriſtiken größte Kreiſe von gleicher Größe, und der Meridian wäre eine mit OZ parallele Gerade. Wenn alſo eine Kugel ſich ſo bewegt, daß ihr Mittelpunkt eine gerade Linie durchläuft, ſo erhält ſie zur Umhüllung einen Umdrehungscylinder.

§. 193.

Iſt im Gegentheil der Meridian DBZ einer Umdrehungsfläche zum Voraus bezeichnet, ſo muß offenbar jede der umhüllten Kugeln dieſen Meridian berühren, und man erhält die Normalen BO, B′O′ ꝛc. ꝛc. als die Halbmeſſer dieſer verſchiedenen Kugeln; man kann alſo im Allgemeinen behaupten, daß jede Umdrehungsfläche die Umhüllung des von einer beweglichen Kugel durchlaufenen Raumes ſei, welche zum veränderlichen Halbmeſſer dasjenige Stück jeder Normale hat, das zwiſchen dem Meridian und der Axe enthalten iſt.

§. 194.

Die Umdrehungsflächen können einer gewiſſen erzeugenden Fläche von ſehr einfacher und darum, in manchen technischen Künſten, ſehr nützlicher Form, zur Umhüllung dienen. Denkt man ſich nämlich durch die unendlich nahen Punkte M, M′, M″ ꝛc. des Meridians FDY die Tangenten MT, M′T′, M″T″ ꝛc. gezogen, und läßt man dieſe, zugleich mit dem Meridian, ſich um die Axe XZ drehen; ſo werden ſie lauter ſenkrechte Kegel erzeugen, von welchen jeder die Umdrehungsfläche längs eines Parallelkreiſes berührt. Denn da die Tangente MT mit dem Meridian das Element MM′ gemein hat, ſo ſind alle auf der unendlich ſchmalen Zone MM′N′N gelegenen Flächenelemente dem Kegel TMN und der Umdrehungsfläche gemeinſchaftlich; beide Flächen berühren ſich alſo längs dieſer Zone. Da ſich ferner jede zwei auf einander folgende Kegel TMN und T′M′N′ in einem Parallelkreis M′N′ ſchneiden, welcher zwei Berührungszonen vereinigt, ſo folgt, daß jede Umdrehungsfläche auch betrachtet werden könne als die Umhüllung*) des Raumes, den ein veränderlicher ſenkrechter Kegel ſo

*) Man darf mit dem Wort Umhüllung nicht den Begriff einer ſolchen Fläche verbinden, welche andere in ihr Inneres einſchließt. Die Umhüllung kann ſich außerhalb oder innerhalb der umhüllten Flächen befinden, und man darf nichts anderes unter ihr verſtehen, als daß ſie jede der umhüllten Flächen längs einer Curve berührt.

durchläuft, daß seine Spitze stets in der Axe, seine geradlinige Erzeugende hingegen stets Tangente an der Meridiancurve bleibt.

§. 195.

Von der zuletzt beschriebenen Erzeugungsart machen in der That die Drechsler Gebrauch, wenn sie Umdrehungsflächen hervorbringen wollen. Denn indem sie die geradlinige Schneide ihres Dreheisens auf den schnell um eine Axe gedrehten Körper halten, erzeugen sie auf diesem einen Kegelstumpf, der zu denjenigen Flächen gehört, welche von der Hauptfläche, die hervorgebracht werden soll, umhüllt werden. Indem sie hierauf durch eine zweckmäßige Wendung dem Dreheisen eine andere Neigung geben, erzeugen sie eine Reihe conischer Zonen, welche sie durch Einschiebung neuer umhüllter Flächen allmählig in einander übergehen lassen, bis sie eine Fläche von merklicher Stetigkeit zu Stande gebracht haben.

Auch die Klempner bedienen sich der Umhüllungen, um entwickelbare Flächen hervorzubringen; denn vermittelst eines cylindrischen oder conischen Amboßes biegen sie nach und nach eine Tafel Blech um eine Reihe gerader Linien, welche sie zuvor in der Ebene der Tafel gezogen haben. Die Tafel ist also hier die bewegliche umhüllte Fläche, aus deren kleinen Zonen die Hauptfläche entsteht; diese aber ist die Umhüllung aller derjenigen Lagen, in welche die bewegliche Ebene der Blechtafel während der Arbeit kam.

§. 196.

Außer den conischen und sphärischen Flächen können auch Cylinder dazu gebraucht werden, durch ihre Bewegung umhüllende Umdrehungsflächen zu erzeugen. Denn errichtet man auf allen Punkten des Meridians senkrechte Linien auf dessen Ebene und läßt den so gebildeten Cylinder sich um die Meridianaxe drehen, so erhält man als Umhüllung aller seiner Lagen offenbar die nämliche Umdrehungsfläche, welche man durch Umdrehung der Meridiancurve erhalten hätte; den jede Seitenlinie dieses beweglichen Cylinders hat offenbar zur Umhüllungscurve aller ihrer Lagen denjenigen Parallelkreis, der durch die Umdrehung des jener Seite entsprechenden Meridianpunktes beschrieben worden wäre.

Die Betrachtung dieser allgemeinen Arten umhüllender Flächen führt auf einen sehr merkwürdigen Umstand, der sich aus den Durchschnitten der Charakteristiken ergibt: zuvor aber muß von einigen Eigenschaften der umhüllenden Linien in Bezug auf ebene Curven die Rede sein.

§. 197.

Evoluten ebener Curven. Es sei ABX irgend eine in einer Ebene verzeichnete Curve. Man nehme an, sie sei in die gleichen Elemente $BB' = B'B'' = B''B''' \ldots$ getheilt und durch die Mitten derselben seien die unendlich nahen Normalen MC, M′C′, M″C″, . . . gezogen, deren auf einander folgende Durchschnitte eine Curve CC′C″ . . . bilden, an welcher alle jene Normalen Tangenten sein werden. Diese Curve DCY, welche die Umhüllung aller der auf die ursprüngliche Curve ABX gezogenen Normalen ist, heißt die Evolute oder die Abgewickelte (développé) von ABX; dagegen heißt ABX die Evolvente (développante) der Curve DCY; die Gründe dieser Benennungen ergeben sich aus Nachfolgendem.

Der Punkt C, in welchem sich die auf der Mitte der gleichen Elemente BB′ und B′B″ errichteten Normalen MC und M′C′ schneiden, liegt offenbar in gleicher Entfernung von den drei Punkten B, B′ und B″; mithin ist C der Mittelpunkt eines Kreises, welcher mit der Curve AX die beiden Elemente BB′ und B′B″ gemeinschaftlich hat. Da nun durch drei gegebene Punkte nur eine einzige Kreislinie möglich ist, so gibt es außer jenem Kreis keinen andern mehr, dessen Krümmung sich so nahe an die Krümmung der Curve AX in der Gegend von B anschlöße; man nennt ihn deßhalb den Krümmungskreis (cercle osculateur) jener Curve

für den Punkt B. Der Halbmesser dieses Krümmungskreises wäre, streng genommen, eine von den drei Linien $CB = CB' = CB''$; doch kann man dafür $CM = CM'$ substituiren, weil diese verschiedenen Geraden die Halbmesser der ein und umschriebenen Kreise des Polygons $BB'B''$ sind, und weil bekanntlich für unendlich kleine Elemente diese Kreise zusammenfallen.*) Daraus folgt, daß der Mittelpunkt C, so wie der Halbmesser MC des Krümmungskreises durch den Durchschnitt zweier unendlich nahen Normalen bestimmt wird.

§. 198.

Die Gerade MC heißt der **Krümmungshalbmesser** der Linie ABX für den Punkt M, weil seine größere oder kleinere Länge eine mehr oder minder schwache Krümmung anzeigt. Will man sich nämlich einen deutlichen Begriff von der Krümmung einer Linie ABX machen, so betrachte man sie als ein Polygon, das man erhalten hat, indem man eine Gerade $BB'b''b''' \ldots$ nach und nach um die Punkte B', b'', $b''' \ldots$ bog; auf diese Weise ist klar, daß die Krümmung im Punkt B' durch die Neigung ausgedrückt werde, welche man den Elementen $B'b''$ und $B'B''$ gegeben hat; also durch den **Contingenzwinkel** $TB'T'$, oder vielmehr durch den Bogen s, durch den dieser Winkel gemessen wird in einem Kreise, dessen Halbmesser Eins ist. Nun ist aber der Winkel $TB'T'$ dem Winkel MCM' gleich**) und dieser umschließt einen Bogen der Curve $MB'M'$, welcher mit dem durch den Halbmesser MC beschriebenen Kreise zusammenfällt; mithin wird der Bogen s, der dem Bogen $MB'M'$ ähnlich ist und Eins zum Halbmesser hat, den Werth

$$s = \frac{MB'M'}{MC} = \frac{BB'}{MC} = \frac{ds}{\varrho}$$

haben. Da aber die Curve ABX durchaus in gleiche Elemente getheilt ist, so ist die Größe ds constant; und es folgt aus dem vorhergehenden Werthe, daß die durch s gemessene Krümmung sich von einem Punkte der Linie ABX zum andern im **umgekehrten Verhältniß des Halbmessers** $\varrho = MC$ ändert.

§. 199.

Man denke sich nun das Ende eines Fadens $MCC'C''Y$ irgendwo an dem Umfange der Evolute DCY, etwa in Y, befestigt, und den Faden selbst auf die Evolute aufgewickelt; gibt man nun dem übrigen geradlinigen Theile CM desselben eine solche Länge, daß sein Ende M in die Evolvente ABX fällt; so wird dieses Ende genau die Linie ABX durchlaufen, wenn man den Faden bei immer gleicher Spannung von der Evolute abwickelt. Denn ist z. B. bei dieser Abwickelung der Berührungspunkt des Fadens mit der Evolute, von C nach C' gekommen, so ist der geradlinige Theil $MC = M'C$ dieses Fadens um CC' größer geworden, so daß seine vollständige Länge $= M'C + CC' = M'C'$ sein wird. Da aber, nach §. 197, $M'C' = M''C'$ ist, so wird also das bewegliche Fadenende M sich nun genau in M'' befinden. So ist es mit allen übrigen auf einander folgenden Lagen des Fadens, und dieser beschreibt also wirklich, wenn er von der **Evolute** abgewickelt wird, die **Evolvente**. Es folgt aber noch ferner hieraus, daß irgend ein Bogen $CC'C''$ der Evolute genau Fig. 5(

*) Die Linien CM und CM' sind gleich, wenn die Elemente BB' und B'B'' hier von gleicher Länge sind; mithin sind die rechtwinkligen Dreiecke CMB und CM'B' congruent. Aus dem ersten dieser Dreiecke erhält man

$$CM = \sqrt{CB'^2 - MB'^2} = CB' \left(1 - \frac{MB'^2}{CB'^2}\right)^{1/2};$$

entwickelt man nun diesen Ausdruck, so sieht man, daß, im Falle MB' unendlich klein ist, die Differenz zwischen CM und CB' ein unendlich Kleines der **zweiten Ordnung** wird: also eine Größe, die sogar in Betracht mit MB' vernachläßigt werden darf.

**) Es sind nämlich in dem Viereck CMB'M' die Winkel bei M und M' Rechte, mithin Winkel $C + MB'M' = 2R$; da aber auch $TB'T' + MB'M' = 2R$, so ist Winkel $MCM' = TB'T'$.

Anmerk. des Uebers.

der Differenz der beiden Krümmungshalbmesser MC und M″C″ gleich ist, welche durch seine Endpunkte C und C″ gehen.

Ueberdieß bemerke man, daß eine bestimmte Curve ABX nie mehr als eine Evolute zuläßt, während eine und dieselbe Evolute DCY einer unendlichen Menge von Evolventen entspricht: denn nimmt man auf dem Faden MCC′Y verschiedene Punkte M, m . . . an, so werden diese bei seiner Abwickelung verschiedene Curven beschreiben, welche alle Evolventen derselben Evolute DCY sind. Alle diese Evolventen haben offenbar gemeinschaftliche Normalen und sind in der Richtung dieser Normalen überall gleich weit von einander entfernt.

§. 200.

Um einige einfache Beispiele aus der Theorie der Evoluten anzuführen, werde hier bemerkt, daß wenn die Curve ABX eine Parabel vom zweiten Grade wäre, ihre Evolute aus zwei Aesten von unbestimmter Länge bestehen würde, wie DCY und DY′. Der eine von diesen befände sich ober-, der andere unterhalb der Axe AD, in welcher sie sich vereinigten, indem sie daselbst den Wendepunkt D bildeten. Dieser Punkt ist vom Scheitel A um die Größe $AD = 2AF$, d. h. um den halben Parameter entfernt; und die Gerade AD ist zugleich der Krümmungshalbmesser der Parabel für den Scheitel A.

In der Ellipse ABDE (Fig. 76.), deren Halbaxen $OA = a$ und $OB = b$ sind, ist die Evolute eine Curve $\alpha\beta\delta\varepsilon$, die aus vier Aesten besteht mit eben so vielen Wendepunkten, deren Entfernungen von den Scheiteln A und B die Größen

$$A\alpha = D\delta = \frac{b^2}{a} \text{ und } B\beta = E\varepsilon = \frac{a^2}{b}$$

sind. Diese Geraden sind zugleich die Krümmungshalbmesser für die Scheitel A und B: denn die beiden Aeste $\alpha\beta$ und $\beta\delta$ dienen zur Beschreibung der Halbellipse ABD, während die beiden andern $\alpha\varepsilon$ und $\varepsilon\delta$ den untern Theil AED beschreiben.

In einem Kreise ist die Evolute ein einziger Punkt, nämlich der Mittelpunkt, und der Krümmungshalbmesser ist beständig dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich.

§. 201.

Fig. 54. Um aber solche Resultate zu erhalten, aus denen sich bei der Anwendung, welche demnächst von den Umhüllungsflächen gemacht werden wird, bedeutende Vortheile ziehen lassen, nehme man an, es sei eine kreisförmige Evolute YDFE unmittelbar gegeben gewesen, und man habe die Evolvente YO″O′OX daraus erhalten, indem man einen auf die Kreislinie aufgewickelten Faden, dessen bewegliches Ende anfänglich mit Y zusammenfiel, abgewickelt hat. Um diese Curve graphisch zu beschreiben, theile man die Kreislinie z. B. in zwölf gleiche Theile, und trage alsdann auf die Tangenten FO, F′O′, F″O″ . . . . Längen, welche beziehlich $^1/_{12}$, $^2/_{12}$, $^3/_{12}$ . . . . von der Kreislinie sind; so erhält man (§. 199) die verschiedenen Punkte O, O′, O″ . . . . der Evolvente YOX, welche eine Spirale sein wird, deren Anfangspunkt Y ist; die Spirale Yo″ox, welche mit der vorigen symmetrisch ist, betrachte man als einen zweiten Ast derselben Evolvente, der mit dem ersten nur eine einzige Curve bilde, die in allen ihren Theilen durch die stetige Bewegung eines einzigen Punktes beschrieben worden sei. Stellt man sich nämlich statt des um die Evolute gewickelten Fadens eine unbiegsame Gerade ABFab von unbestimmter Länge vor, welche sich, ohne zu gleiten, so um die Kreislinie bewegt, daß sie stets Tangente an derselben bleibt, so ist klar, daß ein fester Punkt O dieser Geraden nach und nach in die Lagen O′, O″ und Y kommen werde; dauert nun die Umdrehung der Geraden in der nämlichen Richtung fort, so wird der Punkt O, der in Y mit dem Berührungspunkte zusammenfiel, wieder über denselben hinaus zu liegen kommen und ohne Unterbrechung den Ast Yox beschreiben. Man wird übrigens bemerken, daß diese Art

e Evolvente durch Umdrehung einer unbiegsamen Geraden um die Evolute zu beschreiben, mit dem in §. 199 eigten Verfahren einerlei ist; aber die hier angewendete Verfahrungsart ist allgemeiner und wird sogar noth-ndig, wenn die Evolute Wendepunkte hat, wie bei der Ellipse, Parabel ꝛc., weil man sonst den Anknüpfungs-ukt des Fadens oft ändern müßte, um ihn von einem Ast auf den andern zu bringen.

§. 202.

Röhrenförmige Flächen. Dieses vorausgesetzt, stelle man sich vor, eine Kugel von *constantem* Fig. 54.
lbmesser, der durch $OA = OB$ dargestellt werde, bewege sich so, daß ihr Mittelpunkt die horizontale rve XOYox durchlaufe. Die Umhüllung aller Lagen dieser beweglichen Kugel wird, nach §. 190, durch die einander folgenden Durchschnitte der umhüllten Lagen gebildet; man untersuche daher, welches hier diese rchschnitte sein werden. Für die beiden Lagen O und O′ des beweglichen Mittelpunkts schneiden die beiden chgroßen Kugeln sich in einem kleinen Kreise, dessen Ebene offenbar senkrecht auf der Mitte der Geraden wird, welche die Mittelpunkte O und O′ verbindet; mithin wird dieser kleine Kreis auf der als horizontal enommenen Ebene der Figur 54. durch eine Gerade projicirt werden, welche senkrecht auf der Sehne OO′ t und durch ihre Mitte geht. Je näher nun der Mittelpunkt O′ bei O genommen wird, desto mehr wird die estimmt verlängerte Sehne OO′ sich einer Tangente an der Curve XOY nähern, und sie wird mit dieser ngente zusammenfallen, wenn O und O′ unendlich nahe genommen werden. Für zwei unendlich nahe Kugeln er vielmehr für zwei Kugeln, deren Mittelpunkte unendlich nahe sind) ist also die Durchschnittscurve *ein größ-Kreis, dessen Projection die auf die Leitcurve XOY gezogene Normale AOB* ist. Daraus r folgt, daß die Umhüllung als eine Fläche betrachtet werden könne, welche durch den größten Vertikal-s AOB dadurch erzeugt wurde, daß sein Mittelpunkt die Curve XOY durchlief, während seine Ebene senk-t auf eben dieser Curve blieb. Sonach ist diese Fläche eine *krummlinige Röhre*, deren Axe die Richtungs-ve XOY ist, und deren Durchschnitte, wenn sie normal auf die Axe gemacht werden, lauter Kreise von glei-n Halbmesser sein werden.

§. 203.

Diese Folgerungen bleiben dieselben, welches auch die Natur der Linie XOY sei, und man wird also, n man nach einander verschiedene Curven als Leitlinien für den Mittelpunkt der Kugel annimmt, Um-lungsflächen von sehr verschiedener Form erhalten, deren Normaldurchschnitte aber stets Kreise von gleichem lbmesser OA sein werden. Ein solcher Kreis kann also betrachtet werden *als eine Erzeugende von un-änderlicher Gestalt für alle diejenigen Flächen, welche den von einer Kugel mit constantem rchmesser durchlaufenen Raum umhüllen.* Und da jene Erzeugende diesem ganzen *Geschlecht* von hüllungsflächen einen bestimmten und von der Natur der Leitcurve XOY unabhängigen Charakter gibt, so nte sie Monge die *Charakteristik*, welchen Namen er überhaupt dem Durchschnitt zweier auf einander enden umhüllten Flächen gab, in jedem Geschlechte solcher Umhüllungen, welche durch eine und dieselbe be-liche Fläche erzeugt werden, nach welchem Gesetze sich auch letztere bewegen möge.

§. 204.

Im §. 190 wurde gesagt, die Umhüllungsfläche berühre jede der einzelnen umhüllten Flächen längs der rakteristik: diese ist nun in gegenwärtigem Falle der vertikale und bewegliche größte Kreis AOB. Es elden sich auch wirklich drei unendlich nahe Lagen S, S′, S″ der beweglichen Kugel in zwei Kreisen, welche e auf der Kugel S′ liegen und daselbst eine Zone von unendlich kleiner aber ungleicher Breite einschließen, che der Kugel S′ und der Umhüllung gemeinschaftlich ist; so daß also diese beiden letzteren Flächen, da sie

die nämlichen Flächenelemente oder die nämlichen Berührungsebenen längs jener Zone haben, sich wechselseitig in dieser gemeinschaftlichen Region berühren, durch deren Mitte die wahre Charakteristik oder der auf der Curve XOY normale größte Kreis geht.

§. 205.

Fig. 54. Man vergleiche nun die verschiedenen in AOB, A'O'B', . . . projicirten Charakteristiken unter sich und bediene sich wieder, um die etwas schwierige Unterscheidung ihrer Durchschnitte für die Vorstellung zu erleichtern, des Verfahrens, das gegen das Ende des §. 201 angewendet wurde, um eine Evolvente zu beschreiben: man stelle sich nämlich vor, die Vertikalebene AOBF der Charakteristik sei unbiegsam und unbestimmt verlängert, und bewege sich, ohne zu gleiten, so um den vertikalen Cylinder, daß sie ihn stets berühre; so wird, während dieser Bewegung, der Kreis AOB die Umhüllung, von welcher hier die Rede ist, durchlaufen, weil die vorhergehenden Bedingungen, — daß der Mittelpunkt jenes Kreises die Evolvente XOY durchlaufen müsse, während seine Ebene normal auf dieser Curve bleibe, — hier vollkommen zutreffen. Auch werden alle Punkte auf dem Umfange des beweglichen Kreises, die in B, R, ... A projicirt sind, Spiralen BD, RL, ... AA'E beschreiben, welche eben so viele Evolventen des Kreises FDY sind, und von welchen die erste und letzte den sichtbaren Umriß der Umhüllungsfläche bilden.

§. 206.

So lange nun bei der Bewegung der Vertikalebene AF um den Cylinder FDY, der Endpunkt B des Kreisdurchmessers die Evolute nicht erreicht, so lange werden auch zwei auf einander folgende Charakteristiken sich nicht schneiden; denn aus §. 197 ist bekannt, daß irgend eine Normale A'F' der Curve ihre nächstliegende Normale nur in dem auf der Evolute gelegenen Punkte F' treffen kann: dieser Punkt aber liegt außerhalb des Durchmessers A'B', der die Projection der Charakteristik nach ihren Endpunkten bestimmt. So bald hingegen der Punkt B einmal den Cylinder in D berührt hat, werden die auf einander folgenden Charakteristiken anfangen sich zu schneiden: die Normale GLg z. B. wird ihre nächstliegende in dem Punkt L der Evolute schneiden, und da dieser Punkt sich innerhalb des Durchmessers Gg = AB befindet, so folgt daraus, daß die beiden in Gg und der nächstliegenden Normale projicirten Charakteristiken sich in zwei Punkten schneiden, welche beide in L projicirt sind, und von denen der eine über, der andere unterhalb der Horizontalebene der Figur liegt. Um diese Behauptung vollkommen zu rechtfertigen, muß jedesmal hinzugefügt werden, daß die beiden Charakteristiken sich auf einer und derselben umhüllten Lage der beweglichen Kugel befinden; denn sonst könnten die Ebenen dieser beiden Kreise sich wohl schneiden, ohne daß darum ihre Umfänge zwei Punkte gemein hätten.

Es folgt hieraus, daß von DI an, die verschiedenen Charakteristiken durch ihre auf einander folgenden Durchschnitte je in zwei Segmente getheilt werden, von denen die einen die Normalen

LG, MH, YP, VQ, UT, ... (N)

die andern Lg, Mh, Yp, Vq, Ut, ... (n)

zu Projectionen haben.

Die Segmente der ersten Reihe nun bilden einen Mantel, der hier durch (N) bezeichnet wird, und den die ganzen Charakteristiken AB, A'B' . . . . angehören, während die Segmente der andern Reihe einen zweiten Mantel (n) bilden, der anfangs im ersteren eingeschlossen ist, bald aber aus demselben heraustritt und sich unbestimmt bis zu den ganzen Charakteristiken a'b', ab . . . . ausbreitet. Außerdem vereinigen sich die beiden Mäntel der Umhüllungsfläche längs einer Curve von doppelter Krümmung, deren Projection DLM YVUE ist. Diese Curve ist aber nichts anderes als der vertikale Kreis AB, wenn man seine Ebene sich um den Cylinder der Evolute gebogen und auf denselben aufgewickelt denkt.

§. 207.

Die Curve DYE von doppelter Krümmung ist übrigens die wahre Wendecurve für die ganze Umhül- Fig. 54.
ungsfläche. Denn da nach §. 205 irgend ein Punkt Z der beweglichen Charakteristik die beiden Aeste $Z\alpha\beta$
nd $M\gamma\delta z$ einer Spirale beschreibt, deren Wendepunkt M ist; so muß er sich, während er in α oder β ist, noch auf
em Mantel (N) auf der einen Seite der Berührungspunkte D oder L befinden; ist er aber einmal in γ oder in
angekommen, so befindet er sich auf dem Mantel (n) auf der andern Seite der Berührungspunkte Y oder V:
olglich geht dieser bewegliche Punkt genau in M von einem Mantel zum andern über, und die Gestalt der
Spirale zeigt deutlich, daß dieser Uebergang wirklich durch einen Wendepunkt geschehe. Das Nämliche läßt sich
ber von allen Punkten auf der Charakteristik AB nachweisen, woraus sich also der Schluß ziehen läßt, daß die
i DMYE projicirte Linie die Wendecurve der beiden Umhüllungsmäntel ist.

Ein ähnlicher Umstand würde sich bei allen Umhüllungsflächen ergeben, welche Gestalt auch die bewegliche
fläche haben möchte, durch welche sie erzeugt werden; und eben aus diesem Grunde hat Monge derjenigen
inie, welche durch die auf einander folgenden Durchschnitte der Charakteristiken gebildet wird,
en allgemeinen Namen Wendecurve gegeben. Ein merkwürdiges Beispiel, wo die Charakteristiken gerade
inien waren, kam in §. 178 bei den entwickelbaren Flächen vor.

§. 208.

Bei der Darstellung der Umhüllungsfläche in Fig. 54. mußten die Segmente Lg, Mh .... der Charak-
eristiken, welche dem Mantel n angehören, punktirt werden, weil sie im Mantel (N) eingeschlossen und daher
nsichtbar sind. Es ist nämlich

$$L\beta = LM < L\varepsilon + \varepsilon M;$$

eht man nun auf beiden Seiten $L\varepsilon$ ab, so bleibt

$$\varepsilon\beta < \varepsilon M.$$

führt man daher die beiden in ε projicirten Punkte, von denen der eine dem Segment LG, der andere dem
Segment Mh angehört, auf den Kreis AOB zurück, so wird der erstere in ε' fallen, und also näher zum Punkt
Z und zum Mittelpunkt O kommen als der andere, der seine Lage in ε'' erhält. Der Punkt ε' muß also höher
liegen als ε'', und mithin geht das Segment LG und Mh weg. Auf ähnliche Art können die Gründe für jede
Punktirung entwickelt werden, welche in der Fig. 54. angewendet wurde. Schließlich ist noch zu bemerken, daß
die Punkte R und ρ, Z und ζ .... des beweglichen Kreises AOB, welche sich beziehlich in gleicher Höhe be-
finden, Spiralen beschreiben, die sich begegnen; so daß also die beiden Mäntel (N) und (n) der Umhüllung sich
nach einer Linie durchschneiden müssen, deren Projection die Gerade YW ist. Die in diesem Kapitel abgehandel-
ten Flächen, und besonders die letztere, die, weil sie mehrere interessante Seiten darbietet, einer genauern Unter-
suchung unterworfen wurde, werden ohne Zweifel hinreichend sein, dem Leser einen vollständigen Begriff von den
Umhüllungsflächen und ihren Eigenschaften zu geben.

Vierter Abschnitt.

Vom Durchschnitte der Flächen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundsätze.

§. 209.

Um dem Leser einen allgemeinen Begriff von dem Verfahren zu geben, durch welches man im Stande ist, den Durchschnitt zweier Flächen zu bestimmen, werde hier zuerst der sehr einfache Fall betrachtet, wo eine Fläche S von einer gegebenen Horizontalebene P geschnitten wird. Da die Fläche als bekannt und hinlänglich bestimmt angenommen wird, so kennt man also die Gestalt ihrer Erzeugungslinie (§. 70) und das Gesetz, nach welchem sie sich ändert: folglich kann man auf die beiden Projectionsebenen verschiedene Lagen dieser Erzeugungslinie zeichnen in so großer Anzahl und so nahe bei einander als man nur immer will. Die Projectionen dieser Lagen seien (G, G'), (G_2, G_2'), (G_3, G_3') . . . . . Da nun die schneidende Ebene P senkrecht ist auf der Vertikalebene, so schneidet sie die Linie (G, G') in einem Punkt, dessen Vertikalprojection in den Durchschnitt der Projection G' mit dem Vertikaldurchschnitt der Ebene P fallen muß. Fällt man daher aus diesem Durchschnitt eine Senkrechte auf die Projectionsaxe und verlängert sie bis G, so erhält man die Horizontalprojection m jenes Durchschnittspunktes der Fläche S mit der Ebene P. Wiederholt man dieses Verfahren für jede Erzeugende, so erhält man eine Reihe Punkte m, m_2, m_3, m_4 . . . . ., die man, wenn sie nahe genug beisammen sind, durch einen stetigen Strich*) vereinigen kann, so daß man auf der horizontalen Grundebene eine Projection erhält, aus welcher man die Gestalt der Curve, nach welcher die Fläche S von der Ebene P geschnitten wird, erkennen kann.

---

*) Es gehört viel Geschicklichkeit dazu, Punkte, die in einiger Entfernung von einander liegen, durch eine stetige Linie so zu verbinden, daß diese weder Büge, noch unregelmäßige Krümmungen enthalte. Man muß daher keine Mühe sparen, Auge und Hand hierin gehörig zu üben, und sich ein richtiges Gefühl von der Stetigkeit der verschiedenen Curven zu erwerben: denn die Construction der Flächendurchschnitte ist eines der wichtigsten und nützlichsten Probleme, sowohl als Mittel, um theoretische Untersuchungen anzustellen, als auch wegen der praktischen Anwendung, die es in der Perspective, dem Steinschnitt, der Holzverbindung ꝛc. findet. Man merke sich jedoch gleich hier, daß es nicht immer von Vortheil ist, sehr viele Hilfspunkte m, m_2, m_3 . . . zu construiren, indem die kleinen Fehler, die man bei jeder Zeichnung aus freier Hand unvermeidlich begeht, sich bei sehr nahen Punkten nur vermehren und dadurch Ausbiegungen oder andere Unförmlichkeiten erzeugen, die bei größeren Entfernungen der Punkte weniger merklich geworden wären. Man muß daher die Hilfsconstructionen mit Maaß, nach dem Muster guter Vorbilder, anwenden und ihre Zahl nur in solchen Parthien der Curve vermehren, welche von einer besondern Gestalt zu sein und daher eine genauere Prüfung zu erfordern scheinen. Auch muß man sich Alles zu Nutze machen, was zum Voraus von der Natur des gesuchten Durchschnittes bekannt ist. Weiß man z. B., daß die Projection eine Curve vom zweiten oder vierten Grad werden werde, so darf kein Bogen derselben in mehr als zwei oder vier Punkten von einer Geraden geschnitten werden; träfe das Gegentheil zu, so müßte man an solchen Orten die Constructionen wiederholen und verbessern. Auch die Tangenten können als Mittel dienen, die Gestalt einer Curve nach ihrer Richtigkeit zu prüfen. Denn kennt man eine solche Gerade, so wird man leicht bemerken können, ob der Bogen vor oder nach dem Berührungspunkt erhabener oder flacher sein müsse, damit eine vollkommene Berührung stattfinde. Uebrigens reichen allgemeine Vorschriften hierüber nicht hin, und man muß daher außer der Benützung gut gewählter Vorbilder auch noch die Anweisung geschickter Praktiker darüber zu Rathe ziehen.

§. 210.

Es seien nun irgend zwei beliebige Flächen S und S′ gegeben, und, um ihren Durchschnitt zu finden, chneide man sie durch eine Reihe horizontaler Ebenen P, P_2, P_3 . . . . Jede dieser Hilfsebenen, z. B. P, wird ie Fläche S in einer Linie m m_2 m_3 . . . . und die Fläche S′ in einer andern Linie m′ m'_2 m'_3 . . . . schnei- en. Die Projection dieser beiden Linien aber kann man construiren, indem man das im vorigen Paragraphen ngezeigte Verfahren befolgt; schneiden sich nun die Projectionen selbst auf der horizontalen Grundebene in einem der in mehreren Punkten M, N . . . . , so sind diese Punkte offenbar die Horizontalprojectionen verschiedener Durchschnittspunkte der Flächen S und S′. Die Vertikalprojectionen eben dieser Punkte findet man, indem man uf M, N . . . . Senkrechte auf die Projectionare zieht und solche bis zu ihrem Durchschnitt mit der vertikalen Spur der Hilfsebene P verlängert. Wiederholt man dieses Verfahren auch in Beziehung auf die andern Ebenen $_2$, P_3, ... so erhält man auf jeder Projectionsebene eine Reihe von Punkten M, M_2, M_3, . . . N, N_2, N_3, . . . $_2$ ie man durch einen stetigen Zug verbinden kann, wobei man jedoch wohl unterscheiden muß, welche von diesen unkten dem einen, und welche einem andern Ast der Curve angehören. Diese Unterscheidung ist manchmal ziem- ch schwierig; doch wird sie immer gelingen, wenn man genau Achtung gibt, welche Resultate man nach und ach durch die auf einander folgenden Hilfsebenen erhalten hat. Im Falle eine der beiden Flächen S und S′ wei von einander verschiedene Mäntel haben sollte, wie es z. B. bei conischen Flächen vorkömmt, so dürfte man atürlich diejenigen Punkte, welche entgegengesetzten Mänteln zugehören, nicht verbinden.

§. 211.

Das hier beschriebene Verfahren ist allgemein und reicht in allen Fällen hin, um den Durchschnitt irgend weier Flächen S und S′ zu finden; überdieß aber kann man den schneidenden Ebenen P, P_2, P_3 . . . . jede eliebige Richtung geben, vorausgesetzt, daß man bei derselben die Hilfscurven m m_2 . . . , m′ m'_2 . . . . bequem nstruiren könne. Bei jeder Aufgabe wird es daher vortheilhaft sein, die schneidenden Ebenen wo möglich so zu ählen, daß die Hilfsschnitte entweder *gerade Linien* oder *Kreise* werden, weil solche Linien sich leicht mittelst weier Gegebenen zeichnen lassen. Sollte z. B. der Durchschnitt zweier Cylinder gefunden werden, so würde man ch solcher Ebenen P, P_2 . . . . bedienen, die mit den Erzeugungslinien beider Flächen zumal parallel wären; andelte es sich vom Durchschnitt zweier Kegel, so würde man alle schneidenden Ebenen durch diejenige Gerade hen lassen, welche beide Spitzen vereinigt. Manchmal bedient man sich sogar, um die Flächen S und S′ zu hneiden, keiner Ebenen, sondern krummer Flächen, z. B. concentrischer Kugeln, durch welche man alsdann Kreise ls Hilfsdurchschnitte in den gegebenen Flächen erhält (s. §. 333).

§. 212.

Hat man die beiden Projectionen des gesuchten Durchschnittes construirt, so ist die Durchschnittscurve selbst estimmt; im Falle sie nun eben ist, muß man sie, damit man ihre wahre Gestalt erhalte, auf eine der Projec- onsebenen *aufklappen*. Wenn ferner eine der beiden gegebenen Flächen *entwickelbar* ist, so muß man ire Entwickelung, so wie die Construction derjenigen Curve, in welche sich die Durchschnittscurve bei der Ent- ickelung *verwandelt* (§. 175), wirklich ausführen. Letztere Curve ist besonders bei den Anwendungen auf *Stereotomie* von Wichtigkeit. Da endlich die graphische Bestimmung der Tangenten an einer Curve ein Mittel st, die letztere genauer zu zeichnen, so muß man sich in dieser Bestimmung, die auch in verschiedenen andern Fällen roßen Nutzen gewährt, sehr üben, sowohl in Beziehung auf die ursprüngliche Durchschnittscurve, als auch in Be- iehung auf die Aufklappung derselben und auf ihre Verwandelte. Da aber die Tangenten an den beiden letzteren Curven sich immer leicht aus den Tangenten der ursprünglichen herleiten lassen; so wird es hinreichend sein, eine

allgemeine Methode für die Bestimmung der Tangenten an dieser ursprünglichen Curve in Nächstfolgendem anzugeben.

§. 213.

ig. 57. Es seien S und S′ die gegebenen Flächen und AMB sei ihr Durchschnitt. Da nun diese Curve in beiden Flächen zugleich liegt, so muß die an einen ihrer Punkte M gezogene Tangente MT zugleich in den beiden Berührungsebenen liegen, von denen die eine die Fläche S und die andere die Fläche S′ in dem gemeinschaftlichen Punkte M berührt. Die Tangente MT ist mithin der Durchschnitt der beiden Berührungsebenen, von welchen die gegebenen Flächen im Punkt M berührt werden. Man darf also nur diese beiden Ebenen nach den früher angegebenen Methoden construiren, und die Gerade suchen, in welcher sie sich schneiden; von dieser Geraden aber braucht man nur einen einzigen Punkt zu suchen, weil der andere Punkt M schon durch die Aufgabe bestimmt ist.

Ist eine der gegebenen Flächen, z. B. S′ eine Ebene, oder weiß man, daß die Curve AMB eben ist, wenn gleich die beiden S und S′, deren Durchschnitt sie ist, krumme Flächen sind, so reducirt sich das vorige Verfahren darauf, den Durchschnitt der Berührungsebene von S mit der Ebene S′, oder mit der Ebene der Curve AMB zu finden.

§. 214.

Anderes Verfahren. Construirt man auf den Punkt M der Fläche S die Normale MN und auf den nämlichen Punkt der Fläche S′ die Normale MN′, so ist die Ebene NMN′ senkrecht auf jeder der Berührungsebenen und mithin auch senkrecht auf ihrem Durchschnitt MT. Die Tangente an der Durchschnittscurve zweier Flächen ist also senkrecht auf der Ebene der Normalen an diesen Flächen; diese Ebene aber fällt mit der Normalebene (§. 168) der Curve AMB zusammen. Man darf daher nur jene beiden Normalen und die durch sie bestimmte Ebene construiren, und hierauf durch den gegebenen Punkt M dieser Ebene eine Senkrechte ziehen, um die verlangte Tangente zu erhalten. Diese Methode*) ist von großem Werth, denn 1) gibt es Flächen, für welche sich die Normale viel einfacher als die Berührungsebene und unabhängig von dieser (§. 136) bestimmen läßt; 2) kommt es manchmal vor, daß für gewisse besondere Punkte beide Berührungsebenen senkrecht auf eine und dieselbe Projectionsebene zu stehen kommen: in diesem Falle aber liefert das Verfahren des §. 213 kein bestimmtes Resultat mehr für die Tangente der auf jener Ebene projicirten Curve, während die Methode der beiden Normalen noch angewendet werden kann, in Folge gewisser Verhältnisse, welche, selbst wenn sie die Grenze erreichen, nicht unbestimmt werden. In der Folge (§§. 340, 477) und beim Steinschnitt kommen Beispiele hievon vor.

§. 215.

Wenn die gegebenen Flächen eine solche Lage haben, daß sie sich längs einer Linie, die ihnen gemeinschaftlich ist, berühren, so heißt eine solche besondere Art des Durchschnitts — Berührungslinie (ligne de contact) — und die eine der Flächen heißt die umschriebene der andern. In diesem Falle nun läßt sich zwar die Berührungslinie noch immer nach dem allgemeinen Verfahren des §. 210 construiren; aber eine Tangente an dieselbe zu ziehen, ist jetzt nicht mehr möglich, weil, nach der Annahme, die beiden Berührungsebenen, deren Durchschnitt die Tangente geben sollte, in Eine zusammenfallen. Auch die Methode der Normalen liefert

*) Sie ist von Herrn J. Binet, der selbst interessante Anwendungen von ihr auf verschiedene Figuren der Geometrie und des Steinschnitts gemacht hat.

ɜt kein bestimmtes Resultat mehr, weil dieselben zugleich mit den Berührungsebenen zusammenfallen und also : Normalebene unbestimmt lassen. Für die Berührungslinien zweier Flächen liefert also die Geometrie keine ethode zur graphischen Bestimmung ihrer Tangenten,*) wenigstens wenn die Berührungslinie keine ebene Curve . Ist sie aber eben, so gibt der Durchschnitt ihrer Ebene mit der Berührungsebene die verlangte Tangente.

§. 216.

Diese allgemeinen Bemerkungen über Flächendurchschnitte sollen nun im folgenden Kapitel zur Auflösung rschiedener hieher gehöriger Aufgaben benützt werden, wobei sich zugleich die Gelegenheit ergeben wird, Unterchungen über einige bemerkenswerthe Eigenschaften jener Durchschnitte, z. B. über ihre unendlichen Aeste und symptoten anzustellen, von welchen bisher nur oberflächlich die Rede sein konnte.

Zweites Kapitel.

Durchschnitte krummer Flächen mit Ebenen; Entwickelung der Flächen ꝛc.

§. 217.

Aufgabe. Es ist zu finden 1) der Durchschnitt eines senkrechten Cylinders mit einer gebenen Ebene; 2) die Aufklappung dieses Durchschnitts und seiner Tangente; 3) die Entickelung des Cylinders und die Curve, in welche sich der Durchschnitt bei der Entwickelung erwandelt, sammt ihrer Tangente.

Auflösung. Es wurde schon im §. 160 gesagt, daß man unter einem senkrechten Cylinder einen lchen zu verstehen habe, dessen Grund- oder Richtungslinie eine ebene und auf den Erzeugungslinien senkrechte urve sei, ohne daß diese gerade ein Kreis sein müsse. Hier nun wird zwar angenommen, diese Grundlinie i wirklich ein Kreis: aber die über das Verfahren anzustellenden Betrachtungen werden so allgemein gehalten erden, daß sie sich auch auf jede andere Curve anwenden lassen. Da es ferner zweckmäßig ist, bei Auflösung der Aufgabe den Projectionsebenen eine solche Lage zu geben, bei welcher die graphischen Operationen sich am eisten vereinfachen lassen, so wird hier die Ebene der Grundlinie ABDC als horizontale Projectionsebene annommen, die Vertikalebene hingegen so gewählt, daß sie senkrecht auf der schneidenden Ebene steht, deren Spu- Fig. 58.
n mithin PQ und QR′ sein werden. Der Cylinder selbst wird durch die Curve ABDC, welche zugleich sein chtbarer Umriß auf der horizontalen Grundebene ist, und durch die beiden Geraden GG′ und VV′ dargestellt, elche offenbar die Spuren der beiden auf der Vertikalebene senkrecht stehenden Berührungsebenen sind, und als lche den sichtbaren Umriß des Cylinders auf jener Ebene bilden (§. 106). Endlich wird angenommen, der ylinder werde durch zwei horizontale Ebenen GV und G′V′ begrenzt.

§. 218.

Nach diesen Voraussetzungen nun wird die Ebene PQR′ den vertikalen Cylinder in einer Curve schneiden,

*) Doch wird im §. 572 eine Methode angegeben werden, durch welche zwar jener Zweck erreicht wird, welche aber für die Anwendung viel zu verwickelt ist, und daher nur zur Vervollständigung der Theorie dient.

welche auf der horizontalen Grundebene durch ABDC und auf der vertikalen durch das Stück A'D' der Spur der schneidenden Ebene projicirt wird. Da also bei diesem sehr einfachen Falle die Projectionen des Durchschnitts unmittelbar bekannt sind, so bedarf es der im §. 210 angegebenen Methode nicht.

§. 219.

Aufklappung. Um nun die wahre Gestalt der Durchschnittscurve kennen zu lernen, muß man die Ebene, in welcher sie enthalten ist, um PQ auf die Horizontalebene aufklappen. Damit aber die Zeichnung mehr symmetrisch ausfalle, lasse man die Ebene PQR' sich so lange um die Horizontale (BC, B') drehen, bis sie mit der horizontalen Grundebene parallel wird. Bei dieser Umdrehung geht die vertikale Spur Q'R' in die Horizontallinie q'B' über, und irgend ein Punkt der Durchschnittscurve, z. B. (M, M'), beschreibt einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Umdrehungsaxe ist; die Vertikalprojection dieses Bogens wird also ein gleich großer aus B' beschriebener Bogen M'm', und seine Horizontalprojection die unbestimmte mit der Axe parallele Linie MF sein. Der Punkt M' ist also in m' zu liegen gekommen; projicirt man nun diesen letztern in den Punkt m der Linie NF, so erhält man die Lage des Punktes (M, M') nach der Aufklappung. Verfährt man eben so mit den andern Punkten A, D, E, F ...., *) so erhält man ihre Aufklappungen a, d, e, f, ..., und verbindet man diese durch einen stetigen Zug, so erhält man die Linie amBdCna als die Durchschnittscurve in ihrer wahren Größe und Gestalt.

§. 220.

Diese Curve ist hier eine Ellipse: denn vergleicht man sie mit dem Kreise, so findet man, daß für jede auf der Linie BC genommene Abscisse die beiden zugehörigen senkrechten Ordinaten in dem constanten Verhältniß OA : B'A' stehen; nun ist aber bekannt, daß ein Kreis sich wirklich in eine Ellipse verwandelt, wenn seine Ordinaten nach einem solchen constanten Verhältniß wachsen. **) Da sich ferner auf der ursprünglichen Curve zwei Punkte M und N befanden, welche einen und eben denselben Punkt M' zur Vertikalprojection hatten, und da, bei der Aufklappung eben diese beiden Punkte auf die Sehne mn versetzt wurden, welche senkrecht auf Oa steht und von letzterer halbirt wird, so folgt daraus, daß die Linie aOd eine Reihe paralleler Sehnen in der aufgeklappten Curve unter rechten Winkeln halbire: mithin ist aOd die eine Axe der Ellipse, und folglich BOC die andere.

§. 221.

Es werde nun eine Tangente der Durchschnittscurve für irgend einen gegebenen Punkt (M, M') gesucht. Nach der allgemeinen Regel des §. 213 muß diese Tangente in der schneidenden Ebene PQR' und zugleich auch in der Berührungsebene des Cylinders liegen, deren horizontale Spur die Gerade MT ist. Nach den im §. 217 gemachten Voraussetzungen sind also MT und M'Q die beiden Projectionen der gesuchten Tangente. Um nun aber auch ihre Aufklappung zu finden, bemerke man, daß der Fußpunkt (T, Q) derselben eben so wie vorhin der Punkt (M, M') einen Kreisbogen um die Horizontale (BC, B') beschreibt; da somit T in die Lage t kömmt, der Berührungspunkt M aber bei der Aufklappung in m zu liegen kam, so ist also tm die aufgeklappte Tangente, welche die Curve amBd ganz genau berühren muß.

*) Obgleich man diese Punkte ganz nach Willkür auf der Grundlinie ABDC wählen könnte, so ist es doch, wegen der demnächst folgenden Entwickelung, besser, sie so anzunehmen, daß sie die Grundlinie in gleiche Theile theilen.

**) Beschreibt man nämlich über einer der beiden Axen der Ellipse einen Kreis und nimmt diese Axe als Abscissenlinie, so ist jede der Kreisordinaten mit der zur nämlichen Abscisse gehörigen Ordinate der Ellipse in dem unveränderlichen Verhältniß der beiden Axen der Ellipse. Anmerk. d. Ueberf.

Die Tangente an der ursprünglichen Durchschnittscurve begegnete der Umdrehungsaxe in einem Punkte), B'). Da nun dieser Punkt während der Umdrehung unbeweglich blieb, so muß also auch die Tangente t m t der aufgeklappten Curve durch den Punkt S gehen.

§. 222.

Entwickelung. Aus §. 161 ist bekannt, daß bei der Entwickelung eines Cylinders der senkrechte Durch- Fig. 58.
)nitt, hier also die Grundlinie A B D C, geradlinig wird, ohne daß er seine Länge ändert, und daß die Seiten=
ien senkrecht auf ihm bleiben. Man nehme nun an, der Cylinder werde längs der Seitenlinie (D, V V') öffnet; trägt man nun auf eine Linie von unbestimmter Größe die Längen

$$D''E'' = DE,\ E''F'' = EF,\ F''B'' = FB,\ B''M'' = BM \text{ ꝛc.}^{*})$$

ir errichtet in den Punkten D'', E'', F'' .... senkrechte Linien, alle von der Höhe V V' des Cylinders, so hält man das Rechteck D'' V'' V''' D''' als Entwickelung der Cylinderfläche. Um nun auch die Verwandelte der urchschnittscurve zu erhalten, erinnere man sich, daß diejenigen Theile der Seitenlinien, welche zwischen der rundlinie und jener Curve liegen, bei der Entwickelung ihre anfängliche Länge behalten. Man trage daher auf e Vertikallinien der Entwickelung die Höhen

$$D''\delta = VD',\ E''\varepsilon = KE',\ F''\varphi = IF', \ldots$$

ıd verbinde ihre obern Endpunkte durch einen stetigen Zug; so erhält man die Curve $\delta\varepsilon\varphi\beta\mu\alpha\delta$ als die Verandelte des Durchschnitts.

§. 223.

In gegenwärtigem Beispiele, wo die Grundlinie des senkrechten Cylinders ein Kreis ist, besteht die Verandelte für's Erste aus zwei offenbar symmetrischen Theilen $\alpha\delta$ und $\alpha\delta'$; denn die gleichen Bogen A M und N entsprechen zweien Punkten des Durchschnitts, welche beide in M projicirt sind: mithin geben sie bei der ntwickelung beziehlich gleiche Abscissen und Ordinaten; nämlich:

$$A''M'' = A''N'' \text{ und } M''\mu = N''\nu.$$

ir's Zweite besteht jeder der beiden symmetrischen Theile $\alpha\delta$ und $\alpha\delta'$ wieder aus zwei gleichen Theilen — z. B. δ aus den gleichen $\beta\alpha$ und $\beta\delta$, — welche aber in Beziehung auf die Horizontale $\omega\beta$ eine entgegengesetzte ge haben: dieses kommt daher, weil vom Punkte β aus die Punkte φ und μ, ε und λ aus den Punkten F' d M', E' und L' des Cylinders hervorgehen, welche sich in beziehlich gleicher Höhe über und unter dem unkte B' befinden. Uebrigens ist die ganze Verwandelte nur ein Theil einer unbegrenzten Curve,**) welche

---

*) Ist die Curve A B D C von beliebiger Gestalt, so muß man, um die Bögen D E, E F ... zu rectificiren, sie mittels eines Zirkels messen. Zwar gibt die Zirkelöffnung, durch welche dieses geschieht, eigentlich nur die Größe der Sehne an, welche der Bogen umspannt: diese ist aber wegen der Kleinheit des Bogens von letzterem nicht merklich verschieden. Die gemessenen Bogenstücke werden sodann auf die unbestimmte Linie D'' D''', getragen. Handelt es sich aber, wie in gegenwärtigem Falle, von der Rectification einer Kreislinie, so ist es nicht nur bequemer, sondern auch genauer, die Linie D'' D''' gleich $\frac{22}{7}$ des Durchmessers A D zu machen, und sie hierauf in eben so viele gleiche Theile zu theilen, als die Kreislinie deren enthält. Es wird nämlich vorausgesetzt, man habe die Theilpunkte der Grundlinie des Cylinders in gleichen Entfernungen genommen (s. Anmerkung zu §. 219).

**) Diese Curve ist eine Sinusoïde; denn bezeichnet x die horizontale Abscisse und y die vertikale Ordinate des Punktes φ, den Punkt β als Anfangspunkt genommen; sind ferner $x' = B'U$ und $y' = F'U$ die Coordinaten des in Beziehung auf den Anfangspunkt B' analogen Punktes F', so hat man offenbar die Gleichungen

$$y' = y,\ x' = \sin BF = \sin B'F'' = \sin x,\ y' = a\,x,$$

wo a die trigonometrische Tangente des Winkels R' B' d' bezeichnet. Eliminirt man nun die Veränderlichen x' und y', so erhält man als Gleichung für die in β anfangende Verwandelte:

nach dem zwiſchen ihren Coordinaten beſtehenden Verhältniſſe eine unendliche Menge auf einander folgender vollkommen gleicher Aeſte $\delta' \alpha \delta$ enthält. Man kann auch geometriſch dieſe verſchiedenen Aeſte dadurch entſtehen laſſen, indem man ſich vorſtellt, die Ebene, auf welcher die Entwickelung des Cylinders ausgeführt wird, drehe ſich, ohne zu gleiten, ſo vielmal um dieſen Körper herum, als man nur immer will: dadurch erzeugt ſich offenbar auf der Ebene eine Curve, die man durch ſtete Wiederholung der vorhergehenden Conſtructionen auf der Verlängerung von $D''' D''$ erhält.

§. 224.

Es ſoll nun an irgend einen Punkt μ der Verwandelten eine Tangente conſtruirt werden. Aus §. 162, Nr. 3 iſt bekannt, daß dieſe Tangente nichts anderes iſt, als die Lage, welche die Tangente (MT, M'Q) an der urſprünglichen Curve bei der Entwickelung des Cylinders annimmt, und daß ferner der Winkel, den dieſe Tangente mit der Seitenlinie des Cylinders bildet, unverändert bleibt. Daraus aber folgt, daß auch das rechtwinklige Dreieck, das aus letzterer Tangente, der Vertikalen (M, M'H) und der Subtangente MT gebildet wird, ſeine Geſtalt nicht verändert, indem es ſich nur um eben jene Vertikale dreht, um ſich auf die Entwickelungsebene aufzulegen: man darf alſo nur dieſes Dreieck nach ſeiner wahren Größe conſtruiren. Nun iſt ſchon die Höhe $\mu M'' = M'H$; macht man alſo noch $M'' T''$ gleich der Subtangente MT, ſo iſt die Hypotenuſe $T'' \mu$ die wahre Lage der geſuchten Tangente. Man könnte auch ein dem vorigen im Scheitel entgegengeſetztes Dreieck anwenden, deſſen Katheten die Vertikale (M, M'h) und die Horizontale (MS, hB') ſind. Da dieſes Dreieck ſeiner Geſtalt nach ebenfalls unverändert bleibt, ſo darf man nur $\mu \omega = M'h$ machen, die Horizontale $\omega \beta S' = MS$ ziehen, und die Punkte S'' und μ durch eine Gerade verbinden; dieſe wird ſodann die verlangte Tangente ſein, und ſich in der Verlängerung von $T'' \mu$ befinden.

§. 225.

Man bemerke hier, daß die Tangente in den Punkten (A, A') und (D, D') der Durchſchnittscurve parallel iſt mit der Spur PQ, weil die Berührungsebene in A oder in D ebenfalls mit dieſer Spur parallel iſt. Daraus folgt, daß die Tangente an jedem dieſer Punkte des Durchſchnitts einen rechten Winkel mit der Seitenlinie des Cylinders bildet; und da dieſer Winkel bei Entwickelung der Fläche unverändert bleibt (§. 162, Nr. 3), ſo muß alſo die Verwandelte die Vertikalen $A'' \alpha$, $D'' \delta$, $D''' \delta'$ unter rechten Winkeln ſchneiden.

§. 226.

Man bemerke endlich, daß die Verwandelte in β einen Inflexions-Punkt hat. Conſtruirt man nämlich, wie vorhin, eine Tangente an dieſen Punkt, ſo wird ſolche durch die Curve hindurchgehen, indem ſie den Bogen $\beta \alpha$ über, den Bogen $\beta \delta$ hingegen unter ſich läßt. Deſſenungeachtet darf ſie nicht als Secante betrachtet werden, vielmehr hat ſie in dieſer Lage eine viel innigere Berührung mit der Curve als eine gewöhnliche Tangente. Denn bei der im §. 223 nachgewieſenen Symmetrie der Theile $\beta \alpha$ und $\beta \delta$, würde eine durch β gezogene Gerade, welche den untern Bogen in μ ſchnitte, den obern nothwendig in einem andern Punkte φ ſchneiden, der von β ſo weit entfernt wäre als μ; ließe man nun dieſe Tangente ſich um β drehen, ſo würden die beiden Punkte μ und φ ſich gleichmäßig jenem Punkte nähern und in dem Augenblick, da μ mit β zuſammenfiele, würde auch φ mit β zuſammenfallen. Hieraus erſieht man, daß die Grenze der Lagen dieſer Secante nicht

---

$$y = a \sin x; \text{ oder auch } y = aR \sin \frac{x}{R}$$

indem man, nach analytiſchem Gebrauche, die Sinus für den Halbmeſſer 1 nimmt, und durch R den Halbmeſſer des Cylinders bezeichnet.

urch die Vereinigung zweier, sondern dreier Durchschnittspunkte bestimmt wird, und daß zwischen einer solchen sondern Tangente und der Curve eine doppelte Berührung stattfindet, indem die Tangente ein Element it dem Bogen $\beta\alpha$ und eines mit dem Bogen $\beta\delta$ gemein hat. Diese beiden Bögen aber haben offenbar eine ntgegengesetzte Lage in Beziehung auf die Tangente, wegen der entgegengesetzten Bewegung der beiden durch den ndrehungspunkt β von einander geschiedenen Secantenstücke. *)

§. 227.

Die Entwickelung eines Cylinders kommt in manchen technischen Künsten vor. Will man z. B. aus lech eine cylindrische Röhre verfertigen, deren eine Grenzebene senkrecht und die andere schief auf der Axe sein ll, so muß man auf der noch ebenen Blechtafel die Curve $\delta'\alpha\delta$ verzeichnen, hierauf die Tafel nach dieser urve ausschneiden und den obern Theil wegnehmen; wenn man alsdann den noch übrigen Theil der Blechtafel m einen cylindrischen Ambos herumbiegt, so erhält man eine Röhre, deren obere Grenzebene die verlangte leigung hat.

Will man ferner einen aus Holz oder Stein gearbeiteten Cylinder durch eine Ebene unter einem bestimmten Winkel schneiden, so muß man zuerst auf einen biegsamen Carton die Entwickelung dieses Cylinders sammt der verwandelten $\delta'\alpha\delta$ des verlangten Durchschnitts zeichnen; hierauf diesen Carton nach der Länge dieser Curve usschneiden und ihn alsdann auf den Cylinder aufwickeln. In diesem Zustande zeigt der Rand des Cartons enau die Gestalt des verlangten ebenen Schnitts, dessen Spur man auf dem Körper mittels eines Bleistiftes ezeichnet. Nun kann der Arbeiter, da er den Theil des Körpers kennt, der abgehoben werden soll, die Arbeit it aller gewünschten Genauigkeit ausführen. Sehr häufige Anwendungen dieses Verfahrens kommen beim Steinschnitt und bei Holzverbindungen vor.

§. 228.

Andere Auflösung der Aufgabe des §. 17. Es kann vorkommen, daß man durch gewisse Umstände Fig. 61.
er Aufgabe verhindert wird, die vertikale Grundebene senkrecht auf der schneidenden Ebene anzunehmen; in die-
m Falle seien die Geraden PQ und QR′ die Spuren der schneidenden Ebene; der Cylinder aber werde noch
nmer horizontal durch seine Grundlinie ABDC und vertikal durch die Geraden GG′ und VV′ dargestellt, welche
inien zugleich seinen sichtbaren Umriß auf den beiden Grundebenen bilden. Um nun diesesmal das allgemeine
Verfahren des §. 210 anzuwenden, schneide man den Cylinder und die gegebene Ebene PQR′ durch verschiedene
horizontalebenen, wie K′N′M′. Diese letztere wird die gegebene Ebene in einer Horizontalen (K′M′, KM) und
en Cylinder in einer Curve schneiden, deren horizontale Projection die Grundlinie ABDC ist. Da nun die
Horizontalprojectionen dieser beiden Hilfsdurchschnitte die Punkte M und N gemeinschaftlich haben, so müssen diese
Punkte der Horizontalprojection des gesuchten Durchschnitts angehören, und projicirt man sie daher auf die Linie
′M′, so erhält man (M, M′) und (N, N′) als zwei Punkte des gesuchten Durchschnittes. Die andern Punkte

*) Die Grundlinie des von einer Ebene geschnittenen Cylinders mag sein, welche sie will, so wird die Verwandelte immer da einen Inflexionspunkt haben, wo die Tangente der ursprünglichen Durchschnittscurve zugleich die Linie des größten Abfalls der schneidenden Ebene war, wenigstens wenn die Seiten des Cylinders vertikal sind; überhaupt aber hat diese Inflexion immer an dem Punkte statt, wo die Tangente des Durchschnitts den kleinsten Winkel mit den Erzeugenden bildet. Denkt man sich nämlich, in Fig. 49, die Entwickelung des Cylinders auf der Berührungsebene ausgeführt, welche die Verlängerung des Elements ABB′A ist, so sieht man leicht, daß im Falle der Winkel BMM′ kleiner ist als die beiden Winkel B′M′M″ und LKM, die Seite M′M″ nach der Entwickelung unterhalb TMt fallen werde, während die Seite MK oberhalb bleibt. Eine entgegengesetzte Inflexion würde stattfinden, wenn der Winkel BMM′ ein Maximum wäre; dieser Fall aber fällt mit dem vorigen zusammen, weil die Tangente mit der Seitenlinie einen spitzigen und einen stumpfen Winkel bildet und ersterer ein Minimum sein muß, wenn letzterer ein Maximum ist.

erhält man auf eine ähnliche Art, indem man nach Willkür durch die Grundlinie ABDC Secanten zieht, welche, wie KM, parallel mit der Spur PQ sind ꝛc.

§. 229.

Es ist aber besser, diese Constructionen durch beliebig gelegte Hilfsebenen zu erklären, die vertikal und der Spur PQ parallel sind, wie MNK. Diese Hilfsebene schneidet die Ebene PQR′ in der Horizontalen (KM, K′M′) und den Cylinder in den beiden auf XN′ und XM′ projicirten Erzeugenden; der Durchschnitt dieser letzteren mit K′M′ wird also zwei Punkte (M, M′) und (N, N′) des gesuchten Durchschnittes liefern. Durch dieses Verfahren kann man direkt gewisse merkwürdige Punkte finden, die man vor andern in ihrer Nähe liegenden construiren muß.

1) Wendet man das vorhergehende Verfahren an, um diejenigen Punkte der Durchschnittscurve zu finden, welche auf den Seiten (A, GG′) und (D, VV′), durch welche der sichtbare Umriß des Cylinders auf der Vertikalebene bestimmt wird, liegen, so erhält man A′ und D′. Diese Punkte scheiden den sichtbaren Theil der Durchschnittscurve von dem unsichtbaren, und in ihnen wird die Vertikalprojection A′B′D′C′ von den beiden Geraden GG′ und VV′ berührt. Da nämlich die Tangente der Durchschnittscurve für den Punkt (A, A′) in der zur Seite (A, GG′) gehörigen Berührungsebene des Cylinders liegt, diese Ebene aber senkrecht auf der Vertikalebene steht, so wird mithin die Projection jener Tangente in die Spur GG′ der Berührungsebene fallen, und dieser wird ebendeßhalb die Curve A′B′D′C′ berühren. Denn es wurde schon im §. 102 erwiesen, daß die auf einerlei Ebene bezogenen Projectionen einer Curve und ihrer Tangente sich ebenfalls berühren.

2) Den höchsten und tiefsten Punkt der Durchschnittscurve, d. h. diejenigen beiden Punkte, in welchen die Tangente horizontal ist, findet man, wenn man die beiden Seitenlinien B und C sucht, für welche die Spuren der Berührungsebene parallel mit der Spur PQ sind: hat man nämlich, wie vorhin, den Punkt (B, B′) construirt, und will man eine Tangente an diesen Punkt ziehen, so muß man (§. 123) den Durchschnitt der Ebene PQR′ mit der Vertikalebene BH′ suchen, welche den Cylinder berührt; da aber diese beiden Ebenen parallele Horizontalspuren haben, so müssen sie sich nothwendig in einer Horizontallinie I′B′ schneiden, welche die Tangente an dem Punkt B′ sein wird. Durch diese Gerade wird also der tiefste Punkt der Curve bestimmt; den höchsten Punkt (C, C′) bestimmt man ebenfalls durch seine horizontale Tangente.

§. 230.

Die Tangente an irgend einem Punkt (M, M′) wird bestimmt durch den Durchschnitt der Ebene PQR′ mit der Berührungsebene des Cylinders längs der vertikalen Seitenlinie M; die horizontale Spur dieser Berührungsebene aber ist die Gerade MT, welche die Spur PQ der Ebene PQR′ in T trifft. Da also dieser Punkt T beiden Ebenen gemeinschaftlich ist, so ist er ein Punkt ihres Durchschnitts, also ein Punkt der gesuchten Tangente, und weil er zugleich in der Horizontalebene liegt, so ist er die horizontale Spur dieser Tangente. Projicirt man ihn daher auf die Projectionsaxe in T′ und zieht T′M′, so erhält man TM und T′M′ als die Projectionen der Tangente.

§. 321.

Die Aufklappung der Curve könnte man dadurch ausführen, daß man die Ebene PQR′ um ihre Spur PQ drehte und auf die Horizontalebene auflegte. Bei dieser Umdrehung würde irgend ein beliebiger Punkt (M, M′) stets in der auf der Umdrehungsaxe PQ senkrechten Vertikalebene PM bleiben: man dürfte daher nur nach §. 17 die Entfernung des Punktes P vom Punkt (M, M′) suchen, und sie von P aus auf die verlängerte MP

tragen, um die Aufklappung des Punktes (M, M') zu erhalten. Auf eben dieſe Art aber erhielte man auch die Aufklappung der übrigen Punkte und mithin der ganzen Curve.

§. 232.

Die Entwickelung der Cylinderfläche könnte ganz ſo ausgeführt werden, wie in §. 222. Man würde nämlich auf eine unbeſtimmte Gerade Theile auftragen von der Länge der Kreisbögen AB, BM, MD . . .; hierauf würde man in den Theilpunkten Senkrechte errichten, welche beziehlich den Höhen der Punkte A', B', M' über der Projectionsaxe gleich wären u. ſ. w. Dieſe Andeutungen mögen hier genügen, indem bald eine ähnliche aber allgemeinere Aufgabe (§. 235) aufgelöst werden wird.

§. 233.

Aufgabe. Die Punkte des Durchſchnitts einer Ebene PQR' mit einer Curve zu finden, deren Projectionen ABCDEF und A'B'C'D'E'F' gegeben ſind.

Dieſe Aufgabe läßt ſich auf die vorige zurückführen; denn denkt man ſich den vertikalen Cylinder, welcher Fig. 6
die gegebene Curve in ABCDEF projicirt, und conſtruirt man, ganz wie in §. 228, die vertikale Projection A"B"C"D"E" des Durchſchnitts dieſes Cylinders mit der Ebene PQR', ſo iſt klar, daß die geſuchten Punkte ſich unter den Punkten dieſes Durchſchnittes befinden müſſen; da ſie aber zugleich auch der gegebenen Curve angehören, ſo darf man alſo nur unterſuchen, ob die Projectionen beider Curven ſich irgendwo auf der Vertikalebene ſchneiden. Dieſes geſchieht wirklich in den Punkten L', M' und N'. Projicirt man daher dieſe Punkte auf die Horizontalebene in L, M und N, ſo hat man jetzt die Projectionen der Punkte, in welchen die Ebene PQR' die gegebene Curve ſchneidet. Die vertikalen Projectionen beider Curven zeigen zwar noch einen vierten Durchſchnittspunkt; man erkennt aber leicht, daß dieſer kein gemeinſchaftlicher Punkt der Curven iſt, indem ſeine Horizontalprojection in Beziehung auf die eine Curve in den Bogen CD und in Beziehung auf die andere in den Bogen DE fällt.

In der Figur 62. wurden diejenigen Bögen der Curve punktirt, welche unterhalb der Ebene liegen, weil man letztere als wirklich vorhanden betrachtet, um die doppelt gekrümmte Linie nach der Lage ihrer verſchiedenen Theile für die Anſchauung deutlicher zu machen; etwas Anderes iſt es bei Fig. 61., wo es ſich von dem Durchſchnitt einer Ebene mit einer Fläche handelt, und wo man, aus den in §. 108 angegebenen Gründen, die Ebene, ſobald der Schnitt einmal gemacht iſt, als weggenommen zu betrachten hat.

§. 234.

In der vorigen und in ähnlichen Aufgaben nennt man die Hilfscurve A"B"D" . . . häufig die **fehlerzeigende Curve**, weil die daſelbſt angewendeten Conſtructionen ſich auch aus folgendem Geſichtspunkte betrachten laſſen. Nimmt man auf der Horizontalprojection ABCD einen Punkt B willkührlich als Projection eines der geſuchten Punkte an, in welchen die gegebene Curve von der Ebene geſchnitten wird, und denkt ſich durch dieſen Punkt, den man als zur Ebene gehörig betrachtet, eine Horizontale in eben dieſer Ebene gezogen, ſo muß die eine Projection BK dieſer Linie parallel mit der Spur PQ ſein, die andere Projection K'B" aber, welche parallel mit der Axe geht, muß den Punkt B', d. h. die Vertikalprojection des Punktes (B, B') treffen. Dieſes geſchieht aber nicht; vielmehr erhält man B" als Vertikalprojection des Punktes B: **mithin war die Vorausſetzung falſch.** Wiederholt man dieſen Verſuch mit dem Punkt C, ſo geräth man wieder auf einen Fehler, d. h. man findet ſtatt C' den Punkt C" als vertikale Projection, und da letzterer Punkt, in Beziehung auf B", auf der entgegengeſetzten Seite der Curve A'B'C'D' . . . liegt, ſo kann man daraus ſchließen, daß der wahre geſuchte Punkt zwiſchen B und C liegen müſſe. Wiederholt man alſo die Verſuche mit ſolchen Punkten, die zwiſchen B

und C liegen, so erhält man endlich den Punkt (M, M') als wirklichen Durchschnittspunkt der Ebene mit der gegebenen Curve. Statt aber diesen Punkt durch vielfache Versuche aufzufinden, ist es weit bequemer, eine gewisse Anzahl beliebiger Punkte der fehlerzeigenden Curve zu construiren, und sie hierauf durch einen stetigen Zug zu vereinigen, dessen Durchschnitt mit der gegebenen Curve alsdann den gesuchten Punkt (M, M') liefern wird.

§. 235.

Aufgabe. Es ist ein schiefer Cylinder mit beliebiger Grundlinie gegeben; man soll 1) die Projectionen des senkrechten Durchschnitts dieses Cylinders; 2) die Aufklappung dieses Durchschnitts; 3) die Entwickelung der Fläche und die Verwandelte der Grundlinie construiren, nebst den Tangenten an die verschiedenen Curven.

Fig. 59. **Auflösung.** Es sei ABCD die Grundlinie des Cylinders, die hier als eine ebene in der horizontalen Projectionsebene liegende Curve angenommen wird; ferner sei (EE'', E'E''') die Richtung der Erzeugungslinien. Zieht man nun die Tangenten BB'' und DD'' parallel mit EE'' an die Grundlinie, so sind diese die Spuren zweier vertikalen Berührungsebenen, und mithin bilden sie den sichtbaren Umriß des Cylinders auf der Horizontalebene (§. 106); dagegen sind die senkrecht auf der Projectionsaxe stehenden Tangenten EE' und FF' die Spuren zweier auf der Vertikalebene senkrechten Berührungsebenen, deren vertikale Spuren E'E''' und F'F''' den sichtbaren Umriß des Cylinders auf der Vertikalebene bilden. Außerdem wird noch angenommen, der Cylinder werde von zwei Horizontalebenen E'F' und E'''F''' begränzt und geschlossen, so daß also die Seiten CC', FF'', ... auf der Horizontalebene als unsichtbar zu betrachten sind. Diese Annahme hat den Vortheil, daß sie die Lage der unteren Seiten des Cylinders deutlicher macht. Um überhaupt die Gestalt der Cylinderfläche besser hervorzuheben, wurden in der Figur die verschiedenen Seiten von denen Gebrauch gemacht wird, nicht als Hilfslinien, sondern als Erzeugende behandelt, welche, je nachdem sie mit vollem Strich oder punktirt gezeichnet sind, die obern oder vordern Theile der Fläche von ihren entgegengesetzten leicht unterscheiden lassen.

§. 236.

Da man unter dem senkrechten Durchschnitt eines Cylinders diejenige Curve versteht, welche sich aus seinem Durchschnitt mit einer auf den Erzeugenden senkrecht stehenden Ebene ergibt; da ferner alle parallel gemachten Durchschnitte eines Cylinders congruent sind: so ziehe man durch irgend einen Punkt Q der Projectionsaxe die Spuren PQ und QR' beziehlich senkrecht auf die Projectionen der Erzeugenden, und suche nun den Durchschnitt der Cylinderfläche mit der Ebene PQR'. Um diesen Durchschnitt zu erhalten, schneide man beide Flächen durch verschiedene Hilfsebenen, die alle vertikal und parallel mit den Seiten des Cylinders sind; denn auf diese Art bekommt man es blos mit geradlinigen Durchschnitten zu thun. Um endlich die später folgende Operation der Entwickelung zu vereinfachen, ist es gut, diese Hilfsebenen durch solche Punkte der Grundlinien zu legen, welche sich zu zwei und zwei auf den mit der Spur PQ parallelen Sehnen GM, EL, ... befinden. Nach diesen Vorbereitungen lassen sich nun die verlangten Constructionen auf zweierlei Art ausführen.

§. 237.

Erste Art. Es seien GKI und II' die Spuren einer der schneidenden Vertikalebenen: sie treffen die Spuren der Ebene PQR' in den Punkten K und I'; mithin ist die Gerade (GI, I'K') der Durchschnitt dieser beiden Ebenen. Da aber diese Gerade sehr genau bestimmt werden muß, in sofern man für die Durchschnitte der übrigen Hilfsebenen offenbar nur Parallelen mit I'K' ziehen darf, so construire man noch einen dritten Punkt derselben. Man suche z. B. den Punkt, der horizontal in S projicirt ist. Denkt man sich zu dem Ende eine

Horizontale parallel mit PQ durch dieſen Punkt gezogen, ſo muß ſolche, da ſie ganz in der Ebene PQR′ liegt, die Gerade SR zur Horizontalprojection haben und die vertikale Grundebene in R′ ſchneiden; mithin iſt die mit der Axe parallele Linie R′S′ ihre vertikale Projection. Bezieht man nun den Punkt S auf den Punkt S′, ſo muß letzterer in der verlängerten I′K′ liegen.

Da ferner die nämliche Hilfsebene GKI den Cylinder in den beiden Seitenlinien ſchneiden mußte, deren Fußpunkte G und H ſind, und welche folglich die Linien G′G‴ und H′H‴ zu Vertikalprojectionen haben, ſo iſt klar, daß die aus dem Durchſchnitt dieſer beiden Geraden mit der Projection K′S′ ſich ergebenden Punkte g′ und h′ der Vertikalprojection der geſuchten Curve angehören müſſen; und projicirt man dieſe Punkte auf die Gerade GHK in g und h, ſo gehören alſo dieſe letztern der Horizontalprojection der nämlichen Curve an.

Nun betrachte man auch eine andere ſchneidende Ebene MNV. Dieſe ſchneidet die Ebene PQR′ in einer Linie, deren Spur (V, V′) iſt, und ohne daß man noch andere Punkte derſelben ſucht, kann man doch verſichert ſein, daß ihre Vertikalprojection die mit K′S′ parallele Gerade V′m′ iſt. Da ferner die Ebene MNV auch den Cylinder in den beiden Seiten M′M‴ und N′N‴ ſchneidet, welche die Gerade V′m′ in den Punkten m′ und n′ treffen, ſo gehören dieſe letzteren ebenfalls der Vertikalprojection der geſuchten Curve an, und man darf ſie nur noch horizontal auf MN in m und n projiciren. Wendet man dieſes nämliche Verfahren auch auf andere ſchneidende Ebenen an, ſo erhält man endlich die beiden Projectionen a m b n o d und a′m′b′n′c′d′ der geſuchten Durchſchnittscurve.

§. 238.

Zweite Art. Es ſei ACY eine mit den Seiten des Cylinders parallele Vertikalebene: ſie ſchneidet die Cylinderfläche in den beiden Erzeugenden, deren horizontale Spuren A und C ſind, und die Ebene PQR′ in einer Geraden, welche ihre horizontale Spur in Y hat, und ſenkrecht auf jenen Erzeugenden ſteht; klappt man nun dieſe ſchneidende Ebene um AY auf die horizontale Grundebene auf, indem man die Höhe Y′Z′ von Y nach Z″ trägt, ſo ſind AZ″ und ihre Parallele Cc″ die neuen Lagen der Erzeugenden, und die aus Y auf ſie herabgefällte Senkrechte Yc″a″ beſtimmt die Aufklappungen a″ und c″ zweier Punkte der geſuchten Curve. Nun darf man für eine andere ſchneidende Ebene MNV nur die Linien Mm″ und Nn″ parallel mit AZ″ und die Gerade Vm″ parallel mit Ya″ ziehen, ſo erhält man die Aufklappungen m″ und n″ zweier anderer Punkte des ſenkrechten Cylinderdurchſchnitts. Es iſt unnöthig, auch noch die Projectionen dieſer Curve zu finden, da, wie man bald ſehen wird, die erhaltenen Aufklappungen zur Conſtruction der Curve in ihrer wahren Größe und zur Entwickelung des Cylinders, welche eigentlich der Hauptzweck gegenwärtiger Aufgabe iſt, vollkommen hinreichen. *) Fig. 59.

Wollte man deſſenungeachtet auch noch die Projectionen des ſenkrechten Durchſchnitts zeichnen, ſo dürfte man nur die Punkte a″, c″, m″, n″ . . . auf a, c, m, n, . . . beziehen durch Senkrechte, welche man auf die Umdrehungsaxe fällte, und hierauf dieſe letzteren Punkte in a′, c′, m′, n′ . . . auf die Vertikalprojectionen der entſprechenden Erzeugenden projiciren.

§. 239.

Auch hier gibt es merkwürdige Punkte, die man vor andern conſtruiren muß und mit denen man am beſten die Zeichnung der Figur anfängt.

*) Dieſe ſcharfſinnige Methode iſt von Herrn Th. Olivier; ſie läuft darauf hinaus, die vertikale Grundebene parallel mit den Seiten des Cylinders zu wählen, und gewährt beſondere Vortheile, wie aus den §§. 241 und 243 erhellen wird. Sollte jedoch der Durchſchnitt eines ſchiefen Cylinders mit irgend einer nicht ſenkrecht auf den Erzeugenden ſtehenden Ebene geſucht werden, ſo wäre die erſtere Methode vorzuziehen, weßhalb ſie auch hier beibehalten wurde.

1) Wendet man eine der beiden Methoden auf die Seiten BB″ und DD″ an, welche den sichtbaren Umriß auf der Horizontalebene bilden, so findet man die Punkte (b, b′) und (d, d′), in welchen die Horizontalprojection der Curve von jenen Seiten berührt wird. Denn obgleich die Tangente dieser Curve und die Seite des Cylinders im Raume sehr von einander verschieden sind, indem beide senkrecht auf einander stehen, so liegen doch beide in Einer Berührungsebene, welche für den Punkt (b, b′) offenbar vertikal ist: daraus aber folgt, daß ihre horizontalen Projectionen in eine Gerade zusammenfallen, und daß also die Linie BB″, weil sie zugleich die Projection der Tangente ist, die Horizontalprojection der Curve berühren müsse (§. 102).

Man bemerke, daß die beiden Punkte b und d, da sie auf dem sichtbaren Umriß des Cylinders in Beziehung auf die Horizontalebene liegen, den sichtbaren Bogen b a d der Durchschnittscurve von dem unsichtbaren b c d scheiden.

2) Sucht man ferner, nach dem allgemeinen Verfahren, diejenigen Punkte des Durchschnitts, welche zugleich auf den Seiten E′E‴ und F′F‴ liegen, die den sichtbaren Umriß auf der Vertikalebene bilden, so erhält man (e, e′) und (f, f′), in welchen Punkten die Vertikalprojection der Durchschnittscurve von jenen Seiten berührt wird. Denn die Tangente dieser Curve und die Seite des Cylinders befinden sich beide in Einer Berührungsebene, welche in gegenwärtigem Falle senkrecht auf der Vertikalebene steht: mithin fallen die Vertikalprojectionen der Seite und Tangente in Eine Gerade zusammen. Die Punkte e′ und f′ sind auch hier die Gränzen, welche für ein die Vertikalebene betrachtendes Auge, den sichtbaren Bogen e′ a′ m′ f′ von dem unsichtbaren e′ d′ h′ f′ scheiden.

3) Um den höchsten und tiefsten Punkt der Curve, d. h. um die Punkte zu erhalten, für welche die Tangente horizontal ist, suche man zuerst auf der Grundlinie ABCD diejenigen Punkte A und C, für welche die Tangente parallel mit der Spur PQ der schneidenden Ebene ist; construirt man alsdann, nach dem allgemeinen Verfahren, den Punkt (a, a′) der Durchschnittscurve, welcher auf der Seite AA″ liegt, so wird die Tangente an diesem Punkte horizontal sein. Denn nach §. 213 soll diese Tangente der Durchschnitt der Ebene PQR′ mit der zur Seite AA″ gehörigen Berührungsebene sein. Da aber nach der Voraussetzung die horizontale Spur Aθ dieser letzteren Ebene parallel ist mit PQ, so können sich also jene beiden Ebenen nur in einer mit PQ parallelen, d. h. in einer horizontalen Linie schneiden. Für den Punkt CC″ erhält man durch das nämliche Verfahren den Punkt (c, c′) der Durchschnittscurve, für welchen die Tangente ebenfalls horizontal ist. Die Bestimmung dieser Punkte dient sehr zur leichten und genauen Zeichnung der beiden Projectionen des gesuchten Durchschnitts.

§. 240.

Es soll nun an irgend einen Punkt (m, m′) des Durchschnitts eine Tangente construirt werden. Dieser Punkt liegt auf der Seite mM; nun hat die zu eben dieser Seite gehörige Berührungsebene des Cylinders zur horizontalen Spur die Tangente MT an der Grundlinie. Verlängert man aber diese Gerade, bis sie die Linie PQ in T schneidet, so gehört letzterer Punkt dem Durchschnitt der Berührungsebene mit der Ebene der Curve an; dieser Durchschnitt aber ist eben die gesuchte Tangente (§. 213). Verbindet man daher den gegebenen Berührungspunkt (m, m′) mit dem Punkt T, dessen Vertikalprojection der Punkt T′ auf der Axe ist, so erhält man Tm und T′m′, als Projectionen der gesuchten Tangente.

§. 241.

Aufklappung. Um die Durchschnittscurve in ihrer wahren Gestalt zu erhalten, muß man die Ebene PQR′ um ihre Spur PQ auf die Horizontalebene aufklappen und hierauf suchen, welche Lage irgend ein Punkt (m, m′) der Curve annimmt. Dieser Punkt bleibt während der Umdrehung beständig in der Vertikalebene mV,

welche auf der Umdrehungsaxe PQ senkrecht steht, und da seine kürzeste Entfernung von PQ offenbar die Linie (mV, m'V') ist, so darf man nur die wahre Größe dieser Linie nach §. 17 suchen und sie hierauf von V nach ı tragen: letzterer Punkt wird sodann die Aufklappung von (m, m') sein. Hat man aber die Methode des §. 238 angewendet, so kennt man die wahre Größe der Linie (mV, m'V') unmittelbar: sie ist Vm''. Man darf also nur aus V mit Vm'' einen Kreisbogen beschreiben, so wird solcher die Linie VM in dem gesuchten Punkte μ schneiden. Eben so liefern die Kreisbögen, welche man mit den Halbmessern Ya'' und Yc'' beschrieben hat, die Punkte α und γ; und setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man endlich die Curve αλμνβφγδ als Aufklappung des geraden Cylinderdurchschnitts.

§. 242.

Die Tangente (mT, m'T') an der ursprünglichen Curve hat ihren Fußpunkt in dem Punkt T der Umdrehungsaxe. Dieser Punkt bleibt also während der Umdrehung unbeweglich, und da der Berührungspunkt in die Lage μ versetzt wurde, so ist mithin Tμ die aufgeklappte Tangente, welche die Curve αλμβ . . . genau in dem Punkt μ berühren muß.

§. 243.

Entwickelung. In §. 166 wurde gezeigt, daß unter allen ebenen auf der Fläche eines Cylinders gezeichneten Curven der **senkrechte Durchschnitt** die einzige ist, welche bei der Entwickelung der Fläche geradlinig wird. Wäre also in gegenwärtigem Falle nur die Grundlinie ABCD gegeben, so wäre man noch nicht im Stande den Cylinder zu entwickeln; man müßte vielmehr nothwendig den senkrechten Durchschnitt (abcd, a'b'c'd') und sogar seine Aufklappung αβγδ construiren, um jeden der Bögen αλ, λμ, . . . messen und ihre rectificirten Längen auf einer Geraden an einander tragen zu können. *) Fig. 59.u.60.

Angenommen nun der Cylinder werde längs der Seite AA'' geöffnet, so trage man auf eine unbestimmte Gerade xy die Längen

$$\alpha_2\lambda_2 = \alpha\lambda,\ \lambda_2\mu_2 = \lambda\mu,\ \mu_2\beta_2, = \mu\beta,\ \beta_2\nu_2 = \beta\nu,\ \ldots;$$

hierauf errichte man in allen Theilpunkten Senkrechte von unbestimmter Länge auf die Gerade xy, so werden diese die Lagen sein, welche die Erzeugenden nach der Entwickelung annehmen (§. 161). Um nun die Curve zu finden, in welche sich die Grundlinie ABCD verwandelt, muß man auf jene Senkrechten die Längen der verschiedenen Stücke der Erzeugungslinien tragen, welche zwischen der Grundlinie und dem senkrechten Durchschnitt enthalten sind. Die Projectionen dieser Stücke sind

$$(Aa, A'a'),\ (Ll, L'l'),\ (Mm, M'm') \ldots .$$

aus welchen nach §. 17 ihre wahre Größe gesucht werden kann. Aber auch hier gewährt die Methode des §. 238 einen wesentlichen Vortheil; denn sie liefert die wahren Längen jener Stücke unmittelbar in den Geraden

$$Aa'',\ Ll'',\ Mm'',\ \ldots .$$

Trägt man daher diese auf die Senkrechten der unbestimmten Linie xy in

$$\alpha_2 A_2,\ \lambda_2 L_2,\ \mu_2 M_2,\ \ldots$$

und verbindet die Endpunkte dieser letztern, so erhält man die Curve $A_2 L_2 M_2 B_2 C_2 D_2 A_2$, als die **Verwandelte** der Grundlinie **ALMBCDA**.

Die Verwandelte der obern Grundlinie erhält man im Allgemeinen dadurch, daß man auf die Senkrechten

*) Es wurde schon bemerkt, daß man zur Rectification eines Bogens, wie αλ, sich einer Zirkeleröffnung bediene, welche eine gewisse Anzahl mal in diesem Bogen enthalten ist, und so klein sein muß, daß die Sehne, welche eigentlich durch sie bestimmt wird, von dem zu ihr gehörigen Bogen nicht merklich verschieden ist.

der Geraden xy, und zwar auf ihre obern Verlängerungen diejenigen Stücke der Erzeugenden trägt, welche zwischen dem senkrechten Durchschnitt und der obern Grundlinie enthalten sind; in gegenwärtigem Falle aber, da die beiden Grundlinien parallel sind, haben die ganzen Erzeugenden alle einerlei Länge, und man dürfte daher nur die Größe einer einzigen dieser Seiten, z. B. der (AA″, A′A″′) suchen, und solche von den Punkten A_2, L_2, M_2 .... aus auf die verschiedenen Senkrechten der Linie xy tragen, um auch die Verwandelte der obern Grundlinie zu erhalten, welche mit der Curve $A_2 L_2 M_2 C_2 A_2$ identisch sein würde. Die Gränzen des Raumes haben es nicht gestattet, ihre Construction wirklich auszuführen.

§. 244.

Wenn die Grundlinie ABCD des Cylinders ein Kreis ist, wie in gegenwärtiger Figur, oder auch eine Ellipse, deren eine Axe BD senkrecht auf der Erzeugenden ist, so gibt der senkrechte Durchschnitt immer eine Ellipse, deren Axen (bd, b′d′) und (ac, a′c′) sind. Denn legt man durch die Seiten BB″ und DD″ eine Ebene, so muß die Spur BD derselben nach der Voraussetzung parallel mit PQ sein, und sie wird also die Ebene PQR′ in einer mit PQ parallelen Sehne (bd, b′d′) schneiden. Diese Sehne aber wird senkrecht sein auf den zu den Punkten (b, b′) und (d, d′) der Curve gehörigen Tangenten, weil diese in den Vertikalebenen BB″ und DD″ liegen. Die horizontale Sehne (bd, b′d′) ist also nothwendig ein Hauptdurchmesser oder eine Axe der Ellipse im Raum; die zweite Axe, welche senkrecht auf der ersten steht, ist die Gerade (ac, a′c′). Es ist aber zu bemerken, daß diese beiden Axen, wenn sie auf die Vertikalebene projicirt werden, nicht senkrecht auf einander bleiben, und bloß zu conjugirten Durchmessern der Curve a′b′c′d′ werden, während sie, auf die Horizontalebene projicirt, fortwährend Axen der Horizontalprojection abcd bleiben.

Hat man also die Punkte G und M, E und L ... zu zwei und zwei auf solchen Sehnen der Grundlinie genommen, welche parallel mit PQ sind, so wird die in $\alpha\beta\gamma\delta$ aufgeklappte Durchschnittscurve durch die Erzeugenden in gleiche Bogen getheilt, die zu 4 und 4 symmetrisch liegen, und man darf also, um diese Curve zu rectificiren, nur die drei Bögen $\alpha\lambda$, $\lambda\mu$ und $\mu\beta$ messen, hierauf ihre Längen viermal hinter einander auf xy tragen und zwar in der Ordnung, in welcher die Bögen selbst aufeinander folgen. Für die Stücke der Erzeugenden ergeben sich hinsichtlich ihrer Länge ähnliche Verhältnisse, so daß man nur die erste Hälfte derselben anzuwenden haben wird.

§. 245.

Fig. 59.u.60. Um die Tangente der Verwandelten zu erhalten, in welche die ursprüngliche Tangente an der Grundlinie des Cylinders bei der Entwickelung übergeht, erinnere man sich, daß bei dieser Operation das in MmT projicirte Dreieck seiner Gestalt nach unverändert bleibt. Nun aber ist dieses Dreieck rechtwinklig in (m, m′); die eine seiner Katheten, welche in Mm projicirt ist, geht bei der Entwickelung in $\mu_2 M_2$ über; die andere Kathete Tm hat zu ihrer wahren Länge die Gerade $T\mu$, welche ihre Aufklappung ist; nimmt man also auf xy die Länge $\mu_2 T_2 = \mu T$ und zieht die Hypotenuse $T_2 M_2$, so ist diese die verlangte Tangente der Verwandelten in dem Punkt M_2. Da nach dem, was eben gesagt wurde, der Winkel $T_2 M_2 \mu_2$, der durch eine Tangente und die dazu gehörige Seite gebildet wird, vor und nach der Entwickelung derselbe bleibt, so folgt, daß in den Punkten A_2, C_2, A_2, die Verwandelte von den Erzeugenden unter rechten Winkeln geschnitten wird; denn auf der ursprünglichen Cylinder war die Tangente an den Punkten A und C der Grundlinie offenbar senkrecht auf der dazu gehörigen Erzeugenden.

§. 246.

Aufgabe. Es ist ein senkrechter Kegel und eine Ebene gegeben: man soll 1) die Projec-

tionen ihres Durchſchnitts; 2) die Aufklappung dieſer Curve; 3) die Entwickelung des Kegels und die Verwandelte des Durchſchnitts, ſo wie auch die Tangenten an dieſe verſchiedene Curven conſtruiren.

Auflöſung. Da ein ſenkrechter Kegel durch die Umdrehung einer Geraden um eine Axe, mit welcher ſie einen Punkt gemein hat, erzeugt wird, ſo gibt jeder ſenkrecht auf dieſe Axe gemachte Durchſchnitt einen Kreis ACBD, der hier als Leitlinie betrachtet und deſſen Ebene zur horizontalen Projectionsebene angenommen wird. Die Spitze des Kegels iſt in S und S′ projicirt: mithin wird der ſichtbare Umriß deſſelben auf der Vertikalebene durch die beiden Geraden S′A′ und S′B′ gebildet, welche den Berührungsebenen AA′S′ und BB′S′, die auf der Vertikalebene ſenkrecht ſtehen, entſprechen. Nimmt man ferner zur Vereinfachung der graphiſchen Operationen an, die Vertikalebene ſei ſenkrecht auf der ſchneidenden Ebene, ſo können PQ und QR′ die Spuren der letztern vorſtellen. Fig. 63.

§. 247.

Man ſchneide nun die Ebene PQR′ und den Kegel durch Hilfsebenen, welche alle durch die Spitze (S, S′) gehen, und auf der Vertikalebene ſenkrecht ſind. Eine dieſer Ebenen wird die Linie S′F′, welche man beliebig durch S′ gezogen, zum vertikalen und die auf der Axe ſenkrechte Gerade F′KF zur horizontalen Spur haben. Da nun letztere die Grundlinie ABCD des Kegels in zwei Punkten F und K ſchneidet, ſo müſſen nothwendig die Seiten SF und SK die Durchſchnitte der Kegelfläche mit der Hilfsebene S′F′F ſein; dieſe aber ſchneidet die Ebene PQR′ in einer auf der Vertikalebene ſenkrechten Geraden, deren Projectionen M′ und XNM ſind; es wird alſo der Durchſchnitt dieſer Geraden mit den beiden Seiten SF und SK zwei Punkte M und N geben, welche der Horizontalprojection der geſuchten Curve angehören und deren Vertikalprojection der Punkt M′ iſt.

Wiederholt man dieſe Conſtructionen auch für andere Hilfsebenen, ſo kann man ſo viele Punkte der Durchſchnittscurve erhalten, als man nur immer will; in Rückſicht auf die ſpäter folgende Entwickelung iſt es gut, die Spuren der Hilfsebenen durch ſolche Punkte A, E, F, C . . . gehen zu laſſen, welche den Kreis in gleiche Bögen theilen. Unter dieſen Ebenen befinden ſich auch die Berührungsebenen AA′S′ und BB′S′, von denen jede nur einen einzigen Punkt (G, G′) oder (H, H′) gibt. Dieſe Punkte nun ſind die beiden Scheitelpunkte der Durchſchnittscurve; denn man ſieht leicht, daß die Gerade (GH, G′H′) alle mit MN parallelen Sehnen unter rechten Winkeln halbirt und mithin eine Axe des Kegelſchnittes iſt. In gegenwärtigem Beiſpiel iſt dieſer Schnitt eine Ellipſe, deren Projectionen GLMHN und G′H′ ſind.

§. 248.

Mittels der vorhergehenden Methode können jedoch diejenigen Punkte des Durchſchnitts nicht gefunden werden, welche auf den Seiten SC und SD liegen, deren Vertikalprojectionen mit der Axe zuſammenfallen. Denn die Hilfsdurchſchnitte, welche hier mit der Kegelfläche und der Ebene PQR′ gemacht werden, fallen alle in der Horizontalebene mit der Geraden CSD zuſammen. Legt man aber durch den Punkt I′ eine ſchneidende Horizontalebene, ſo wird ſolche den Kegel in einem Kreis, deſſen Halbmeſſer I′V′ = SV iſt, und die gegebene Ebene in einer Geraden (I′, CD) ſchneiden: folglich wird das Zuſammentreffen dieſer letzteren mit jenem Kreiſe die beiden geſuchten Punkte I und J auf der Horizontalebene beſtimmen. Fig. 63.

Durch letzteres Verfahren hätte man überhaupt alle Punkte der verlangten Durchſchnittscurve erhalten können, und es kann daher dem erſteren Verfahren zur Probe dienen, beſonders für ſolche Punkte, in denen ſich die Seiten und Spuren unter ſehr ſpitzigen Winkeln ſchneiden.

§. 249.

Die Tangente an irgend einem Punkt (M, M') der Curve ist nach §. 213 der Durchschnitt d PQR' mit der zur Seite SMF gehörigen Berührungsebene. Diese aber hat zu ihrer horizontalen durch F an die Grundlinie ACBD gezogene Tangente FT. Der Punkt T, in welchem sich die beiden FT und PQ schneiden, ist also ein Punkt der gesuchten Tangente, und zwar ist er ihre horizontale Sp hin muß (TM, QM') die verlangte Tangente sein.

§. 250.

Aufklappung. Man lasse nun die Ebene PQR' sich um ihre Spur QR' drehen, um sie auf tikalebene aufzuklappen. Bei dieser Umdrehung wird die Linie (MNX, M) stets senkrecht auf der Umdre bleiben und daher in die Lage M'm kommen. Trägt man nun auf letztere Linie die Längen M'm = M'n := Xn, so erhält man die Punkte m und n als Aufklappungen für M und N. Die übrigen Pun man auf dieselbe Art und man erhält glmhn als Aufklappung der Durchschnittscurve.

Aus den nämlichen Betrachtungen erhellt zugleich, daß der Fußpunkt T der Tangente TM seine pung in t erhalte, wenn man die auf der Axe QR' senkrechte Linie Qt gleich QT gemacht hat. man daher die Punkte t und m, so erhält man die Gerade tm, welche die aufgeklappte Curve gln berühren muß.

§. 251.

§. 63. Entwickelung. Aus §. 170 ist bekannt, das jede conische Fläche entwickelbar ist, und daß bei wickelung die Erzeugungslinien oder einzelne Stücke derselben ihre Größe nicht ändern. Da nun, in vor Falle, der Kegel ein senkrechter ist, so sind alle Seiten desselben, von der Spitze an bis zur Grundlinie einander gleich; mithin müssen die Endpunkte dieser Seiten nach der Entwickelung alle in der Periph Kreises liegen, dessen Mittelpunkt der Scheitel des Kegels und dessen Halbmesser einer Seite S'A' dessel ist. Man nimmt also auf der Ebene, in welcher man die Construction ausführen will, einen Punkt S' an und beschreibt mit einem Halbmesser S"A" = S'A' einen Kreis, von welchem man einen Bogen A so abschneidet, daß dieser Bogen zur ganzen Peripherie in dem Verhältniß von SA zu S'A' stehe; hie man den Halbmesser A'''S", so stellt der Sector S"A"B"A''' den auf der angenommenen Ebene e untern Mantel des Cylinders dar. Der obere Mantel wurde hier weggelassen, weil er von der Eber nicht geschnitten wird; ein folgendes Beispiel wird lehren, wie man bei der Entwickelung des zweiten zu verfahren habe.

§. 252.

Um nun die Verwandelte des Durchschnitts (GLMH, G'H') zu erhalten, nehme man an, der längs der Seite (SA, S'A') geöffnet worden. Ferner mache man auf dem Bogen A"B"A''', welcher Verwandelte der Grundlinie ABCD ist, die Bögen *)

*) Es handelt sich hier nicht darum, die Bögen AE, EF . . . genau zu rectificiren, sondern vielmehr sie in Bögen v derlem Halbmesser, aber von derselben absoluten Länge, wie die ursprünglichen, zu verwandeln. Wendet man Zirkelöffnungen an, daß die von ihnen gemessenen Sehnen des Kreises ACBD nicht merklich von den zu ihnen Bögen verschieden sind, und trägt diese Zirkelöffnungen auf den Bogen A"B"A''', so kömmt man hierdurch der Wa näher, als wenn man sie auf eine gerade Linie trüge; das Verfahren ist also dasselbe, wie bei der wirklichen Rectifi Bögen AE, EF . . . .

In gegenwärtigem Falle jedoch wird man am genauesten und leichtesten verfahren, wenn man vorher die Punkte A,

$$A''E'' = AE,\ E''F'' = EF,\ F''C = FC \ldots;$$

rauf ziehe man die Halbmeſſer $S''E''$, $S''F'' \ldots$ und trage auf dieſe nach und nach diejenigen Stücke der zeugenden, welche zwiſchen der Kegelſpitze und den verſchiedenen Punkten der Curve (GMH, $G'H'$) enthalten d. Betrachtet man nun z. B. den auf der Seite (SF, $S'F'$) gelegenen Punkt (M, M') und läßt die Seite) ſo um die Kegelaxe drehen, bis ſie mit der Vertikalebene parallel wird, ſo iſt klar, daß ſie in letzterem Zu- nde mit der Seite (SA, $S'A'$) zuſammenfällt, während der Punkt M', der immer in gleicher Höhe und mit- in der Horizontalen $M'\mu$ blieb, die Lage μ annimmt. $S\mu$ iſt alſo die wahre Länge der Geraden (SM, $S'M'$). ht man daher durch alle die Punkte L', $M' \ldots$ Horizontalen und macht $S''G'' = S'G'$, $S''L'' = S'\lambda$, $M'' = S'\mu$, $S''I'' = S'V' \ldots$, ſo erhält man die Curve $G''L''M''I''H''N''G''$ als die Verwandelte der rchſchnittscurve ($GL'MHN$, $G'H'$).

§. 253.

Dieſe Verwandelte, an ſich betrachtet, endigt nicht in den Punkten G'' und G''', ſondern ſie erſtreckt ſich er dieſe Punkte hinaus und zwar in unendlich vielen Aeſten, die alle dem Aſte $G''H''G'''$ gleich ſind, und lche endlich genau auf einander fallen, wenn das Verhältniß von $S'A'$ zum Halbmeſſer SA der Grundlinie ommenſurabel iſt: dieß erhellt deutlich aus der Gleichung der Curve, die in letzterem Falle eine periodiſche eisfunktion enthält.*) Um ſich jedoch auch auf ſynthetiſchem Wege von der Richtigkeit der hier aufgeſtellten

---

in gleicher Entfernung auf der Kreislinie $ABCD$ genommen hat; denn alsdann darf man nur den ganzen Bogen $A''B''A'''$ in eben ſo viele gleiche Theile theilen, als die Kreislinie $ACBD$ deren enthält.

*) Um dieſe Gleichung zwiſchen Polar-Coordinaten zu erhalten, bezeichne man durch R, h und l den Halbmeſſer der Grundlinie, die Höhe, und die Seite des Kegels; ferner ſei $k = I'Y$ die Höhe des Punktes (I', S), in welchem die Ebene PQR' die Axe ſchneidet und ω der Winkel, den dieſe Ebene mit dem Horizont macht: endlich bezeichne r die Entfernung der Kegelſpitze von irgend einem Punkt (M, M') der Curve und α den Winkel ASF oder vielmehr den Bogen, der dieſen Winkel mißt, und deſſen Halbmeſſer die Einheit iſt: ſo iſt alſo $AF = R \cdot \alpha$. Aus dieſen gegebenen Stücken könnten nun leicht die Gleichungen für die Ebene und die Gerade (SF, $S'F'$) hergeleitet und hierauf die Entfernung der Kegelſpitze von dem Punkt, in welchem dieſelben ſich ſchneiden, gefunden werden, welche Entfernung man ſodann gleich r ſetzen würde; aber man kann zu letzterer Gleichung ſchneller auf folgende Art gelangen:

In dem Dreieck, das die Axe des Kegels mit der Seite (SF, $S'F'$), auf welcher der Punkt (M, M') liegt, bildet, iſt offenbar, wenn z die Höhe dieſes Punktes bezeichnet.

$$1)\ h : h - z = l : r;$$

ferner iſt in dem Dreieck $S'F'Y$, das die Vertikalprojection des vorigen vorſtellt, und in welchem die mit $F'Y$ parallele $M'O = \frac{OI'}{\text{tang. } \omega} = \frac{k - z}{\text{tang. } \omega}$ iſt,

$$h : h - z = F'Y : M'O$$

oder

$$2)\ h : h - z = R \cos. \alpha : \frac{k - z}{\text{tang. } \omega}$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (1) und (2) die Größe z, ſo erhält man

$$3)\ r = \frac{l\,(h - k)}{h - R. \text{ tang. } \omega. \cos. \alpha.}$$

Dieſer Ausdruck enthält die beiden Veränderlichen r und α, von denen die erſtere bei der Entwickelung ihre Größe beibehält; der Winkel α aber geht in den Winkel $G''S''M'' = u$ über, der in dem mit l beſchriebenen Kreiſe, einem Bogen $A''F''$ entſpricht, deſſen abſolute Länge der des Bogens AF gleich iſt: es iſt mithin $R \cdot \alpha = l \cdot u$ und alſo $\alpha = \frac{l\,u.}{R}$. Setzt man nun dieſen Werth von α in die Gleichung (3) ſo erhält man

$$r = \frac{l\,(h - k)}{h - R \text{ tang. } \omega. \cos. \frac{lu}{R}.}$$

Dieſe Gleichung, deren weitere Unterſuchung dem Leſer überlaſſen bleibt, ſtellt immer die Verwandelte dar, mag der urſprüng-

Behauptungen zu überzeugen, stelle man sich vor, der Kegel sei von einer biegsamen Fläche eine unbestimmte Anzahl mal umwickelt gewesen: da nun alle die so über einander liegenden Mäntel auf gleiche Weise von der Ebene PQR′ geschnitten wurden, so müssen sie, wenn man sie vom Kegel abwickelt, unendlich viele identische Aeste erzeugen, welche man graphisch construiren kann, indem man auf den Umkreis A″B″A‴ über A‴ hinaus weitere Bögen trägt, die beziehlich den Bögen AE, EF, FG .... gleich sind, und hierauf die weiteren Leitstrahlen den schon angewendeten wieder gleich macht.

§. 254.

Was die Tangente an dem Punkt M″ der Verwandelten betrifft, so erinnere man sich, daß sie mit S″F″ den nämlichen Winkel bilden muß, den anfänglich die Tangente (MT, M′Q) mit eben dieser Erzeugenden bildete (§. 170); und da eben dieses auch von der an die Grundlinie gezogenen Tangente gilt, so folgt hieraus, daß das Dreieck, das horizontal in MFT projcirt ist, bei der Entwickelung des Kegels unverändert bleibt. Die eine der Seiten dieses Dreiecks nun bekömmt bei der Entwickelung die Lage M″F″; errichtet man daher die Senkrechte F″T″ = FT und zieht T″M″, so wird letztere die Tangente der Verwandelten an dem Punkte M″ sein.

Aus §. 170 folgt ferner auch, daß die Curve in den Punkten G″, H″, G‴ von den entsprechenden Leitstrahlen unter rechten Winkeln geschnitten wird; denn in den ursprünglichen Punkten (G, G′) und (H, H′) war die Tangente des Durchschnitts senkrecht auf der dazu gehörigen Erzeugenden.

§. 255.

Fig. 64. **Wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist.**

Es sei wieder ACBD die Grundlinie des senkrechten Kegels, und A′S′b′, B′S′a′ diejenigen Seitenlinien, welche seinen sichtbaren Umriß auf der vertikalen Grundebene bilden: und da hier beide Kegelmäntel in Betracht gezogen werden müssen, so nehme man an, sie seien durch zwei Horizontalschnitte A′B′ und a′b′ begrenzt, die gleichweit von der Kegelspitze entfernt liegen und mithin zwei Kreise bilden, die beide in ACBD projicirt sind. Was die schneidende Ebene betrifft, so gebe man ihr eine solche Lage, daß sie beide Mäntel schneide; und da auch hier wieder angenommen wird, die Vertikalebene stehe senkrecht auf ihr, so sind mithin R′Q und QP ihre Spuren.

§. 256.

Die Construction der Durchschnittscurve könnte auch hier durch Hilfsebenen, die man durch die Kegelspitze senkrecht auf die Vertikalebene legte, ausgeführt werden; wegen der sehr schiefen Lage aber, welche die geradlinigen Schnitte bekommen würden, ist es besser, Horizontalebenen anzuwenden. Es sei also $\mu'\gamma'$ eine dieser Ebenen; sie schneide den Kegel nach dem in $\mu M\gamma$ projicirten Kreise und die gegebene Ebene PQR′ nach einer Geraden (M′, XNM), so gehören die Punkte M und N, welche beiden Schnitten auf der horizontalen Ebene gemeinschaftlich sind, der gesuchten Curve an, deren einer Ast also (PMGNI, QG′) ist.

Den andern Ast (RLHKV, H′R′) erhält man eben so, und wendet man einen Schnitt $\delta'\lambda' = \mu'\gamma'$ an, so erhält man zwei Punkte (L, L′) und (K, L′), welche beide ebenfalls auf dem Kreise $\mu M\gamma$ projicirt sind. Es braucht hier wohl nicht wiederholt zu werden, was bei Auflösung der vorhergehenden Aufgabe über die

---

liche Durchschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein, wobei nur zu bemerken ist, daß wenn ω sich ändert, während h constant bleibt, man für die drei genannten Curven beziehlich erhalten wird

$$\text{Tang. } \omega \lessgtr h, \text{ oder } = h, \text{ oder } > h.$$

Scheitelpunkte und die Construction der Tangente gesagt wurde; wichtiger ist für den gegenwärtigen besondern Fall folgende Untersuchung.

§. 257.

Wenn eine Curve einen sich ins Unendliche verlängernden Ast hat, und man nimmt den Berührungspunkt nach und nach in immer größerer Entfernung, so verändert die Tangente stets ihre Lage, und manchmal geht sie völlig ins Unendliche über, wenn der Berührungspunkt selbst unendlich fern genommen wird; in andern Fällen aber bleibt die veränderliche Tange rücksichtlich ihrer Lagen innerhalb einer gewissen Grenze, welche sie nicht eher erreicht, als bis der Berührungspunkt unendlich fern genommen wird; diese Grenze der Lagen einer Tangente heißt eine Asymptote und ihre besondere Eigenschaft wird kurz so ausgesprochen, indem man sagt: die Asymptote einer Curve sei die Tangente für einen unendlich fernen Berührungspunkt.

§. 258.

Es sollen nun die Asymptoten des durch die Ebene PQR′ gemachten Kegelschnittes construirt werden. Fig. 6.
Da der Berührungspunkt einer Tangente dieser Art in unendlicher Entfernung liegen soll, so muß er nothwendig auf einer mit der schneidenden Ebene parallelen Erzeugungslinie liegen; man lege daher durch die Spitze S und parallel mit PQR′ eine Ebene $S\alpha'\alpha$, die den Kegel in den beiden Geraden $S\alpha$ und $S\beta$ schneidet, so werden diese letzteren die Berührungspunkte der Asymptote enthalten. Nun ist bekannt, daß eine Ebene, die den Kegel längs einer Erzeugenden $S\alpha$ berührt, die Tangente $\alpha\theta$ an der Grundlinie zur horizontalen Spur hat; da aber nach §. 213 die Asymptote der von der Berührungsebene und der Ebene PQR gebildete Durchschnitt sein soll, so muß sie durch den Punkt θ gehen, in welchem die Spuren jener Ebenen sich schneiden. Zieht man also $\theta\omega$ parallel mit $S\alpha$, so ist $\theta\omega$ eine Asymptote: da nämlich die beiden Ebenen PQR und die Berührungsebene parallel mit $S\alpha$ sind, so muß auch ihr Durchschnitt, d. i. die Asymptote, parallel mit $S\alpha$ sein. Eben so construirt man auch die andere Asymptote $\varphi\omega$, die parallel mit $S\beta$ sein muß; beide Asymptoten schneiden sich in einem Punkte ω, der genau in der Mitte der reellen Axe GH, d. i. im Mittelpunkt der Curve liegen wird.

§. 259.

Wendete man das vorhergehende Verfahren auf einen paraboliſchen Schnitt an, in welchem Falle die vertikale Spur der Ebene PQR′ parallel mit S′A′ sein müßte, so würden die beiden Seiten $S\alpha$ und $S\beta$ mit SA zusammenfallen. Diese letztere Gerade wäre also die einzige Erzeugende des Kegels, die zur schneidenden Ebene PQR′ parallel wäre, und die Curve ließe, ihrer unendlichen Aeste ungeachtet, dennoch keine Asymptote zu; denn die Ebene PQR′ und die Berührungsebene an SA, deren Durchschnitte die Asymptote geben sollte, wären offenbar parallel mit einander und könnten sich also nicht schneiden.

§. 260.

Aufklappung. Diese wird wie in §. 250 ausgeführt, indem man auf jede Gerade M′m, die man senkrecht auf die vertikale Spur QR′ errichtet hat, die Entfernungen $M'm = XM$ und $M'n = XN$ trägt. Auf eine ähnliche Art klappt man auch die Fußpunkte θ und φ der Asymptoten in θ' und ϱ' auf und verbindet diese letzteren mit dem in ω'' aufgeklappten Mittelpunkt (ω, ω'), so erhält man die aufgeklappten Asymptoten.

§. 261.

Entwicklung. Nach §. 251 muß man, um die Entwicklung des Kegels zu erhalten, aus einem belie- Fig. 6 u. 65

bigen Punkt S″ mit der Eröffnung von S′A′ einen Kreis beschreiben, auf dem man einen Bogen B″A″B‴ so nimmt, daß er sich zur ganzen Peripherie verhält, wie SA zu S′A′; alsdann stellt der Kreissector S″B″A″B‴ die Entwicklung des untern Kegelmantels vor, von dem angenommen wird, man habe ihn längs der Seite (BSA, B′S′a′) geöffnet. Da sich aber der obere Mantel zugleich mit dem untern entwickelt und zwar in entgegengesetzter Bewegung um den Kegelscheitel, den man als unbeweglich ansehen kann, so wird sich dieser zweite Mantel in einen ebenen Sector S″a″b″a‴ ausbreiten, der dem vorhergehenden gleich ist und dessen äußerste Halbmesser in die Verlängerungen von S″B″ und S″B‴ fallen werden. Um den Unterschied dieser beiden Sectoren sichtbar zu machen, wurde hier vorausgesetzt, der obere Mantel werde von einem Kreise $a_2 b_2 a_2$ begränzt, dessen Halbmesser etwas kleiner sei als S″B″; auch wurden diejenigen Theile des unteren Sectors, die von dem oberen verdeckt werden, punktirt angegeben; bei den folgenden Constructionen hat man es jedoch immer nur mit dem ursprünglichen Kreise B″A″B″b″ zu thun.

§. 262.

Man nehme nun auf dem Halbmesser S″A″, der den ersten Sector in zwei gleiche Theile theilt, die Entfernung S″G″ = S′G′, so wird der Punkt G″ die Lage bezeichnen, welche der Scheitel (G, G′) bei der Entwickelung annimmt. Für irgend einen andern Punkt (M, M′) der Durchschnittscurve ziehe man die Erzeugende SMF, deren Lage auf der Entwickelung man erhält, wenn man den Bogen A″F″ = AF macht; und da der wahre Abstand der Kegelspitze vom Punkte (M, M′) gleich S′μ′ ist (§. 252), so wird, wenn man S″M″ = S′μ, macht, der Punkt M″ die Lage des Punktes (M, M′) sein. Bestimmt man die übrigen Punkte auf ähnliche Weise, so erhält man P″M″G″N″I″ als die Verwandelte des unteren Astes der Durchschnittscurve.

Was den obern Ast betrifft, so wird solcher bei der Entwicklung in zwei gleiche, von einander getrennte Theile getheilt, weil der Scheitel (H, H′) auf derjenigen Erzeugenden B′S′a′ liegt, nach welcher der Kegel geöffnet wird, und welche daher bei der Entwickelung einerseits in S″a″ und anderseits in S″a‴ zu liegen kommt. Man trage also auf diese beiden letzteren Geraden die beiden Entfernungen S″H″ und S″H‴ gleich S′H′, so sind H″ und H‴ die Punkte, in welche der Scheitel H′ bei der Entwicklung zerfällt. Hierauf ziehe man durch irgend einen Punkt (L, L′) des obern Astes die Erzeugende SLC, deren Lage S″C″ auf der Entwicklung man erhält, wenn man den Bogen a″C″ = AC macht; endlich trage man auf diesen Halbmesser S″C″ die Länge S″L″ = S′λ′, welche letztere die wahre Entfernung der Kegelspitze vom Punkt (L, L′) ist. So fortfahrend erhält man als Verwandelte des oberen Astes der Durchschnittscurve die beiden Aeste H″L′R″ und H″K″V″, welche die beiden Radien S″a″ und S″a‴ unter rechten Winkeln schneiden müssen.

§. 263.

Fig. 64. u. 65. Nun schreite man zur Construction der Asymptoten. Hier hat man wohl zu bemerken, daß diese Geraden, welche nicht in der Kegelfläche selbst, sondern in den Berührungsebenen an Sα und Sβ liegen, bei der Entwicklung ihre Lage gegen diese Seiten nicht ändern, indem sich die Berührungsebenen blos um letztere drehen. Man bestimme also zuerst die Lage dieser Seiten auf der Entwicklung: dieses geschieht, indem man den Bogen A″α″ = Aα und A″β″ = Aβ nimmt und die Halbmesser S″α″ und S″β″ zieht; nimmt man alsdann auf den durch α″ und β″ gezogenen Tangenten die Entfernungen α″θ″ = αθ, β″φ″ = βφ, so werden die mit den Seiten S″α″ und S″β″ gezogenen Parallelen θ″O und φ″O die Lagen angeben, in welche die ursprünglichen Asymptoten bei der Entwicklung kommen.

Der Punkt O, in welchem diese Geraden sich schneiden, muß auf dem Halbmesser S″A″ liegen, wegen der Symmetrie der vorhergehenden Constructionen links und rechts von diesem Halbmesser; man darf jedoch nicht

glauben, dieſer Punkt O ſei der nämliche wie der Durchſchnitt ω der urſprünglichen Aſymptoten; denn dieſe haben bei der Entwicklung ihre Lage in Beziehung auf einander ſelbſt geändert.

Deſſen ungeachtet aber müſſen die Linien $\theta''O$ und $\varphi''O$ wieder Aſymptoten an den verſchiedenen Aeſten der Verwandelten ſein. Da nämlich die Geſtalt dieſer letzteren Curve ſtets die nämliche ſein wird, auf welcher Ebene man auch den Kegel entwickelt hat, ſo kann man annehmen, die Entwicklung ſei auf der zur Seite $S\alpha$ gehörigen Berührungsebene vorgenommen worden; alsdann aber mußte die Aſymptote $\theta\omega$, die ſich in dieſer Ebene befand, unbeweglich bleiben, und eben ſo auch das unendlich entfernte Element, das ſie mit der Hyperbel gemein hatte; es muß daher die Gerade $\theta''O$ noch immer dieſes Element mit der Verwandelten gemein haben; eben deshalb aber iſt ſie eine Aſymptote des Aſtes $G''M''P''$. Die nämlichen Schlüſſe gelten auch für die andern Aeſte; übrigens ſind ſie nichts anders als eine Folge deſſen, was in §. 170 für gewöhnliche Tangenten erwieſen wurde.

Ueber den Inflexionspunkt. In Fig. 65. muß der Curvenaſt $H''L''R''$, welcher anfänglich der Aſymptote ſeine concave Seite zuwendet, derſelben ſpäter ſeine convexe darbieten; es muß alſo ein Inflexionspunkt auf der Curve ſich befinden und es iſt von Wichtigkeit, denſelben genau zu beſtimmen. Dieß geſchieht aber mittels folgenden, leicht erweisbaren Lehrſatzes: Wenn eine Gerade ſchief auf einer Ebene ſteht, ſo iſt der ſpitzige Winkel, den ſie mit ihrer orthogonalen Projection auf dieſer Ebene bildet, der kleinſte unter allen Winkeln, welchen ſie mit den verſchiedenen durch ihren Fußpunkt in derſelben Ebene gezogenen Geraden bildet; der größte unter dieſen Winkeln aber iſt derjenige, welchen ſie mit der Verlängerung der Projection bildet.

Es ſei nun Fig. (x) auf Tafel 21, PQR die ſchneidende Ebene und ABMDEF der Schnitt, den ſie mit einem Kegel von beliebiger Grundlinie erzeugt: fällt man nun von der Spitze S das Loth ST auf die ſchneidende Ebene und zieht durch den Fußpunkt T die Tangente TMD an den Schnitt, ſo beſtimmt der Berührungspunkt M den Inflexionspunkt auf der Verwandelten der Curve ABMDEF. Man theile, um dieß zu beweiſen, die letztere in Elemente und denke ſich die Entwicklung des Kegels auf der Berührungsebene STMP ausgeführt; alsdann iſt der Winkel SMT, als Minimum in Beziehung auf die Erzeugende SM kleiner als SMB und mithin wird das Element MB, nach der Entwicklung, eine Lage MB′ unterhalb MT annehmen. Weil ferner für die Erzeugende SD der Winkel SDP ein Maximum iſt, ſo iſt er größer als SDE und mithin wird, nach der Entwicklung das Element DE in die Lage DE′, oberhalb DP zu liegen kommen. Die Verwandelte A′B′MDE′F′ bietet alſo eine Inflexion dar in Beziehung auf ihre Tangente in M, welche die Verlängerung des Elements MD iſt.

Man fälle daher in Fig. 64. auf die ſchneidende Ebene PQR′ das Loth S′T′, verlängere es bis zu ſeinem Durchſchnitt mit der Ebene a′b′ der kreisförmigen Grundlinie und ziehe durch dieſen Durchſchnittspunkt eine Tangente an die Grundlinie, ſo erhält man dadurch diejenige Erzeugende des Kegels, auf welcher der Inflexionspunkt liegt, was hinreicht, um die genaue Lage dieſes Punktes auf der Entwicklung der Fig. 65. zu finden. Dieſelbe Methode kann man auch bei Fig. 63. anwenden, wo die Verwandelte ebenfalls einen Inflexionspunkt darbietet; aber ein ſolcher würde nicht exiſtiren, wenn der Fußpunkt des aus S′ gefällten Lothes in das Innere des elliptiſchen Schnittes fiele.

§. 264.

Aufgabe 5. Es ſoll der Durchſchnitt irgend eines Kegels mit einer Ebene, ferner die Entwicklung der Kegelfläche und die Verwandelte der Durſchnittscurve gefunden werden.

Welche Geſtalt und Lage auch der Kegel haben mag (ſeine horizontale Spur wird als bekannt vorausgeſetzt, weil man ſie ſtets aus den horizontalen Spuren ſeiner Seiten conſtruiren kann), ſo darf man nur ſeine Fläche und die gegebene Ebene durch eine Reihe von Hilfsebenen ſchneiden, die man alle durch die Kegelſpitze

gehen läßt, und die man, wenn man will, parallel mit der horizontalen Spur der schneidenden Ebene nehmen kann. Jede dieser Hilfsebenen erzeugt alsdann mit den beiden Flächen geradlinige Schnitte, die man leicht construiren kann und deren Durchschnittspunkte der gesuchten Curve angehören. Ein Beispiel hiervon zu geben, wäre unnöthig; der Leser kann sich selbst eines wählen; überdies werden bald ähnliche Constructionen in allgemeineren Aufgaben vorkommen.

§. 265.

Unendliche Aeste. Um zu erkennen, ob der Schnitt des Kegels mit der gegebenen Ebene P irgend einen derartigen Ast habe, lege man durch die Spitze eine Ebene P′ parallel mit P und untersuche, ob die horizontale Spur von P′ die Grundlinie des Kegels irgendwo schneidet oder berührt. Haben diese beiden Linien keinen Punkt gemeinschaftlich, so kann behauptet werden, daß keine der Erzeugenden des Kegels parallel mit der Ebene P sei und daß also der Schnitt durchaus geschlossene Aeste habe. Schneidet aber die Spur von P′ die Grundlinie des Kegels in einem oder mehreren Punkten, so sind die verschiedenen Erzeugenden G, G′, . . ., welche diesen Punkten entsprechen, offenbar parallel mit der Ebene P und treffen sie also nirgends; mithin wird der Schnitt ebenso viele unendliche Aeste haben.

Die Asymptote des Astes, welcher der Erzeugenden G entspricht, ist der Durchschnitt der Ebene P mit der Berührungsebene längs dieser Erzeugenden. Fällt diese Berührungsebene mit P′ zusammen, was der Fall sein wird, wenn die horizontale Spur von P′ die Grundlinie des Kegels berührt, so hat der unendliche Ast keine Asymptote.

§. 266.

Um die Entwicklung der Kegelfläche zu finden, müßte man die Grundlinie in so kleine Bögen theilen, daß statt ihrer, ohne merklichen Fehler, ihre Sehnen genommen werden können. Hierauf würde man eine dieser Sehnen und die beiden dazu gehörigen Seiten messen und würde nun auf irgend einer Ebene ein Dreieck construiren, das die drei gemessenen Geraden zu Seiten hätte; dieses Dreieck würde als ein Flächenelement der Kegelfläche zu betrachten sein, und man könnte nun unmittelbar an dasselbe das nächst anliegende Element construiren, das mit dem vorhergehenden eine Seite gemein hätte. So fortfahrend erhielte man endlich alle Elemente des Kegels in einer Ebene ausgebreitet, und die Summe dieser an einander liegenden Elemente wäre die Entwicklung der Kegelfläche. Uebrigens gewährt dieses theoretisch richtige Verfahren in der Anwendung wenig Genauigkeit, wenn die Constructionen nicht mit äußerster Sorgfalt ausgeführt werden; denn da man eine ganze Reihe von Dreiecken zu construiren hat, in deren jedem eine der Seiten äußerst klein ist in Betracht der andern, so ist nicht zu vermeiden, daß man nicht einzelne Fehler begehe, die bei fortgesetzter Construction zu immer größern Anlaß geben. Es wäre daher weit vortheilhafter, wenn auf der Entwicklungsfigur zum Voraus eine gerade oder kreisförmige Linie bekannt wäre, auf welcher man nur bestimmte Bögen nehmen dürfte, um die neue Lage der Erzeugenden zu bestimmen. Dieser Vortheil nun wird dadurch erreicht, daß man den Durchschnitt des Kegels mit einer concentrischen Kugel sucht, wovon später in §§. 330 und 331 die Rede sein wird.

§. 267.

Ist einmal die Entwicklung des Kegels auf eine oder die andere Art ausgeführt, so construirt man die Verwandelte eines ebenen Schnittes oder auch jeder andern Curve, indem man von den Halbmessern der Entwicklung Stücke abschneidet, welche den Entfernungen der verschiedenen Curvenpunkte von der Kegelspitze gleich sind, wie solches schon in §. 252 gelehrt wurde.

§. 268.

Aufgabe 6. Es ſoll der Durchſchnitt einer Ebene mit einer Umdrehungsfläche conſtruirt werden.

Auflöſung. Man nehme als Beiſpiel den Wulſt, Fig. 45., von dem ſchon §. 138 die Rede war; Fig. 45.
dieſer hat zum Meridian den Kreis (A′B′C′B″, AC), durch deſſen Umdrehung um die in ſeiner Ebene ge-
legene Vertikale (O, O″Z′) die Wulſtfläche erzeugt wurde. Nun ſuche man den Durchſchnitt dieſer letzteren
mit der Ebene M′T′T, welche die Fläche am innern Mantel in dem Punkt (M′, M) berührt (es wurde
nämlich ſchon §. 138 bemerkt, daß die Berührungsebenen an dieſem Mantel die krumme Fläche durchſchneiden
müſſen).

Hiezu wende man horizontale Hilfsebenen an, und es ſei F′K′N′ die vertikale Spur einer dieſer Ebenen. Sie ſchneidet den Wulſt in zwei Kreiſen, deren Halbmeſſer ON = J′N′ und OM = J′K′ ſind, während ihr Durchſchnitt mit der Ebene M′T′T die Gerade (F′, Ff) gibt, welche ſenkrecht auf der Vertikalebene iſt. Es gehören alſo die vier Punkte F, F″, f″ und f, in welchen dieſe Gerade die beiden Kreiſe ſchneidet, der geſuchten Curve an. Die andern Punkte findet man eben ſo. Iſt man aber einmal zu den beiden äußerſten Parallelkreiſen D″B″ und D′B′ gelangt, ſo erhält man für jeden derſelben nur zwei Punkte, G und g, oder H und h, während die Horizontalebene V′M′L′ drei Punkte liefert, R, r und M, von denen der letztere den Ort bezeichnet, wo die Zweige der Curve einen Knoten bilden. Der geſuchte Durchſchnitt hat folglich die Linien

MHREFGE″Mhege″M, und G′H′

zu Projectionen.

Es wurden hier diejenigen Theile der Horizontalprojection, welche unterhalb des Aequators und Kehlkreiſes liegen, punktirt, weil ſie in Beziehung auf die horizontale Grundebene unſichtbar ſind. Auch muß auf den dieſer Ebene die Curve jene beiden Kreiſe in den Punkten E, F″, e″, e berühren, weil in jedem der letzteren die Berührungsebene am Wulſt vertikal iſt, und mithin die Tangente der Curve und die des Parallelkreiſes, welche ſich beide in jener Ebene befinden, in ihrer Horizontalprojection zuſammenfallen.

§. 269.

Es ſoll nun die Tangente dieſer Curve für irgend einen Punkt (F, F′) gefunden werden. Da dieſe nach §. 213 der Durchſchnitt der Ebene M′T′T mit der Berührungsebene des Wulſtes am Punkt (F, F′) ſein muß, ſo conſtruire man zuerſt dieſe letztere Ebene. Nach der allgemeinen Methode der §§. 133 und 134 muß der gegebene Punkt (F, F′) auf den Hauptmeridian in (N, N′) zurückgeführt und hierauf die Tangente N′P gezogen werden, deren Fußpunkt offenbar P iſt; hat man hierauf dieſen Punkt P wieder auf die Spur des Meridians OF in π zurückbezogen, ſo ziehe man ſenkrecht auf dieſen Meridian die Gerade πθ, welche alsdann die horizontale Spur der an den Punkt (F, F′) des Wulſtes angelegten Berührungsebene ſein wird. Man könnte nun ſehr leicht auch die vertikale Spur dieſer Ebene finden; doch iſt dieß hier unnöthig, denn der Punkt θ, in welchem die Geraden πθ und T′T ſich ſchneiden, gehört offenbar dem Durchſchnitte der Berührungsebene mit der Ebene M′T′T, oder, was dasſelbe iſt, der geſuchten Tangente an. Dieſe iſt alſo die Gerade (θF, T′F′).

Dieſes Verfahren wird jedoch unzureichend, wenn die Tangente für den beſondern Punkt (M, M′) gefunden werden ſolle, weil in dieſem Falle die Ebene der Curve mit der Berührungsebene des Wulſtes zuſammenfällt. Später (§. 719) wird gezeigt werden, wie dieſer intereſſante Fall der Aufgabe gelöſ't werden kann.

§. 270.

Um die Curve in ihrer wahren Gestalt und Größe zu erhalten, darf man nur die Ebene M′T′T um ihre horizontale Spur auf die Horizontalebene aufklappen, wobei jeder Punkt der Curve, wie z. B. (F, F′), in einer auf der Umdrehungsaxe senkrechten Ebene bleiben und seine Stelle auf der Horizontalebene in einer Entfernung von jener Axe erhalten wird, die beim Punkt (F, F′) der Geraden T′F′ gleich ist. Die Aufklappung kann also sehr leicht ausgeführt werden. Hier (auf Tafel 13) wurde sie, um die Figur nicht undeutlich zu machen, weggelassen.

§. 271.

Aufgabe 7. Den Durchschnitt einer Ebene mit einem Umdrehungs-Hyperboloid von Einem Mantel zu construiren.

Fig. 68. Auflösung. Aus §. 140 ist bekannt, daß diese Fläche durch eine Hyperbel erzeugt werden kann, die sich um ihre imaginäre Axe dreht, und eben so auch durch eine Gerade, welche sich um eine andere feste Gerade, die nicht mit ihr in einerlei Ebene liegt, so dreht, wie das Gesetz der Umdrehung (§. 75) es verlangt. Bei der ersten Erzeugungsart ist der Meridian bekannt, und die Behandlung der Aufgabe reducirt sich ganz auf §. 267; hier aber wird die zweite Erzeugungsart vorausgesetzt, und durch (O, O′Z′) die feste, durch (AD, A′D′) hingegen die bewegliche Gerade dargestellt. Letztere wird hier parallel mit der Vertikalebene angenommen; hätte sie aber auch eine andere Lage, so könnte sie leicht in die angegebene gebracht werden (§. 149). Die kürzeste Entfernung beider Geraden ist die Horizontale (OD, D′), welche den Kehlkreis (XDY, X′Y′) beschreibt, und der Fußpunkt (A, A′) der beweglichen Geraden durchläuft den Kreis AαB, welche die horizontale Spur der krummen Fläche ist. Weitere Stücke zur Bestimmung des Hyperboloids sind hier unnöthig; auch wurde die graphische Darstellung desselben auf der Vertikalfläche, wo der sichtbare Umriß eine Hyperbel sein müßte (§. 148), nicht ausgeführt. Damit ferner die Durchschnittscurve bestimmter auf der horizontalen Grundebene heraustrete, wird blos der untere Mantel der Fläche in Betracht gezogen, so daß also (D, D′) als der Endpunkt der beweglichen Geraden betrachtet werden muß. Endlich ist noch zu erinnern, daß die Erzeugende vom zweiten System (§. 141) die Gerade (BD, B′D′) wäre, und daß, wenn man diese beiden Erzeugenden, sich selbst parallel in die Lagen (D′A′, Oa) und (D′B′, Ob) brächte, sie alsdann durch ihre Umdrehung um die vertikale Axe, den asymptotischen Kegel (§. 146) beschreiben würden, dessen Grundlinie der Kreis ab wäre, und dessen Spitze (O, D′) mit dem Mittelpunkt des Hyperboloids zusammenfiele.

§. 272.

Dieses vorausgesetzt, seien PQ und QR′ die Spuren der gegebenen Durchschnittsebene; man hat, wie die Figur es zeigt, die vertikale Grundebene so gewählt, daß sie senkrecht auf der Ebene PQR′ steht. Um nun den Durchschnitt mit dem Hyperboloid zu finden, wende man wieder horizontale Hilfsebenen an; eine dieser letztern habe M′V′ zur vertikalen Spur. Diese Ebene schneidet die Erzeugende (AD, A′D′) im Punkt (V′, V); mithin schneidet sie auch die ganze Umdrehungsfläche in einer Kreislinie, deren horizontale Projection die VMN ist, welche OV zum Halbmesser hat. Eben jene Ebene aber schneidet zugleich auch die gegebene Ebene PQR′ in einer auf der vertikalen Grundebene senkrechten Geraden (M′, IMN); mithin gehören die Punkte M und N, welche dieser Geraden und der Kreislinie VMN gemeinschaftlich sind, der Horizontalprojection der gesuchten Curve an. Als Vertikalprojection entspricht beiden der Punkt M′. Wendet man nun noch andere Hilfsebenen parallel mit M′V′ an, so erhält man die verschiedenen Punkte der Durchschnittscurve. Diese kann, je nach der Neigung der schneidenden Ebene, eine Ellipse, eine Parabel, eine Hyperbel oder eine Abart dieser Curven sein.

§. 273.

Scheitelpunkte. Die Gerade (OP, R′Q), welche offenbar alle mit MN parallelen Sehnen rechtwinklig halbirt, ist mithin eine Axe der Curve, zu welchem Geschlecht auch diese gehören mag. Liegen also Punkte dieser Curve auf jener Axe, so müssen sie Scheitelpunkte sein, und es ist von Wichtigkeit, sie unmittelbar auffinden zu können. Dieses würde geschehen, wenn man die Erzeugende (AD, A′D′) sich so lange drehen ließe, bis sie der (OP, R′Q) in einem gewissen Punkt G begegnete; man kann aber auch die erstere dieser Linien unbewegt, und dagegen die andere (OP, R′Q) sich um die vertikale O, von welcher sie in (O, R′) geschnitten wird, drehen lassen, bis sie die Erzeugende (AD, A′D′) in einem Punkt trifft, der K heißen mag, und welcher sich auf demselben Parallelkreise befinden muß, in welchem der Scheitel G liegt. Dieser Punkt K ist aber leicht zu finden, denn er ist der Durchschnitt der Erzeugenden mit dem Kegel, der durch die Umdrehung der Linie (OP, R′Q) entsteht. Hat man nämlich mit dem Halbmesser OP einen Kreis beschrieben, der die Grundlinie des Hilfskegels sein wird, so darf man nur durch die Spitze (O, R′) dieses Kegels und durch die Erzeugende (AD, A′D′) eine Ebene legen, deren horizontale Spur AC man finden kann, indem man durch (O, R′) eine Parallele (R′C′, OC) mit der Erzeugenden zieht; diese Spur aber wird den Kreis OP in zwei Punkten F und E schneiden, und dadurch die beiden Seitenlinien OF und OE des Hilfskegels bestimmen, welche von der Erzeugenden in den Punkten K und L geschnitten werden. Um nun aber aus diesen Punkten die wahren Scheitelpunkte G und H zu finden, beschreibe man mit den Halbmessern OK und OL zwei Kreise, von welchen jeder die Gerade OP auf der Horizontalebene in zwei Punkten schneiden wird, und man wird leicht unterscheiden, welcher von diesen Punkten wirklich auf der Linie (OP, R′Q) liegt, wenn man die Vertikalprojectionen K′G′ und L′H′ jener Kreise construirt.

Es ist am besten, die Zeichnung der Figur mit der Construction der Scheitelpunkte anzufangen; denn sind diese einmal bestimmt, so kann man die Hilfsebenen, wie M′V′, in zweckmäßigen Entfernungen von einander durchlegen, auch läßt sich aus den Scheitelpunkten das Geschlecht der Durchschnittscurve erkennen, wie sogleich gezeigt werden wird.

§. 274.

Untersuchung des Geschlechtes der Curve.

1) Schneidet die Spur AC die Grundlinie des Hilfskegels, der durch die Gerade (OP, R′Q) erzeugt wurde, und dessen zwei Seitenlinien OF und OE die Erzeugende AD schneiden, so ergeben sich aus jenem Durchschnitt zwei Scheitelpunkte auf (OP, R′Q), und die Curve ist also entweder eine Ellipse, oder eine Hyperbel, deren reelle Axe eben jene Gerade ist. Welcher von beiden Fällen nun wirklich stattfinde, erfährt man leicht, wenn man untersucht, ob irgend eine Ebene M′V′, welche man zwischen den Punkten (G, G′) und (H, H′) durchlegt, irgend einen Punkt der Curve liefere oder nicht. Ist der Durchschnitt eine Ellipse, so erhält man die zweite Axe, wenn man eine Horizontalebene durch die Mitte (ω, ω′) des Abstandes der beiden Scheitelpunkte durchlegt.

2) Ist von den beiden Seitenlinien OF und OE die eine parallel mit der Erzeugenden, so liegt einer der Scheitelpunkte in unendlicher Entfernung, und der Durchschnitt ist daher eine Parabel, welche die Linie (OP, R′Q) von unbestimmter Länge zur Axe hat.

3) Ist die Spur AC eine Tangente an dem Kreis OP, so fallen die beiden Seiten OF und OE′ in Eine Gerade zusammen, und der Punkt, in welchem diese die Erzeugende AD schneidet, gibt, wenn man ihn auf OP trägt, den einzigen Scheitel des Durchschnitts, der nun keine Curve ist, sondern ein System zweier Geraden bildet. Diese Behauptung rechtfertigt sich schon dadurch, daß eine Hyperbel, deren beide Scheitel in

Einen Punkt zusammenfallen, sich in ihre Asymptoten verwandelt; nimmt man sich aber die Mühe, die Figur nach gegenwärtiger Annahme zu construiren, so wird man bemerken, daß die durch die Spitze des Hilfskegels gelegte Ebene AC, den Kegel berührt, wie die Ebene PQR′, so daß diese beiden Ebenen zusammenfallen würden, wenn man die Eine von ihnen um die Vertikale O drehte, eben deshalb müssen aber auch beide mit dem Hyperboloid identische Schnitte erzeugen. Da nun die Ebene AC schon eine Erzeugende DA′ enthält, so kann sie die krumme Fläche vom zweiten Grade aufs Neue in keiner andern als wieder in einer geraden Linie schneiden, deren Projection ebenfalls eine Tangente des Kehlkreises sein wird (§. 141); es muß mithin auch die Ebene PQR′ mit dem Hyperboloid einen Durchschnitt erzeugen, der aus zwei Geraden besteht, die den beiden vorigen analog sind, und sich in dem Punkte schneiden, den man als den einzigen Scheitel auf der Geraden (OP, R′Q) gefunden hat. Die Ebene PQR′ wird das Hyperboloid in diesem Punkte berühren (§. 142). In dem besondern Falle aber, da die Gerade, in welche die beiden Seiten OF und OE zusammenfallen, parallel mit DA wäre, würde die Ebene PQR′ das Hyperboloid in zwei unter sich parallelen Erzeugenden schneiden, und die Berührung geschähe also in einem unendlich fernen Punkte.

4) Trifft endlich die Spur AC den mit OP beschriebenen Kreis gar nicht, so gibt es auf (OP, R′Q) keinen reellen Scheitelpunkt, und die Durchschnittscurve ist alsdann eine Hyperbel, welche (OP, R′Q) zur imaginären Axe hat. In diesem Falle wird die Curve eben so construirt, wie in §. 271; um aber ihren Mittelpunkt, und mithin auch die reelle Axe, zu finden, kann man sich der Asymptoten bedienen, von denen sogleich die Rede sein wird; oder, was noch einfacher ist, man nimmt die Mitte ω' zwischen den Punkten γ' und η', in welchen die Ebene PQR′ die Seiten D′B′ und D′A′ des asymptotischen Kegels schneidet. Diese Vorschrift gründet sich darauf, daß jener Kegel und das Hyperboloid ähnlich und concentrisch sind, und daher durch die Ebene PQR′ in zwei Curven geschnitten werden, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben (§. 147). Nun ist aus §. 247 bekannt, daß der Durchschnitt des asymptotischen Kegels die vertikalen Projectionen seiner beiden Scheitelpunkte in γ' und η' hat; mithin ist die Mitte ω' der Weite $\gamma'\eta'$ nicht nur der Mittelpunkt des conischen, sondern auch des hyperboloidischen Schnittes; man darf ihn also nur noch auf den Punkt ω der Linie OP projiciren, welche, wie bekannt, die eine Axe der Curve ist.

§. 275.

§. 68. Um die Tangente an einem beliebigen Punkt M des durch die Ebene PQR′ erzeugten Durchschnitts zu construiren, muß man den Durchschnitt dieser Ebene mit der zu dem Punkt M gehörigen Berührungsebene des Hyperboloids suchen. Letztere Ebene nun wird durch die beiden geradlinigen Erzeugenden bestimmt, welche durch M gehen (§. 142), und aus §. 141 ist bekannt, daß man dieselben erhält, wenn man durch M die beiden Tangenten $\alpha_2 M \delta_2$ und $\beta M \delta$ an den Kehlkreis zieht. Es werden mithin die Punkte α_2 und β, in welchen diese Erzeugungslinien den Kreis OA, d. h. die horizontale Spur des Hyperboloids, schneiden, der Spur der gesuchten Berührungsebene angehören. Diese Spur muß also $\alpha_2 \beta T$ sein, und der Punkt T, in welchem er die Gerade PQ trifft, gibt den Fußpunkt der gesuchten Tangente TM.

Die beiden durch den Punkt M des Kehlkreises gezogenen Tangenten schneiden den Kreis OA in vier Punkten; man darf aber nur immer solche zwei dieser Punkte zusammennehmen, welche, in Beziehung auf M, beide diesseits oder jenseits der Berührungspunkte δ und δ_2 liegen; denn die beiden Erzeugenden, welche man sucht, sollen sich schneiden, und können also nicht einerlei System angehören (§. 143), was der Fall sein würde, wenn man die beiden Geraden $\alpha_2 \delta_2$ und $\alpha\delta$, oder $\beta\delta$ und $\beta_2 \delta_2$ nähme; es fragt sich also nur noch, ob man die beiden Geraden $\alpha_2 \delta_2$ und $\beta\delta$ oder $\alpha\delta$ und $\beta_2 \delta_2$ nehmen solle. Die beiden letztern aber, deren untere Endpunkte α und β_2 sind, schneiden sich offenbar in einem Punkte (dessen Projection M) oberhalb des Kehlkreises,

ährend der Punkt (M, M'), um den es sich hier handelt, auf dem unteren Mantel des Hyperboloids liegt. Man muß daher die beiden Erzeugenden $\alpha_2\,\delta_2$ und $\beta\,\delta$ nehmen.

§. 276.

Aufklappung. Man drehe die Ebene PQR' um die Spur QR', damit man ihre Aufklappung auf er Vertikalebene erhalte; bei dieser Umdrehung wird die Horizontale (M', 1MN) stets senkrecht auf der Umrehungsaxe bleiben und mithin in die Lage M'mn kommen. Trägt man nun auf letztere Gerade die Entfernungen M'm = 1M, M'n = 1N, so erhält man die beiden Punkte m und n der aufgeklappten Curve. Die brigen Punkte findet man auf dieselbe Art, wie auch die Tangente, deren Fußpunkt T in t zu liegen kommt, nd welcher daher tm wird.

Da das Hyperboloid zu den windschiefen Flächen gehört (§. 145), so kann also keine Entwicklung desselben vorgenommen werden (§. 179). Man bemerke auch, daß das ganze in den vorigen §§. enthaltene Verahren auf eine ganz ähnliche Weise sich ausführen ließe, wenn die schneidende Ebene PQR' schief auf der ertikalen Projectionsebene wäre und wenn sogar die Erzeugende (AD, A'D') eine ganz beliebige Lage hätte. Der Leser möge solche Fälle zu seiner Uebung ausführen.

§. 277.

Unendliche Aeste. Es ist sehr wichtig, a priori zu erkennen, ob der Schnitt des Hyperboloids mit Fig. 68.
iner beliebigen Ebene PQR' unendliche Aeste habe oder nicht. Man ziehe daher durch den Mittelpunkt (O, D') es Kehlkreises eine Parallele mit der Erzeugenden (AD, A'D') und zeichne die Kreislinie ab, welche der Fußunkt (a, A') dieser Parallele beschreibt, wenn sie sich um die vertikale Axe O dreht, um den asymptotischen kegel zu beschreiben. Da nun aus §. 146 bekannt ist, daß alle Seiten dieses Kegels beziehungsweise parallel ind mit den verschiedenen Erzeugenden des Hyperboloids, so darf man nur durch die Spitze (O, D') eine Ebene legen, parallel mit PQR', und sehen, ob diese Ebene π irgend eine Seite jener conischen Fläche enthält.

1) Trifft die horizontale Spur der Ebene π die Basis des Kegels in keinem Punkte, so ist keine Seite es Kegels und mithin auch keine Erzeugende des Hyperboloids mit der gegebenen Ebene PQR' parallel; es ann daher auch der Durchschnitt keinen unendlich fernen Punkt haben und muß folglich geschlossen und elliptisch sein.

2) Wenn die Ebene π die Basis des asymptotischen Kegels in zwei Punkten schneidet, so sind auf dem kegel zwei Seiten des Kegels und auf dem Hyperboloid zwei Paare Erzeugende mit der Ebene PQR' arallel: der Durchschnitt hat also zwei unendliche Aeste und ist eine Hyperbel. Ferner bestimmt jedes er beiden (aus zwei parallelen Geraden bestehenden) Paare von Erzeugenden eine Ebene, die (§. 153) das yperboloid in dem unendlich fernen Durchschnitt dieser Linien berührt; der Durchschnitt dieser asymptotischen Berührungsebene mit der gegebenen Ebene PQR' wird also die Asymptote des entsprechenden Astes liefern. Im em Beispiel des §. 278 wird dieß deutlich werden.

3) Wenn endlich die Ebene π die Basis des asymptotischen Kegels nur berührt, so ist auf diesem Kegel ur Eine Seite und auf dem Hyperboloid nur Ein Paar von Erzeugenden mit der Ebene PQR' parallel; der Durchschnitt hat also nur Einen unendlichen Ast und ist eine Parabel. Diese läßt keine Asymptote zu, weil die durch jene beiden Erzeugenden gelegte Berührungsebene selbst parallel ist mit der Ebene PQR', wie §. 281 es deutlich zeigen wird.

§. 278.

Diese Regeln sollen nun auf den Fall der Fig. 69. angewendet werden, wo die Erzeugende (ADB, A'D'A'') Fig. 69.

eben so weit über als unter den Kehlkreis (XDY, X′Y′) verlängert ist, damit die krumme Fläche durch zwei gleich große Kreise A′B′ und A″B″, die sich horizontal in AZBS projiciren, begrenzt sei. Die geradlinige Erzeugende vom zweiten System wäre (BDA, B′D′B″); und versetzte man diese beiden Erzeugenden sich selbst parallel in den Mittelpunkt (O, D′) der krummen Fläche, so würden sie den asymptotischen Kegel bestimmen, dessen Grundlinie die mit Oa beschriebene Kreislinie wäre. Uebrigens bleibt auch hier, wie in der vorigen Figur, die graphische Darstellung des Hyperboloids auf der Vertikalebene weg; dagegen ist auf der Horizontalebene die Gestalt der krummen Fläche, ihren sichtbaren und verdeckten Partien nach, durch verschiedene Punktirungen dargestellt. Was endlich die schneidende Ebene anbetrifft, so wurde in §. 108 festgesetzt, daß man sich dieselbe als hinweggenommen zu denken habe, so daß nur ihre Spuren PQ und QR′ bleiben. Legt man nun durch die Spitze (O, D′) des asymptotischen Kegels eine Ebene D′E′F parallel mit PQR′, so schneidet dieselbe den Kreis Oa in zwei Punkten und den asymptotischen Kegel in zwei auf OF und OE projicirten Seitenlinien. Betrachtet man zuerst nur die OF und zieht mit ihr die Parallelen $\delta\alpha$ und $\varepsilon\beta$ als Tangenten am Kehlkreise, so sind diese die beiden Erzeugenden des Hyperboloids, welche die Ebene PQR′ erst in unendlich großer Entfernung treffen und dadurch die Existenz eines unendlichen Astes anzeigen. Um die Asymptote zu erhalten, bemerke man, daß die Berührungsebene des Hyperboloids an diesem unendlich entfernten Punkte die beiden Erzeugenden $\alpha\delta$ und $\beta\varepsilon$, welche sich in diesem Punkt schneiden, enthalten muß (§. 153) und also die Gerade $\alpha\beta$ zur horizontalen Spur hat; und da diese Ebene durch ihren Durchschnitt mit der Ebene PQR′ die gesuchte Asymptote liefert, so muß diese offenbar mit $\alpha\delta$ parallel sein. Zieht man daher durch θ, wo die Spuren PQ und $\alpha\beta$ sich schneiden, die Gerade $\theta\omega$ parallel mit $\alpha\delta$, so ist diese die verlangte Asymptote.

§. 279.

Man kann ähnliche Constructionen anwenden, um den zweiten unendlichen Ast zu erhalten, der durch die andere Seite OE des asymptotischen Kegels angedeutet ist. Man bemerke aber, daß bei der vorhergehenden Operation die Ebene $\delta\alpha\beta$, welche das Hyperboloid in einem unendlich fernen Punkt der Erzeugenden $\delta\alpha$ berührte, zugleich die Berührungsebene des asymptotischen Kegels längs der Seite OF ist; denn diese Ebene enthält den Durchmesser δOe des Kehlkreises und mithin die Seite OF; ihre Spur muß also durch F gehen und senkrecht auf dem Halbmesser OF sein. Man darf somit nur an den mit OE beschriebenen Kreis die Tangente Eφ ziehen, welche durch ihren Durchschnitt mit PQ den Punkt φ bestimmt, durch welchen man die Asymptote $\varphi\omega$ parallel mit OE ziehen muß. Diese zweite Asymptote muß die erste in einem auf OP liegenden Punkte ω schneiden, weil diese Gerade (§. 273) stets eine Axe der Curve ist.

§. 280.

Wollte man nur Eine der beiden Erzeugenden $\delta\alpha$ und $\varepsilon\beta$ anwenden, welche durch den Berührungspunkt der Asymptote gehen, so müßte man den Satz zu Hilfe nehmen, daß bei einer Umdrehungsfläche, wie das Hyperboloid eine ist, die Berührungsebene immer senkrecht auf dem durch den Berührungspunkt gehenden Meridian stehen muß (§. 129). Da nun dieser Punkt in vorliegendem Falle in unendlicher Entfernung auf der Geraden $\alpha\delta$ sich befindet, so ist die mit $\delta\alpha$ parallele Vertikalebene OF der entsprechende Meridian: die horizontale Spur der gesuchten Berührungsebene muß also eine aus α auf OF gezogene Senkrechte sein, für welche man auch wirklich, wie vorhin, die Gerade $\alpha\beta$ erhält.

§. 281.

Wenn die durch die Spitze des asymptotischen Kegels parallel mit PQR′ gelegte Ebene D′E′F diesen Kegel in Einer Seite berührt, d. h. wenn sie die Lage D′B′b hat, so sieht man leicht (§. 279), daß sie das

Hyperboloid in einem auf der Erzeugenden (BD, B′D′) liegenden unendlich fernen Punkte berührt: da also diese Berührungsebene parallel ist mit PQR′, so findet kein Durchschnitt dieser beiden Ebenen statt; die Durchschnittscurve hat also zwar wieder einen unendlichen Ast, aber keine Asymptote.

§. 282.

Man construire nun die Curve, in welcher die Ebene PQR′ das Hyperboloid schneidet, und suche zuerst Fig. 6
die auf der Axe (OP, R′Q) liegenden Scheitelpunkte. Nun ist aus §. 273 bekannt, daß man zu diesem Zwecke die Gerade (R′C′, OC) parallel mit der Erzeugenden (AD, A′D′) ziehen, und die Punkte C und A verbinden muß; da aber die Spur CA hier den mit OP beschriebenen Kreis nicht schneidet, so geht daraus hervor, daß es auf der genannten Axe keinen wirklichen Scheitelpunkt gibt, daß also der Schnitt eine Hyperbel ist, welche die Linie (OP, R′Q) zur imaginären Axe hat. Man suche daher den Mittelpunkt, indem man den Durchschnittspunkt ω beider Asymptoten auf R′Q in ω′ projicirt; oder besser (274, 4), man nehme die Mitte ω′ des Abstands der Punkte γ′ und η′, in welchen die Ebene PQR′ die beiden äußersten Seiten des asymptotischen Kegels schneidet; legt man nun durch diesen Punkt ω′ eine Horizontalebene (§. 272), so erhält man die beiden reellen Scheitelpunkte G und H. Durch Anwendung dieser Methode auf andere Horizontalebenen, wie M′V′ und V″W″, die man am besten so wählt, daß man in beiden Mänteln gleiche Durchschnitte erhält, findet man neue Punkte M und N, μ und ν der gesuchten Curve: diese muß offenbar auch durch die Punkte T und S gehen, in welchen der Kreis ABS von der Spur PQ der schneidenden Ebene geschnitten wird; und eben so auch durch die Punkte (Z, Z′) und (U, Z′), in welchen eben jene Ebene den oberen Kreis A″B″ schneidet.

Endlich, da der Kehlkreis X′Y′ von der Ebene PQR′ in zweien, vertikal in L′ projicirten Punkten geschnitten wird, so findet man hieraus ihre horizontalen Projectionen L und K, in welchen die Hyperbel und jener Kreis sich auf der Horizontalebene berühren. Denn obgleich die Tangenten dieser beiden Curven im Raume sehr von einander verschieden sind, so liegen doch beide in der Berührungsebene des Hyperboloids, welche für jeden Punkt des Kehlkreises vertikal ist, indem sie zugleich die Tangente am Scheitel der Meridianhyperbel enthält; daraus aber folgt, daß die beiden ersteren Tangenten, weil sie in dieser vertikalen Ebene liegen, eine gemeinschaftliche Horizontalprojection haben müssen.

Die Construction der Tangente an irgend einen Punkt M des Durchschnitts geschieht wie in §. 275.

§. 283.

Aufklappung. Diese wird, wie in der vorhergehenden Figur, dadurch ausgeführt, daß man die Ebene PQR′ sich um ihre vertikale Spur QR′ drehen läßt, und alsdann auf die Senkrechten der Umdrehungsaxe die Entfernungen M′m = IM, M′n = IN, . . . trägt.

Was die Asymptoten betrifft, so klappe man zuerst den Punkt (ω, ω′) in ω″ auf, und beziehe hierauf die Punkte φ und θ in φ″ und θ″, so erhält man φ″ω″ und θ″ω″ als Asymptoten der aufgeklappten Curve.

§. 284.

Aufgabe 8. Den Durchschnitt einer Geraden und eines Umdrehungshyperboloids mit Einem Fig. 6
Mantel zu finden.

Diese Aufgabe ist nur eine weitere Ausdehnung der im §. 273 aufgelöſten, wo es sich von einer Geraden handelt, welche die Axe der Umdrehungsfläche schnitt; hier wird angenommen, die Gerade habe irgend eine beliebige Lage. Es sei (O, O′Z′) die Axe des Hyperboloids, (ADB, A′D′B′) sei die geradlinige Erzeugende, und (PQ, P′Q′) die Gerade, deren Durchschnittspunkte mit der Umdrehungsfläche gefunden werden sollen. Es wird hier angenommen, sie sei durch Umdrehung um die Axe der krummen Fläche in eine mit der Vertikalebene pa-

rallele Lage gebracht worden, welche vorbereitende Construction immer leicht auszuführen ist; und da der Durchschnittspunkt der Geraden mit der Umdrehungsfläche hiebei in dem nämlichen Parallelkreis bleibt, in welchem er anfänglich lag, so kann eben dieser Punkt auch leicht wieder in seine ursprüngliche Lage zurückversetzt werden.

§. 285.

Schneidet nun die Vertikalebene PQ den mit OD beschriebenen Kehlkreis, so schneidet sie die Umdrehungsfläche in einer Hyperbel, deren reelle Axe (XY, X′Y′) sein wird, und deren eine Asymptote die Gerade (A′B′, PQ) ist. Es wäre also leicht, aus diesen gegebenen Stücken die Curve selbst auf die Vertikalebene zu construiren, und ihr Durchschnitt mit P′Q′ bestimmte alsdann die gesuchten Punkte; aber es soll hier gezeigt werden, wie man unmittelbar, indem man nur die gerade Linie und den Kreis anwendet, zu eben diesem Resultate gelangen könne. Man stelle sich daher vor, die Hyperbel, von der vorhin die Rede war, und welche die gesuchten Punkte enthält, drehe sich um die Vertikale ω, so wird sie ein zweites Hyperboloid mit Einem Mantel erzeugen, dessen Kehlkreis (XδY, X′Y′) ist, und das die Linie (αβ, A′B′) zur geradlinigen Erzeugenden hat. Die anfängliche Frage reducirt sich also jetzt darauf, die Durchschnittspunkte dieses neuen Hyperboloids mit der Geraden (PQ, P′Q′) zu finden, welche seine Axe (ω, O′Z′) schneidet. Dieses aber geschieht nach dem in §. 273 gelehrten Verfahren.

Man beschreibt mit ωP einen Kreis, der die Grundlinie eines Hilfskegels sein wird, dessen Spitze der Punkt (ω, R′) ist; hierauf zieht man (R′C′, ωC) parallel mit der Erzeugenden und bestimmt die Spur αC einer Ebene, welche den Hilfskegel an den Seiten ωE und ωF schneidet. Diese schneiden die Erzeugende in den Punkten (L, L′) und (K, K′); führt man nun diese auf die gegebene Gerade zurück, so erhält man (M′, M) und (N′, N) als die Punkte, in welchen die Gerade (PQ, P′Q′) das zweite und auch das erste Hyperboloid schneidet.

§. 286.

Ist die Horizontalprojection PQ der gegebenen Geraden eine Tangente an dem mit OD beschriebenen Kehlkreise, so schneidet die Vertikalebene PQ das Hyperboloid in zwei Geraden, die in A′B′ und in der zu dieser letzteren symmetrischen Linie projicirt sind.*) Der Durchschnitt dieser beiden Geraden nun mit P′Q′ gibt also unmittelbar die gesuchten Punkte.

§. 287.

Fig. 67. Die Horizontalprojection PQ der gegebenen Geraden liege endlich außerhalb des Kehlkreises OD. In diesem Falle schneidet die Vertikalebene PQ das Hyperboloid wieder in einer Hyperbel, deren reelle Axe aber in der Richtung der Vertikalen R liegt, so daß, wenn man die Curve sich um diese Vertikale drehen läßt, ein Hyperboloid mit zwei Mänteln entsteht, wodurch die Aufgabe verwickelter wird. Man kann aber die Aufgabe umkehren und den Durchschnitt der Geraden (AB, A′B′) mit dem Hyperboloid suchen, das entsteht, wenn man die gegebene (PQ, P′Q′) sich um die Vertikale O drehen läßt; denn es befinden sich in diesem Falle die neuen Durchschnittspunkte offenbar in gleicher Höhe mit den eigentlich gesuchten.

In diesem zweiten Hyperboloid nun wird der mit (OR, R′) beschriebene Kehlkreis nothwendig durch die Vertikalebene AB geschnitten, und die Aufgabe reducirt sich also auf den Fall des §. 285; hat man nämlich den Kehlkreis (Xϱ Y, X′Y′) eines dritten Hyperboloids beschrieben, das die Gerade (πϱ, P′R′) zur Erzeugenden

*) So schneidet z. B. in Fig. 47. die Vertikalebene NMPT, welche den Kehlkreis in D berührt, das Hyperboloid in den beiden Geraden AM und BN. Anmerkung des Uebersetzers.

, so findet man, wie dort, die Punkte (μ, M′) und (ν, N′), in welchen diese Erzeugende von der um die rtikale D gedrehten Linie (AB, A′B′) geschnitten wird; nun dürfte man nur noch diese beiden Punkte auf die rade (AB, A′B′) beziehen, indem man sie in einerlei Parallelkreis ließe. Die Punkte aber, welche man auf e Art erhielte, müßten, der anfänglichen Aufgabe wegen, endlich noch auf (PQ, P′Q′) bezogen werden, so i sie zugleich in derselben Horizontalebene blieben; es ist daher am einfachsten, die Punkte (μ, M′) und (ν, N′) ch unmittelbar auf die Linie (PQ, P′Q′) zu versetzen, um die Punkte (M, M′) und (N, N′) zu erhalten, in chen die Gerade (PQ, P′Q′) das erste Hyperboloid schneidet, welches durch Umdrehung der Linie (AB, A′B′) die Vertikale O erzeugt wurde.*)

Drittes Kapitel.

Durchschnitte zweier krummen Flächen.

§. 288.

Aufgabe 1. Den Durchschnitt zweier Cylinderflächen zu finden. Fig. 70.

Auflösung. Es sei ABGKH die Grundlinie oder die horizontale Spur des ersten Cylinders und Z, A′Z′) eine seiner geradlinigen Erzeugenden; ferner seien VLMYI und (Vv, V′v′) ähnliche Gegebene des iten Cylinders; so kann man hieraus leicht, nach §. 109, den sichtbaren Umriß einer jeden der beiden krummen chen auf die Horizontal- und Vertikalebene construiren. Um nun aber ihren Durchschnitt zu erhalten, wendet n schneidende Ebenen an, die mit den Erzeugenden des einen und des andern Cylinders zugleich parallel sind, welche also mit beiden geradlinige Schnitte bilden werden. Um aber eine solche Ebene zu erhalten, darf n nur durch irgend einen Punkt der Seite (AZ, A′Z′) eine Gerade (ZR, Z′R′) parallel mit den Erzeugenden zweiten Cylinders ziehen, und die Spur RA einer Ebene construiren, welche durch diese beiden Geraden t; zieht man alsdann noch verschiedene Parallelen mit RA, so werden diese die Spuren eben so vieler enen sein, durch welche die beiden Cylinderflächen nach geradlinigen Erzeugenden geschnitten werden.

§. 289.

Man betrachte nun die schneidende Ebene RA; sie schneidet den ersten Cylinder in den Seitenlinien Aaα Ccγ, und den zweiten in den Seiten Ll und Qq; diese vier in einerlei Ebene liegenden Linien schneiden

*) Die in diesem Kapitel enthaltenen Aufgaben handeln, der Allgemeinheit wegen, nur von den Durchschnitten ebener mit krummen Flächen. Es ist aber sehr leicht, die vorgetragenen Theorien auf die graphische Darstellung von prismatischen und pyramidalischen Körpern, und auf ihre Durchschnitte mit ebenen Flächen anzuwenden, insofern man bei Prismen und Pyramiden den Umfang der Grundfläche als Leitlinie oder Directrix, und die Seitenlinie als Erzeugende betrachtet, welche letztere bei Prismen ihrer anfänglichen Lage parallel bleibt, bei Pyramiden hingegen immer durch einen festen Punkt, die Spitze, geht, indem sie die Leitlinie durchläuft. Hält man diese Ansicht fest, so gilt die allgemeine Regel des §. 93 auch für die graphische Darstellung der erwähnten Körper, und die Construction ihrer Durchschnitte mit Ebenen von jeder beliebigen Lage und Neigung gegen die Grundebenen, so wie auch die Aufklappung der Durchschnittsfigur und die Entwicklung der durchschnittenen Oberfläche hat nicht die mindeste Schwierigkeit, und kann bei Prismen ganz auf dieselbe Art, wie es in den §§. 217 ꝛc. ꝛc., 235 ꝛc. ꝛc. für Cylinder, bei Pyramiden hingegen ganz so ausgeführt werden, wie es in den §§. 246 ꝛc. ꝛc. und §§. 264 ꝛc. ꝛc. für konische Flächen geschehen ist.

Anmerkung des Uebersetzers.

ſich wechſelſeitig in den vier Punkten a, α, c, γ, welche alſo der Horizontalprojection des Durchſchnitts der beiden Cylinder angehören. Projicirt man hierauf die Fußpunkte A, C, L, Q jener Seiten auf die Projectionsaxe und verzeichnet ihre vertikalen Projectionen A′a′α′, C′c′γ′, L′α′γ′ und Q′a′c′, ſo erhält man wieder vier Durchſchnittspunkte a′, α′, c′, γ′, welche der Vertikalprojection der Durchſchnittscurve angehören müſſen. Um ſich von der Richtigkeit der Conſtructionen zu überzeugen, kann man unterſuchen, ob die Punkte a und a′, in einer auf der Projectionsaxe ſenkrechten Geraden liegen; eben ſo die Punkte α und α′, c′ und γ′.

Auf die nämliche Art findet man die übrigen Punkte der Durchſchnittscurve, indem man andere, mit RA parallele, ſchneidende Ebenen anwendet. Aber es iſt gut, die Conſtruction der Figur mit Beſtimmung der weſentlichſten Punkte, von welchen gleich die Rede ſein wird, anzufangen. Hat man dieſe einmal conſtruirt, ſo kann man die Anzahl der noch ferner anzuwendenden ſchneidenden Ebenen nach den Zwiſchenräumen ermeſſen, welche ſich zwiſchen den ſchon erhaltenen Punkten befinden.

§. 290.

Punkte, welche auf den Gränzebenen liegen. Zieht man parallel mit RA die Geraden MNB und GHI, welche die eine der Grundlinien berühren und die andere ſchneiden, ſo ſind dieſelben zugleich die Curven der beiden Gränzebenen, zwiſchen welchen ſich alle die Punkte befinden müſſen, welche beiden Cylinderflächen gemeinſchaftlich ſind; denn außerhalb dieſer Gränzen können weitere mit RA parallel gelegte ſchneidende Ebenen nur einen der beiden Cylinder ſchneiden. Wendet man nun auf die Ebene MNB das allgemeine Verfahren des vorigen Paragraphen an, ſo erhält man die zwei Punkte (β, β′) und (b, b′), in welchen die Erzeugenden (Mm, M′m′) und (Nn, N′n′) die Durchſchnittscurve im Raume berühren; dieſe Berührung muß folglich auch auf den beiden Projectionsebenen ſtattfinden, wie es wirklich in Fig. 70. der Fall iſt. Denn die Gerade (Mβ, M′β′) liegt offenbar in der Ebene, welche den Cylinder LMN im Punkte (β, β′) berührt; ſie liegt aber auch in der ſchneidenden Ebene MBβ, welche, nach der Vorausſetzung, den Cylinder ABC längs der Seite Bβ berührt; da alſo die Gerade (Mβ, M′β′) der Durchſchnitt der Berührungsebenen beider Cylinder im Punkt (β, β′) iſt, ſo iſt ſie zugleich eine Tangente an der Curve, in welcher die Cylinderflächen ſich ſchneiden (§. 213). Eben ſo kann man beweiſen, daß die Seite (Nb, N′b′) die Tangente der Durchſchnittscurve im Punkt (b, b′) ſei. Was aber die Gränzebene GHI betrifft, ſo erhält man durch ſie zwei Punkte (g, g′) und (h, h′), in welchen die Curve von den Seiten (Gg, G′g′) und (Hh, H′h′) berührt wird.

§. 291.

Punkte, welche auf den ſichtbaren Umriſſen liegen. Durch die Fußpunkte A, K, X, Y, derjenigen Seiten beider Cylinder, welche den ſichtbaren Umriß derſelben beſtimmen, lege man ſchneidende Ebenen, parallel mit RA; ſo erhält man mittels des allgemeinen Verfahrens in §. 289, die Punkte (a, a′), (α, α′), (π, π′), (φ, φ′), (d, d′). In dieſen Punkten berührt die Curve, jedoch nur auf der Horizontalebene, die dazu gehörigen Seiten. Denn wenn z. B. die Tangente der Curve im Punkte (α, α′) im Raume zwar von der Erzeugenden (Aα, A′α′) verſchieden iſt, ſo liegen doch beide Gerade in der Ebene, welche den zweiten Cylinder längs der Seite (Aα, A′α′) berührt; da nun dieſe Ebene vertikal iſt, (§. 105), ſo folgt daraus, daß die Horizontalprojection der Erzeugenden (Aα, A′α′) und die der Tangente zuſammenfallen, und daß jene mithin die Horizontalprojection der Curve berühren muß (§. 102). Von der Vertikalprojection der Curve gilt nicht das Gleiche.

Es iſt hier zu bemerken, daß immer in einigen von den hier betrachteten Punkten der Uebergang von den ſichtbaren Theilen der Durchſchnittscurve zu den unſichtbaren geſchieht, in Beziehung auf die Horizontalprojection. Wie man dieſe Theile von einander unterſcheiden könne, wird nachher gezeigt werden.

§. 292.

Legt man durch die Fußpunkte V, M, T, G, derjenigen Seiten, welche den sichtbaren Umriß beider Cylinder auf der Vertikalebene bestimmen, ebenfalls schneidende Ebenen parallel mit RA, so erhält man Punkte, wie (e, e') in welchen die Vertikalprojection der Curve die dazu gehörigen Seiten, wie (Ve, V'e'), berührt. Denn die Erzeugende Ve, V'e'), sowohl als die Tangente, welche die Curve im Punkt (e, e') berührt, liegen beide in der zur Seite (Ve, V'e') gehörigen Berührungsebene; da nun diese senkrecht auf der Vertikalebene steht, so fallen die Vertikalprojectionen jener Geraden nothwendig zusammen, während solches bei ihren Horizontalprojectionen nicht der Fall ist. Was die Seite (Gg, G'g') betrifft, so berühren zwar ihre beiden Projectionen die Curve; dieses kommt aber daher, weil in der Fig. 70. jene Seite sowohl zum sichtbaren Umriß als auch zur Gränzebene GHI gehört.

Auf der Vertikalebene geschieht der Uebergang von den sichtbaren Theilen der Durchschnittscurve zu den unsichtbaren immer auch in einigen der hier besprochenen Punkte. Die sichtbaren oder unsichtbaren Theile sind aber nicht dieselben auf beiden Projectionsebenen, indem der Gesichtspunkt für beide nicht derselbe ist (§. 106).

§. 293.

Die Tangente an irgend einem Punkt (t, t') der Durchschnittscurve ist nichts anders als der Durchschnitt der beiden Ebenen, welche die Cylinder längs der Seiten Tt und St berühren; die horizontalen Spuren dieser Ebenen aber sind die Geraden Tθ und Sθ, welche die Grundlinien in T und S berühren und sich in θ schneiden; dieser Punkt θ gehört mithin der gesuchten Tangente an, für welche man die Gerade θt erhält. Liegt der Punkt θ, in welchem die Grundlinien beider Berührungsebenen sich schneiden, zu weit entfernt, wie es hier der Fall ist, so kann man ihn auf folgende Art ersetzen. Die schneidende Ebene MNB, welche den Erzeugenden beider Cylinder zugleich parallel ist, wird von der Berührungsebene Sθ in einer mit Mm parallelen Geraden μω, und von der Berührungsebene Tθ in einer andern mit Aa parallelen Geraden λω geschnitten; mithin ist der Punkt ω, in welchem die Linien λω und μω sich schneiden, beiden Berührungsebenen gemeinschaftlich, und gehört also der gesuchten Tangente tωθ an.

Es war bisher blos von der horizontalen Projection der Tangente die Rede, weil der Punkt (t, t') um der Deutlichkeit willen so gewählt wurde, daß er auf dem zur Vertikalebene gehörigen sichtbaren Umriß liegt, und daß also die Vertikalprojection der ihm entsprechenden Tangente mit der Seite T't selbst zusammenfällt. In einem andern Falle dürfte man nur den Fußpunkt θ der Tangente auf die Projectionsaxe projiciren und von hier aus nach t' eine Gerade ziehen, um die Vertikalprojection der gesuchten Tangente zu erhalten; oder man könnte auch die Vertikalprojectionen der beiden Hilfslinien λω und μω construiren, um aus deren Durchschnitt einen Punkt ω' zu erhalten, welcher der Vertikalprojection der gesuchten Tangente angehörte.

§. 294.

Anmerkung 1. Um auf der Durchschnittscurve beider Cylinder die sichtbaren von den unsichtbaren Theilen auf der Horizontalprojection unterscheiden zu können, bemerke man, daß, wenn der Cylinder ABK allein auf der Figur vorhanden wäre, alsdann diejenigen Seiten, welche ihre Fußpunkte im Bogen ABK haben, sichtbar sein würden, während diejenigen, deren Fußpunkte in den Bogen AHK fallen, es nicht wären; eben so würden, wenn der Cylinder XMY allein vorhanden wäre, alle Seiten, die vom Bogen XVY ausgehen, sichtbar, die übrigen aber unsichtbar sein. Sind nun aber beide Cylinder zugleich vorhanden, so kann es geschehen, daß eine sichtbare Seite des ersten zum Theil durch den andern Cylinder bedeckt wird; schneidet jedoch diese Seite eine ebenfalls sichtbare Seite des andern Cylinders, so wird sie an diesem Ort wieder sichtbar, wenn sie vorher ver- Fig. 70.

deckt gewesen. Befindet sich ferner ein Punkt auf einer der unsichtbaren Seiten eines Cylinders — dies allein vorhanden betrachtet — so wird natürlich ein solcher Punkt um so eher unsichtbar bleiben, wenn Cylinder zugleich vorhanden sind. Daraus nun ergeben sich folgende zwei Regeln:

1) Ein Punkt der Durchschnittscurve ist **sichtbar**, wenn er der Durchschnitt zweier barer Seiten der beiden unabhängig von einander betrachteten Cylinder ist.

2) Ein Punkt der Durchschnittscurve ist **unsichtbar**, wenn er aus dem Durchschnitt z Seiten entsteht, von denen Eine wenigstens unsichtbar ist auf dem Cylinder, dem sie angel

Der Leser wird nun leicht die Anwendung dieser Regeln auf die Horizontalprojection der Durchschnit machen können, da vorhin gezeigt wurde, welche der Seiten auf jedem der beiden für sich betrachteten C sichtbar sind und welche nicht; daraus aber wird ihm klar werden, welche Partien auf der Figur 70. pu und welche ausgezogen werden mußten. Was die Vertikalprojection betrifft, so lassen sich die geg Regeln auch auf diese anwenden, nur muß man sich erinnern, daß bei dieser Projection einzig die Seiten der beiden Cylinder sichtbar sind, welche, im ersten, von dem Bogen TAG, und im zweiten Bogen VMU ausgehen.

§. 295.

fig. 70. Anmerkung 2. Der Durchschnitt zweier Cylinderflächen geschieht entweder durch Ausreißung durch Durchdringung. Ausreißung findet statt, wenn von den Spuren MNB und GHI der beiden C ebenen, die eine die Grundlinie ABKH und die andere die XMY berührt, wie es in Fig. 70. wirkli Fall ist; denn alsdann gibt es auf jedem der beiden Cylinder Erzeugungslinien, welche keinen Punkt der schnittscurve enthalten, so daß beide Körper sich wechselseitig einen Theil ihrer Oberfläche ausreißen, w die den Bogen MON und HKG entsprechenden Theile in ihrer ganzen Länge unversehrt bleiben. In Falle nun bilden alle Theile der Durchschnittscurve einen einzigen ununterbrochenen Ast, den ein licher Punkt in stetiger Bewegung durchlaufen könnte, ohne daß er aufhörte, auf beiden Cylindern zugle zu befinden.

fig. 71. Sind hingegen die Spuren GHI und CAO der beiden Grenzebenen Tangenten an einer und der Grundlinie, wie hier in Fig. 71., so findet eine Durchdringung statt, weil nun alle Erzeugungslini Cylinders XOY in den andern Körper eindringen. Bei ihrem Eintritt in diesen nun erzeugen sie a Mantelfläche, welche dem Bogen AH entspricht, einen ersten, geschlossenen Ast; hierauf gehen sie dur Cylinder hindurch, und bei ihrem Austritt bilden sie abermals einen geschlossenen, zur Mantelfläche CG ge Ast. Diese beiden Curven des Eintritts und des Austritts liegen ganz außereinander und haben Theil gemeinschaftlich, auf welchem ein beweglicher Punkt von der einen zur andern ohne Unterbrechung ge könnte; denn beide sind auf dem größeren Cylinder durch die beiden Mäntel ABC und HKG von ei getrennt, auf welchen kein Punkt des Durchschnitts sich befindet.

§. 296.

Anmerkung 3. So lange die Grundlinien beider Cylinder geschlossene Curven sind, kann die D schnittscurve keinen unendlichen Ast haben. Ein solcher würde nämlich erfordern, daß eine der Erzeug des einen Cylinders parallel mit einer Erzeugenden des andern wäre; alsdann aber wären, nach der D der Cylinder, alle Erzeugenden des einen, allen Erzeugenden des andern parallel, und es könnte also en gar kein Durchschnitt stattfinden, oder der Durchschnitt reductire sich auf eine oder mehrere Gerade, die jenigen Punkten entsprächen, in welchen die beiden Grundlinien sich schnitten.

Sind beide Grundlinien, oder nur eine derselben nicht geschlossene Curven, so darf man nur die Lag

hätte also K′ und M′ auch finden können, indem man nur Eine Seite auf der Vertikalebene angewendet hätte, nämlich die Seite S′ H′. Auf ähnliche Art kann man auch die übrigen Punkte der gesuchten Durchschnittscurve finden, indem man immer wieder andere Spuren schneidender Ebenen durch R zieht: doch ist auch hier, wie bei den Cylindern (§. 289) zu empfehlen, daß man die Construction der Curve mit Bestimmung der wesentlichsten Punkte derselben, von welchen gleich die Rede sein wird, anfange.

§. 299.

Fig. 72. Punkte, welche in den Grenzebenen liegen.

Liegt die Spur R der Linie (S T, S′ T′) außerhalb der beiden Grundlinien, wie es hier der Fall ist, so kann man von ihr aus zwei Gerade R P Q und R U V ziehen, von denen jede die eine der Grundlinien berührt und die andere schneidet. Diese Geraden werden alsdann die Spuren der Grenzebenen sein; denn es ist leicht einzusehen, daß jede durch die beiden Kegelspitzen gelegte Ebene, deren Spur sich außerhalb des Winkels V R Q befindet, nur Einen der beiden Kegel schneiden, und mithin keinen Punkt ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes enthalten könne. Wendet man nun aber auf die Gränzebene R P Q das allgemeine Verfahren des vorigen Paragraphen an, so erhält man den Punkt (L, L′), in welchem die Erzeugende (S L Q, S′ L′ Q′) die Durchschnittscurve im Raume berühren wird. Diese Berührung muß sich aber auch auf beiden Projectionsebenen bewähren; denn weil die Erzeugende (S Q, S′ Q′) erstlich in der Gränzebene R Q liegt, welche den Kegel T längs T L P berührt, und weil sie zugleich auch in derjenigen Ebene liegen muß, welche den Kegel S längs S L Q berührt, so ist sie also der Durchschnitt der Berührungsebenen beider Kegel im Punkte (L, L′) und folglich eine Tangente an der Durchschnittscurve derselben (§. 213).

Eben so erhält man aus der Gränzebene R U V einen Punkt (N, N′), in welchem die Curve von der Seite (S V, S′ V′) auf beiden Projectionsebenen berührt wird.

§. 300.

Punkte des sichtbaren Umrisses. Legt man durch die Fußpunkte B, E, D, derjenigen Seiten, welche den sichtbaren Umriß beider Kegelflächen bilden, schneidende Ebenen, so erhält man durch das allgemeine Verfahren des §. 298 die Punkte (β, β′), (b, b′), (ε, ε′), (δ, δ′), in welchen die Curve die entsprechenden Seitenlinien — jedoch nur auf der Vertikalebene — berühren wird. Denn obgleich die Tangente an einem Punkte der Curve, z. B. am Punkt (β, β′), im Raume von der Seitenlinie (S B, S′ B′) sehr verschieden sein kann, so liegen doch beide in der längs (S B, S′ B′) gehenden Berührungsebene; und da diese offenbar senkrecht ist auf der Vertikalebene, so müssen die Projectionen der erwähnten Seitenlinie und Tangente auf der Vertikalebene in eine Gerade zusammenfallen. Die Gerade S′ B′ berührt mithin die Vertikalprojection der Curve, während die Gerade S B weit entfernt ist, ihre Horizontalprojection zu berühren.

Wie bei den Cylindern, so ist auch hier zu bemerken, daß der Uebergang von dem sichtbaren Theil der Durchschnittscurve zu dem unsichtbaren immer in einem der Punkte geschieht, von welchen hier die Rede war; daher denn ihre vorläufige Construction von großer Wichtigkeit ist. Wie man die sichtbaren Bögen der Curve von den unsichtbaren auf der Zeichnung zu unterscheiden habe, wird demnächst gezeigt werden.

§. 301.

Fig. 72. Die Tangente an irgend einem Punkte (M, M′) der Durchschnittscurve kann, nach §. 213, als der Durchschnitt der beiden Ebenen betrachtet werden, welche die Kegel nach den Seiten S M H und T M G berühren; die Spuren dieser Ebenen aber sind die Geraden H θ und G θ, welche zugleich Tangenten an den Grundlinien sind; mithin muß der Punkt θ, in welchem die Spuren sich schneiden, der Fußpunkt der Tangente an (M, M′)

sein, deren Horizontalprojection also die Gerade θM ist. Ihre Vertikalprojection $\theta' M'$ erhält man dadurch, daß man den Punkt θ auf die Axe projicirt.

§. 302.

Wollte man den tiefsten und höchsten Punkt der Durchschnittscurve finden, d. h. diejenigen beiden Punkte, in welchen die Tangente horizontal ist, so müßte man zuerst eine Ebene RxX suchen, welche die Grundlinien in zwei solchen Punkten schnitte, an welchen die Tangenten xy und XY parallel wären. Die Aufsuchung dieser Ebenen ist mehr oder minder leicht, je nach der Beschaffenheit der Curven AHB und DGE; doch erhält man sie ebenfalls hinreichend genau, wenn man einige Versuche mit verschiedenen durch den Punkt R gezogenen Secanten anstellt. Gesetzt nun, die Spur RxX entspreche der geforderten Bedingung (d. h. er schneide die Grundlinien in solchen Punkten, an welchen die Tangenten parallel sind), so darf man nur das Verfahren des §. 298 auf sie anwenden, um einen Punkt (ξ, ξ') der Curve zu erhalten, dessen Tangente den beiden zu den Seiten Tx und SX gehörigen Berührungsebenen gemeinschaftlich ist. Da aber die Spuren xy und XY dieser Ebenen, der Voraussetzung gemäß, parallel sind, so müssen letztere sich in einer Geraden schneiden, die mit XY parallel und folglich horizontal ist. Mithin ist (ξ, ξ') der tiefste Punkt der Durchschnittscurve; den höchsten findet man auf dieselbe Weise.

§. 303.

Anmerkung 1. Um auf der Vertikalprojection der Durchschnittscurve die sichtbaren Theile von den unsichtbaren unterscheiden zu können, erwäge man, daß, wenn der Kegel S allein auf der Figur vorhanden wäre, alsdann alle diejenigen Seiten, welche vom Bogen AQB ausgehen, auf der Vertikalebene sichtbar sein würden, während die vom Bogen AVB ausgehenden unsichtbar wären; eben so würden, wenn der Kegel T allein vorhanden wäre, die vom Bogen DVE ausgehenden Seiten sichtbar und alle übrigen unsichtbar sein. Da nun aber beide Kegel zugleich auf der Figur vorhanden sind, so kann es geschehen, daß eine sichtbare Seite des ersten ganz oder zum Theil vom andern Kegel verdeckt wird; schneidet jedoch dieser verdeckte Theil eine ebenfalls sichtbare Seite des andern Kegels irgendwo, so ist klar, daß die verdeckt gewesene Seite des ersten Kegels an diesem Orte wieder zum Vorschein kommen muß. Befindet sich ferner ein Punkt auf einer von den unsichtbaren Seiten des für sich betrachteten Kegels, so muß dieser Punkt natürlich auch unsichtbar sein, und er wird es noch um so mehr sein, wenn beide Kegel als zugleich vorhanden betrachtet werden. Aus diesen Betrachtungen aber ergeben sich folgende zwei Regeln, mittels deren der Leser leicht beurtheilen kann, welche Partien der Figur auf der Vertikalebene punktirt oder mit vollem Strich gezeichnet werden müssen: Fig. 7

1) Ein Punkt auf der Durchschnittscurve ist **sichtbar**, wenn er der Durchschnitt zweier Erzeugenden ist, von denen jede sichtbar ist auf dem für sich betrachteten Kegel, dem sie angehört.

2) Ein Punkt auf der Durchschnittscurve ist **unsichtbar**, wenn er der Durchschnitt zweier Erzeugenden ist, von welchen wenigstens Eine unsichtbar ist auf dem für sich betrachteten Kegel, dem sie angehört.

Diese beiden Regeln gelten auch für die Horizontalprojection. Weil aber hier die beiden Kegelspitzen ihre Projectionen innerhalb der Grundlinie haben, so gibt es keine vertikale Berührungsebene, weder für den einen noch für den andern Kegel, und mithin sind alle ihre Seiten sichtbar auf der Horizontalebene, wenn jeder derselben für sich betrachtet und auf die oberen Kegelmäntel keine Rücksicht genommen wird. Mithin ist nach der ersten Regel die Durchschnittscurve in allen ihren Theilen auf der Horizontalebene sichtbar, und muß also mit vollem Strich gezeichnet werden.

§. 304.

Die beiden vorhergehenden Regeln gelten überhaupt für den Durchschnitt jeder zwei krummen Flächen, wenn man nur unter dem Wort „Erzeugende" diejenige gerade oder krumme Linie versteht, welche durch ihre Bewegung die krumme Fläche, von der es sich handelt, erzeugte, und, nachdem man den sichtbaren Umriß dieser Fläche auf jeder der beiden Grundebenen bestimmt hat (§. 106), wohl in Acht nimmt, welche Theile der Erzeugenden ober- und welche unterhalb dieses sichtbaren Umrisses liegen.

§. 305.

Anmerkung 2. Der Durchschnitt zweier Kegel ist, wie bei den Cylindern, entweder Durchdringung oder Ausreißung.

Bei vorliegender Figur ist er Durchdringung, weil die Spuren RUV und RPQ der beiden Grenzebenen Tangenten an einer und derselben Grundlinie sind; diese Durchdringung schließt aber nicht, wie bei den Cylindern, unendliche Aeste der Durchschnittscurve aus, wie sich aus Fig. 73. zeigen wird. Ausreißung findet statt, wenn die eine von den beiden Ebenen die erste und die andere die zweite Grundlinie berührt.

§. 306.

Fig. 73. Unendliche Aeste. Man betrachte, zum Zweck dieser Untersuchung, die beiden Kegel, welche auf der Vertikalebene durch D′S′E′ und A′T′B′ dargestellt sind, und von denen der eine die Ellipse DFE, der andere den Kreis AHB zur Grundlinie hat. Sucht man nun zuerst die Grenzebenen (§. 299), so erhält man als Spuren derselben die Geraden RL und RK, welche den Kreis berühren, die Ellipse hingegen durchschneiden. Für jede dieser Spuren aber, z. B. für RL, erhält man drei Seitenlinien, wie TN, SM, SL, welche in derselben Ebene liegen, und aus deren Spur sich zwei Punkte, λ und μ, ergeben, in welchen die Curve von den Erzeugenden SL und SM berührt wird. Für eine andere schneidende Ebene, RIGHF, welche zwischen den Grenzebenen liegt, erhält man vier Seitenlinien, deren gegenseitiger Durchschnitt aber nur drei Punkte, γ, φ, ι, der Durchschnittscurve liefert, indem der Durchschnitt der beiden Erzeugenden TH und SG über die Spitzen T und S hinaus und mithin auf die obern Kegelmäntel fällt, auf welche hier keine Rücksicht genommen wird (§. 297).

Um diejenigen Punkte der Curve, deren Horizontalprojection hier bestimmt wurde, auch auf der Vertikalebene zu erhalten, darf man nur die Fußpunkte der zu jeder schneidenden Ebene gehörigen Erzeugenden auf die Axe projiciren, und von hier aus Gerade nach T′ und S′ ziehen. Was die Punkte auf dem sichtbaren Umriß betrifft, so erhält man sie in Fig. 73. unmittelbar aus der Lage der Gegebenen. Denn die Erzeugenden, welche den sichtbaren Umriß bestimmen, liegen, in genannter Figur, alle vier in der Vertikalebene RST, daher denn d′, δ′, ε′ jene Punkte sind, denen auf der Horizontalebene die auf RT projicirten d, δ, ε entsprechen. Da endlich die Punkte V und U, in welchen die Grundlinien beider Kegel sich schneiden, offenbar auch mit zur Durchschnittscurve gehören, so erhält man letztere in Form der beiden von einander getrennten Aeste:

(d f λ φ δ x d, d′ f′ λ′ δ′) und (V μ γ ε U, V′ μ′ ε′).

§. 307.

Wollte man auf die beiden obern Kegelmäntel auch Rücksicht nehmen, so erhielte man noch einen dritten Ast der Durchschnittscurve; in allen den Fällen aber, da die Grundlinien beider Kegel Curven vom zweiten Grade sind, bilden alle Aeste des Durchschnitts auf jeder der beiden Grundebenen ein System von Curven, das eine Gerade in nicht mehr als vier Punkten schneiden kann. Denn weil in solchen Fällen die Gleichungen für die beiden conischen Flächen auch vom zweiten Grade sind, so gelangt man durch Elimination einer der Veränder-

hen x, y, z, höchstens zu einer Gleichung vom vierten Grade, weßhalb auch die Combination dieser letzteren it einer Gleichung für irgend eine Gerade nicht mehr als vier Auflösungen zulassen wird.

§. 308.

In gegenwärtiger Figur haben die beiden Grundlinien und die Spitzen eine solche Lage, daß die Vertikal- Fig. 73.
ene RST alle Sehnen, die, in jeder der beiden Kegelflächen, senkrecht auf ihr stehen, wie UV, LK, ... enbar in zwei gleiche Theile theilt. Diese Ebene ist also eine Hauptebene, welche jenen beiden ächen vom zweiten Grade gemeinschaftlich ist. Nun lehrt die Analysis,*) daß in solchem Falle die urchschnittscure nicht nur auf jeder der beiden Seiten dieser Hauptebene symmetrisch ist, sondern auch, daß sie h auf letzterer vollkommen und als Curve vom zweiten Grade projicirt. Mithin sind die Curven $\varepsilon' \mu' V'$ id $\delta' \lambda' d'$ hier Theile einer und derselben Hyperbel. Und würde der Ast $\lambda' \delta$ verlängert bis zum Durchschnitt r beiden Erzeugenden A'T' und E'S', so würde er von dort an zur Projection derjenigen Curve werden, in elcher die obern Mäntel beider Kegel sich schneiden.

§. 309.

In Folge dieser Symmetrie des Durchschnitts auf beiden Seiten der Vertikalebene RST geschieht es auch, ıß die Erzeugenden, welche den sichtbaren Umriß bestimmen, von jener Curve in den Punkten d', δ' und ε' schnitten werden, da doch im Allgemeinen die Projection einer auf irgend einer krummen Fläche befind- hen Curve den sichtbaren Umriß der Fläche in demjenigen Punkte berühren soll, in welchem die Curve selbst e Erzeugende des sichtbaren Umrisses schneidet. Denn weil, für eben diesen Punkt, die Tangente an der Curve wohl als auch am sichtbaren Umriß sich in einer Berührungsebene befindet, welche auf der Projectionsebene nkrecht ist (§. 106), so fallen die Projectionen beider Tangenten in Eine zusammen; geschieht es aber, daß, ie hier im Punkt (d, d'), die Tangente der Curve senkrecht auf der Vertikalebene steht, so reducirt sich re Projection auf einen einzigen Punkt d', und da somit das Element, das der Curve und dem sichtbaren mriß gemeinschaftlich gewesen wäre, auf der Vertikalprojection verschwindet, so findet keine Berührung jener iden Linien mehr statt.

§. 310.

Um nun zu finden, ob die Durchschnittscurve wirklich unendliche Aeste habe, untersuche man, ob auf nem der Kegel sich eine Erzeugende befinde, welche mit einer der Erzeugenden des andern egels parallel ist; denn wenn dieses nicht der Fall ist, so geschieht der Durchschnitt zweier in einerlei Ebene egender Erzeugenden immer in endlicher Entfernung, und es kann also kein unendlicher Ast der Durchschnitts- urve stattfinden.

Man stelle sich daher vor, der Kegel T werde so, sich selbst parallel, fortbewegt, bis seine Spitze, indem Fig. 73.
e auf der Geraden (TR, T'R') fortgleitet, mit der Spitze (S, S') zusammenfalle. Hierauf construire man die orizontale Spur des versetzten Kegels, der in seiner neuen Lage T'' heißen mag. Diese Spur, d. h. diese eue Grundlinie, muß der AVB ähnlich sein, und um sie zu erhalten, muß man, im Allgemeinen, aus dem unkt (S, S') verschiedene Parallelen zu den Seiten des ursprünglichen Kegels T ziehen und ihre horizontale Spuren suchen; da aber in gegenwärtigem Falle die Grundlinie des Kegels T ein Kreis ist, so darf man offen- ar nur die Gerade (S'a', Sa) parallel zu (T'A', TA) und die Gerade (S'b', Sb) parallel zu (T'B', TB) ehen, und um das Stück ab, als um einen Durchmesser, einen Kreis beschreiben.

*) S. Analytische Geometrie im Raum, 9. Kap.

Dieſer Kreis, oder überhaupt die Grundlinie des Kegels T″, muß die beiden Grenzebenen RL und R berühren, weil dieſe den Kegel T berührten, und weil ſie durch die Gerade (TR, T′R′) gehen, nach der Länge die Spitze des beweglichen Kegels fortgleitete.

§. 311.

Hat nun die neue Grundlinie aQb keinen Punkt mit der Grundlinie DLE des unbeweglichen Kegels gemein, ſo haben die beiden Kegel S und T″ auch keine gemeinſchaftliche Erzeugende, und die Kegel S und konnten mithin auch keine parallelen Seitenlinien haben; denn wäre dieß wirklich für zwei Seiten der Fall weſen, ſo hätten dieſe offenbar zuſammenfallen müſſen, nachdem die Spitze T in die Lage S gekommen. dieſem Falle alſo hat die Durchſchnittscurve beider Kegel keinen unendlichen Aſt.

§. 312.

Schneidet aber die Grundlinie aQb des Kegels T″ die Grundlinie DLE des unbeweglichen Kegels S irgend einem Punkte, wie hier z. B. in Q, ſo haben die beiden Kegel S und T″ eine gemeinſchaftliche Erzgende SQ, und denkt man ſich T″ in T zurück verſetzt, ſo muß die Erzeugende in die Lage der Seite T kommen, die parallel mit SQ iſt. Die beiden Kegel T und S haben alſo wirklich zwei parallele Erzeugen und die Fußpunkte P und Q derſelben müſſen in einer durch R gehenden Geraden liegen, nämlich in der Sp der Ebene, welche jene beiden Erzeugenden enthält. Je näher nun bei dieſer Ebene PQR eine der ſchneid den Ebenen ſich befindet; deſto mehr werden zwei der Erzeugenden, welche letzterer Ebene entſprechen, ſich t Parallelen nähern, und deſto entfernter wird alſo ihr Durchſchnittspunkt ſein; und gelangt man endlich zu t beiden Erzeugenden TP und SQ, ſo fällt der Durchſchnittspunkt in unendliche Entfernung. Die Curve l alſo wirklich einen unendlichen Aſt, der ſich einer oder der andern von jenen beiden Erzeugenden nähern wi Aehnliches gilt auch für den Aſt εU, deſſen unendliche Verlängerung von den beiden parallelen Erzeugend Sq und Tq herrührt, zu welchen man durch den zweiten Durchſchnittspunkt q des Kreiſes aQb mit t Ellipſe DLE gelangte.

Dieſe nämlichen zwei Paare paralleler Erzeugenden liefern auch für die Durchſchnittscurve der beiden ob Kegelmäntel unendlich entfernte Punkte. In Fig. 73. aber wurden dieſe beiden Mäntel und ihr Durchſchnitt a ſchon bekannten Gründen weggelaſſen.

§. 313.

ig. 73. Aſymptoten. Ein unendlicher Aſt εμV, der, wie es hier der Fall iſt, von einem wirklichen Durſchnittspunkt der Grundlinien DLE und aQb herrührt, hat auch immer eine Aſymptote. Da nun di Aſymptote die Curve an dem unendlich fernen Punkt berührt, dem die beiden parallelen Erzeugenden TP u SQ zulaufen, ſo muß ſie der Durchſchnitt der beiden Berührungsebenen ſein, welche an beiden Kegeln jen Erzeugenden entſprechen; die Spuren dieſer Ebenen aber ſind die Geraden Pθ und Qθ, welche zugleich Ta genten an den Grundlinien ſind, und der Punkt θ, in welchem ſie ſich ſchneiden, muß der geſuchten Aſympt angehören, welche man erhält, wenn man die Gerade θω parallel mit SQ zieht; denn weil die Berührung ebenen beide mit SQ parallel ſind, ſo können ſie ſich nur in einer mit dieſer Erzeugenden parallelen Li ſchneiden. Die andere Aſymptote ξω erhält man auf ähnliche Art, und wegen der Symmetrie der gegeben Stücke auf beiden Seiten der Vertikalebene RST muß ſie die erſtere in der Geraden KT ſchneiden. Di beiden Aſymptoten ſind aber zugleich auch die Grenze der Tangenten an dem Durchſchnittsaſt der beiden obe Kegelmäntel.

§. 314.

Projicirt man θ oder ξ auf die Axe der Grundebenen, und zieht von hier aus eine Parallele mit der Erzeugenden S′Q′, so erhält man die den beiden Aesten $\mu'V'$ und $\lambda'\delta'$ gemeinschaftliche Asymptote der Hyperbel, welche der Durchschnittscurve als Vertikalprojection dient; die zweite Asymptote der Hyperbel aber ergibt sich nicht aus den vorstehenden Betrachtungen. Der Grund hievon ist leicht einzusehen; denn die beiden Aeste $\varepsilon'\sigma'$ und $\lambda'd'$ enthalten, ob sie gleich an sich von unbestimmter Länge sind, über σ' und d' hinaus keinen Durchschnittspunkt zweier Erzeugenden mehr, und sind daher in der That begrenzt, sofern man sie als beiden Kegeln zugleich angehörend betrachtet; daher sie denn auch dieser Ansicht gemäß keine Asymptoten haben können. Von den beiden Aesten $\mu'V'$ und $\lambda'\delta'$ hingegen ist der erste in jeder Beziehung unbegrenzt (§. 312); und wenn auch der zweite sich im Punkt δ' zu endigen scheint, so kann man ihn doch als den Ort aller der Punkte betrachten, welche beide Kegelflächen gemeinschaftlich haben, so daß er also nach einem, in dieser Beziehung imaginären Zwischenraume wieder reell wird, von dem Punkte an, wo die beiden Erzeugenden A′T′ und E′S′ sich schneiden; denn von dort an ist es die Projection des Durchschnittes der beiden obern Kegelmäntel (§. 308), welcher auch eine unbegrenzte Curve ist. Also ergibt sich die Asymptote dieses Astes der Hyperbel auch aus der Methode der Durchschnitte.

§. 315.

Unendlicher Ast ohne Asymptote. Wäre es der Fall, daß, nach der Construction des §. 310, die Grundlinie aQb des Kegels T″ die Grundlinie DLE in irgend einem Punkt Q berührte, so hätten die beiden Kegel S und T″ die Seite SQ gemeinschaftlich, und folglich müßten die beiden Kegelflächen S und T zwei parallele Erzeugende SQ und TP haben. Die Durchschnittscurve hätte also in diesem Falle auch einen unendlichen Ast, der aber keine Asymptote zuließe. Denn da die beiden Grundlinien DLE und aQb der Annahme gemäß in Q eine gemeinschaftliche Tangente hätten, so würden die der Seite SQ entsprechenden Berührungsebenen an beiden Kegeln zusammenfallen; und führte man also den Kegel T″ in seine ursprüngliche Lage T zurück, so würden die Berührungsebenen längs der Erzeugenden SQ und TP parallel mit einander sein; ihr Durchschnitt, d. i. die gesuchte Asymptote, fiele also in unendliche Entfernung, d. h. er existirte gar nicht. Solches aber ist bei einer gewöhnlichen Parabel der Fall, wo es keine Grenze für die Tangenten gibt. Fig. 73.

§. 316.

Aufgabe 3. Den Durchschnitt eines Kegels und eines Cylinders zu construiren. Fig. 74.

Da diese Aufgabe viele Aehnlichkeit mit den beiden vorhergehenden hat, so möge die bloße Andeutung derselben an einer perspectivisch gezeichneten Figur genügen. Es sei SAB der Kegel und CDE der Cylinder; durch die Spitze S ziehe man eine Parallele SR zu den Seiten des Cylinders; legt man nun durch diese Gerade verschiedene schneidende Ebenen, so werden diese lauter geradlinige Durchschnitte in beiden Flächen erzeugen, die sehr leicht zu construiren sind und deren Durchschnittspunkte der gesuchten Curve angehören.

§. 317.

Die schneidenden Grenz-Ebenen erhält man, indem man durch R zwei Gerade RK und RL zieht, welche die eine der Grundlinien berühren und die andere schneiden; mittels dieser Ebenen aber erhält man die Punkte, in welchen die Curve von den Seitenlinien des Kegels oder von denen des Cylinders berührt wird, je nachdem die Grenzebene die eine oder die andere dieser Flächen schneidet.

§. 318.

Sind die beiden Grundlinien geschlossene Curven, so ergibt sich für den Durchschnitt kein unendlicher Ast, wenn nicht eine der Erzeugenden des Kegels parallel ist mit den Seiten des Cylinders; ob dieses wirklich der Fall ist, erkennt man aber unmittelbar; denn es muß alsdann die Gerade SR durch einen Punkt der Grundlinie ALBK gehen. Auch muß die Tangente an diesem Punkt die Grundlinie des Cylinders schneiden, weil sonst kein Ast des Durchschnitts sich der Erzeugenden SR nähern würde, was man leicht bemerken wird, sobald man eine, diesem besondern Falle entsprechende Figur construirt.

§. 319.

Fig 75. Aufgabe 4. Den Durchschnitt eines Kegels mit einer Kugel zu construiren, die ihren Mittelpunkt in der Kegelspitze hat.

Auflösung. Es sei (S, S′) die Spitze und ABCDE . . . die Grundlinie des gegebenen Kegels; ferner seien YKY und X′Z′Y′ die Projectionen der Kugel, deren Mittelpunkt (S, S′) ist, und von welcher hier nur die untere Fläche in Betracht gezogen wird, damit die Durchschnittscurve auf der Horizontalebene sichtbar werde. Um beide Oberflächen zu schneiden, wende man vertikale, durch den Mittelpunkt gehende Ebenen an. Diejenige von diesen Ebenen, welche z. B. die Gerade SM zur Spur hat, schneidet die Grundlinie des Kegels in M, und mithin die Kegelfläche selbst in der Seite (SM, S′M′), während ihr Durchschnitt mit der Kugel einen größten Kreis gibt. Bringt man daher die Ebene SM durch Umdrehung um die Vertikale S in die Lage des Hauptmeridans SY, so fällt jener größte Kreis mit X′Z′V′ zusammen, und die Seite (SM, S′M′) kömmt in die Lage (SP, S′P′). Nun schneiden sich die beiden Linien X′Z′V′ und (SP, S′P′) im Punkt (Q, Q′); führt man also diesen, mittels eines horizontalen Kreisbogens, auf die ursprüngliche Seite (SM, S′M′) in den Punkt (m, m′) zurück, so wird solcher ein Punkt der gesuchten Durchschnittscurve sein.

§. 320.

Es ist von Vortheil, die eben beschriebene Constructionsweise auf zwei Meridiane SM und SN zugleich anzuwenden, welche die Grundlinie des Kegels in zweien von S gleichweit entfernten Punkten M und N schneiden; denn man erhält alsdann, durch einen und denselben Parallelkreis RQ′ der Kugel auch noch einen zweiten Punkt (n, n′) auf der Seite (SN, S′N′), die man vorher ebenfalls in die Lage (SP, S′P′) gebracht hatte. Hierauf construirt man auf diese Art diejenigen Punkte der Curve, welche auf den Seiten

(SA, S′A′), (SB, S′B′), (SE, S′E′), (SF, S′F′)

liegen, und welche den sichtbaren Umriß des Kegels bilden, oder auch in jenem Meridian liegen, der den sichtbaren Umriß der Kugel bestimmt; auf dieselbe Art erhält man die Punkte

(a, a′), (b, b′), (e, e′), (f, f′),

in welchen die Curve einen oder den andern der beiden Umrisse auf der Vertikalebene berühren wird.

Außerdem wird auch, nach der in §. 304 aufgestellten Regel, immer in einigen von diesen Punkten der Uebergang vom sichtbaren zum unsichtbaren Theil der vertikal projicirten Durchschnittscurve geschehen; hier z. B. findet dieser Uebergang in (b, b′) und nicht in (a, a′) statt, weil die Seite (SA, S′A′) schon hinter dem Meridian (SX, S′X′) liegt, während am anderen Ende der Curve jener Uebergang in (e, e′) geschieht, weil die Seite (SE, S′E′) noch vor dem Meridian (SY, Z′Y′) sich befindet.

Was die Horizontalprojection betrifft, so ist diese in allen ihren Theilen sichtbar; denn die obere Halbkugel wird, eben so wie der obere Kegelmantel, als weggenommen gedacht, und da die Projection der Spitze innerhalb der Grundlinie fällt, so gibt es keine vertikale Berührungsebene (§. 303).

§. 321.

Es ist von Wichtigkeit, die genaue Lage des Punktes g', in welchem die Vertikalprojection der Durch- Fig. 75.
schnittscurve einen Knoten bildet, zu bestimmen. Man bemerke daher, daß dieser Knoten von zwei Punkten (g, g') und (v, g') herrühren muß, welche 1) einerlei Höhe über der Horizontalebene haben, und welche 2) auf weien Seiten SG und SV liegen müssen, deren Vertikalprojectionen in Eine Gerade zusammenfallen, und deren Fußpunkte mithin in einer Sehne GV liegen, die senkrecht auf der Projectionsaxe steht. Da aber jene beiden gesuchten Punkte zugleich auch auf der Kugelfläche liegen sollen, so müssen sie vom Mittelpunkt (S, S') gleichweit entfernt sein; es muß daher auch Sg = Sv, und mithin auch SG = SV sein, und daraus folgt, daß die noch unbekannte Sehne GV ihre Mitte in der Geraden SY haben müsse. Nun ist die Linie AE offenbar der conjugirte Durchmesser aller mit EE' parallelen Sehnen,*) und muß daher ebenfalls die Mitte I der Sehne GV enthalten; folglich wird letztere durch den Durchschnitt der beiden Geraden AE und SY bestimmt, und wenn man nun auf die beiden Seiten SG und SV das Verfahren des §. 319 an, so findet man die beiden gesuchten Punkte, deren Vertikalprojection der Punkt g' ist.

§. 322.

Die Tangente. Um diese für irgend einen Punkt der Curve, z. B. für (m, m') zu erhalten, muß man den Durchschnitt zweier Ebenen suchen, von welchen die eine den Kegel und die andere die Kugel in gedachtem Punkte berührt. Um nun die Berührungsebene für die Kugel zu erhalten, darf man nur (nach §. 133, 134) durch den Punkt Q eine Tangente Q'T' an den Hauptmeridian der Kugel ziehen, hierauf die Entfernung Q'T' auf den Meridian SM in ST tragen, und senkrecht auf SM die Gerade Tθ ziehen, so wird letztere die horizontale Spur derjenigen Ebene sein, welche die Kugel in (m, m') berührt. Was die Berührungsebene des Kegels betrifft, so muß diese durch die Seite (SM, S'M') gehen, und mithin die Gerade Mθ, welche die Grundlinie in M berührt, zur Spur haben. Es wird also der Punkt θ, in welchem die beiden Spuren sich schneiden, der gesuchten Tangente angehören, für welche man die beiden Projectionen θm und θ'm' findet.

§. 323.

Nach den vorhergehenden Betrachtungen ist es nun leicht, den höchsten und tiefsten Punkt der Curve zu finden, d. h. diejenigen Punkte, deren Tangenten horizontal sind. Da nämlich eine solche Tangente sich zugleich in den beiden Berührungsebenen der gegebenen krummen Flächen befinden soll, so müssen die horizontalen Spuren jener Ebenen parallel sein. Gesetzt nun, der gesuchte Punkt befinde sich auf der Erzeugenden (SC, S'C'), so würde die ihr entsprechende Berührungsebene am Kegel zu ihrer Spur die durch C an die Grundlinie gezogene Tangente haben; die Berührungsebene an der Kugel aber hätte zur horizontalen Spur die auf den Meridian SCK in K gezogene Senkrechte; damit nun diese beiden Spuren parallel seien, muß SC eine Normale auf der Curve ABDE sein. Zieht man daher aus dem Punkte S auf der Horizontalebene eine Normale SC nach der Grundlinie des Kegels, und construirt hierauf, nach §. 319, den Durchschnitt der Erzeugenden (SC, S'C') mit der Kugel, so erhält man den Punkt (c, c'), in welchem die Tangente der Durchschnittscurve horizontal sein wird. Dieser Punkt ist hier der tiefste, und man würde auch den höchsten leicht

*) Ein Durchmesser der Ellipse nämlich, der durch E geht, muß alle mit der Tangente EE' parallelen Sehnen halbiren. Eben so muß ein durch A gehender Durchmesser alle mit der Tangente AA' parallelen Sehnen der Ellipse halbiren. Da aber die Tangenten AA' und EE' parallel sind, so sind in beiden Fällen die Sehnen, und mithin auch ihre Mittelpunkte, die nämlichen. Die durch A und E gehenden Durchmesser fallen also in Einen zusammen, d. h. durch die Berührungspunkte A und E der parallelen Tangenten AA' und EE' wird ein Durchmesser bestimmt. Anmerk. d. Uebers.

erhalten, wenn man eine zweite Normale nach der Grundlinie zöge (welche hier durch L ginge); dieſe Conſtruction wurde aber weggelaſſen, weil ſie einige Verwirrung mit andern weſentlichen Linien verurſacht haben würde.

Bei der Lage der für die Fig. 75. Gegebenen können vom Punkt S aus nur zwei Normalen an die Ellipſe ABDE gezogen werden; für eine andere Lage von S aber könnte die Zahl der Normalen bis auf vier ſteigen, wie ſogleich bewieſen werden ſoll; in dieſem Falle gäbe es alſo vier Punkte auf der Durchſchnittscurve, in welchen die Tangente horizontal wäre.

§. 324.

76. **Aufgabe.** An eine ebene Curve ABDE ſoll eine Normale gezogen werden, welche durch einen in derſelben Ebene liegenden Punkt S gehe.

Auflöſung. Dieſes Problem, deſſen Auflöſung in der vorigen Aufgabe verlangt wird, läßt ſich auf directem Wege nicht anders, als durch die Evolute $\alpha\beta\delta\varepsilon$ der gegebenen Curve löſen, welche man nach §. 197 aus den Durchſchnitten der Normalen erhält, die man an ſehr nahe an einanderliegende Punkte der Curve gezogen hat. An dieſe Evolute zieht man vom Punkt S aus eine oder mehrere Tangenten, was mit hinreichender Genauigkeit vermittelſt eines Lineals geſchehen kann, das man durch S an die Curve $\alpha\beta\delta\varepsilon$ berührend anlegt. Die einzige Ungewißheit, welche ſich bei dieſem Verfahren ergeben kann, betrifft die genaue Lage des Berührungspunktes auf der an die Evolute gezogenen Tangente; dieſe Lage aber iſt für die Aufgabe ſelbſt ganz gleichgültig, wenn nur der Punkt C, in welchem die Normale auf die Evolvente ABDE trifft, deutlich beſtimmt iſt.

Wenn die gegebene Curve ABDE eine Ellipſe iſt, wie in Fig. 76., ſo iſt aus §. 200 bekannt, daß ihre Evolute $\alpha\beta\delta\varepsilon$ vier Aeſte hat, die ſich in eben ſo vielen auf den Hauptaxen gelegenen Spitzen vereinigen. Liegt nun der Punkt S außerhalb der Eolute, ſo laſſen ſich offenbar nur zwei Tangenten SC und SL an dieſelbe ziehen, welche zugleich die geſuchten Normalen für die gegebene Curve ſein werden. Liegt der gegebene Punkt S′ aber innerhalb der Evolute, ſo laſſen ſich vier Tangenten an dieſelbe ziehen, nämlich S′C und S′C‴, welche, wie vorhin, die Aeſte $\delta\varepsilon$ und $\beta\alpha$ berühren, und S′C′ und S′C″, welche beide denſelben Aſt $\beta\delta$ berühren, zwiſchen welchem und den beiden Axen ſich der gegebene Punkt S′ befindet. Somit iſt alſo die zu Ende des §. 323 aufgeſtellte Behauptung wegen der Zahl der Normalen, die man durch S an die elliptiſche Grundlinie des Kegels ziehen kann, hinlänglich gerechtfertigt.

§. 325.

77. **Anderes Verfahren vermittelſt einer fehlerzeigenden Curve.** Für die Auflöſung des vorhergehenden Problems — durch einen Punkt S eine Normale an eine ebene Curve AA′A″A‴ . . . zu ziehen — gibt es noch ein Verfahren, das trotz ſeiner Mangelhaftigkeit doch gekannt zu werden verdient. Durch einen beliebigen Punkt A der gegebenen Curve ziehe man eine Tangente AT und fälle auf dieſe die Senkrechte ST. Iſt nun A derjenige Punkt der Curve, durch welchen die aus S gezogene Normale gehen muß, ſo muß natürlich der Fußpunkt T der Senkrechten mit A zuſammenfallen, d. h. er muß in der Curve liegen. Da nun dieſes hier nicht der Fall iſt, ſo iſt auch A nicht der Punkt, durch welchen die Normale gehen muß. Zieht man nun aber noch verſchiedene Tangenten A′T′, A″T″, ... und fällt auf ſie die Senkrechten ST′, ST″, ... ſo bilden die Fußpunkte dieſer letztern die fehlerzeigende Curve oder eine Hilfscurve TT′T″, ... welche durch ihr Zuſammentreffen mit AA′A″ .... den geſuchten Punkt N und dadurch auch die Normale SN beſtimmt.

§. 326.

Das Schlimme dieſes Verfahrens beſteht aber darin, daß die Hilfscurve TT'T"..., ſtatt die gegebene AA'A" .... unter einem leicht unterſcheidbaren Winkel zu ſchneiden — wodurch die Lage des Punktes N deutlich beſtimmt würde — dieſelbe vielmehr immer berührt. Dadurch bleibt die Lage des Punktes N immer ungewiß, und hat man nach den beiden benachbarten Punkten A und A' Normalen gezogen und gefunden, daß die eine über die andere unter S zu liegen kommt, ſo bleibt nichts übrig, als nach dem Augenmaße die Lage von N zwiſchen den Punkten A und A' zu ſchätzen. Bei allen Problemen alſo, zu deren Auflöſung man ſich einer fehlerzeigenden Curve bedient, hat man ſich vor ſolcher Inconvenienz wohl in Acht zu nehmen, welche in gegenwärtigem Falle noch merklicher geworden wäre, wenn man den Punkt N innerhalb der Curve AA'A"... angenommen hätte; denn alsdann hätte die fehlerzeigende Curve ihre concave Seite gegen AA'A" gekehrt, ſo daß der wahre Ort der Berührung noch weniger deutlich zu erkennen geweſen wäre.

Wenn die gegebene Curve AA'A"... geſchloſſen iſt, ſo wird es auch die fehlerzeigende Curve TT'T"... ſein; und liegt der Punkt S außerhalb der gegebenen Curve, ſo geht die fehlerzeigende zweimal durch S, indem ſie daſelbſt einen Knoten bildet nach der Form

$$TT'T''T'''ST^4T^5T^6T^7....$$

Ueberdieß wird ſie auch die Gegebene AA'A"... zum zweitenmal in n berühren, ſo daß dadurch noch eine zweite Normale Sn beſtimmt wird, deren Richtung im Allgemeinen nicht mit der erſten Normale SN zuſammenfallen wird, obgleich es hier geſchieht, wegen der Kreisform, welche man der Curve AA'A"... gegeben hat.

§. 327.

Aufgabe. An eine ebene Curve BB'B"... eine Tangente zu ziehen, welche durch einen mit der Curve in gleicher Ebene liegenden Punkt S gehe. Fig. 77.

Auflöſung. Man kann zwar die Richtung dieſer Tangente SM mit einer für graphiſche Operationen hinlänglichen Genauigkeit finden, wenn man ein Lineal ſo richtet, daß es durch S geht und ſich berührend an die Curve BB'B".... anlegt; deſſenungeachtet bleibt die Lage des Berührungspunktes M immer etwas unſicher, und man kann ſich daher, im Falle derſelbe genau beſtimmt werden ſollte, wieder einer fehlerzeigenden Curve bedienen, vorausgeſetzt, daß man durch gegebene Punkte der Curve BB'B"... Tangenten zu ziehen wiſſe.

Man zieht an verſchiedene Punkte der gegebenen Curve die Normalen BT, B'T', B"T", ... und fällt auf dieſe die Senkrechten ST, ST', ST", ... Wäre nun z. B. B" der Berührungspunkt einer von S ausgehenden Tangente, ſo müßte nothwendig der Fußpunkt T" derjenigen Senkrechten, die man auf die zu B" gehörigen Normale gefällt hat, mit dem Punkte B" zuſammenfallen, d. h. der Punkt T" müßte ſich auf der gegebenen Curve befinden. Da dieſes aber hier nicht der Fall iſt, ſo kann auch B' der geſuchte Berührungspunkt nicht ſein; ſo viel aber iſt klar, daß die fehlerzeigende Curve TT'T"..., die aus den Fußpunkten der gezogenen Senkrechten gebildet wird, durch den geſuchten Berührungspunkt gehen muß, ſo daß alſo der Durchſchnitt der Curven TT'T"... und BB'B"... in M dieſen Punkt beſtimmt. Da beide Curven ſich wirklich ſchneiden, ſo findet die in §. 326 erwähnte Inconvenienz hier nicht ſtatt; und da ferner die fehlerzeigende Curve mit der Gegebenen BB'B"... noch einen zweiten Durchſchnitt bildet, ſo gibt es noch eine zweite Tangente Sm, die man von S aus ziehen kann.

§. 328.

Fig. 74. Andere Auflösung. Es gibt noch ein anderes Verfahren, welches nicht voraussetzt, daß man an gewisse auf der gegebenen Curve bezeichnete Punkte Normalen und Tangenten zu ziehen wisse. Es sei XMY die Curve, an welche aus S eine Tangente gezogen werden solle. Man ziehe aus diesem Punkte eine beliebige Sekante SBA, auf welcher man zwei Senkrechte $A\alpha$ und $B\beta$ errichtet, welche beide der Sehne AB gleich sind, von deren Endpunkten aus sie nach entgegengesetzter Richtung gehen, so daß die eine sich ober-, die andere unterhalb der Sekante befindet; die nämliche Construction wiederhole man für andere Sekanten SB'A', SB''A'', ...; so bilden die Endpunkte aller Senkrechten eine Curve $\alpha'''\alpha\beta\beta'''$, welche offenbar durch den gesuchten Berührungspunkt der Tangente SMT gehen muß, weil diese Tangente als eine Sekante betrachtet werden kann, deren zwischen der Curve enthaltenes Sehnenstück gleich Null ist. Mithin wird der Durchschnitt der beiden Curven XMY und $\alpha'''\alpha\beta\beta'''$ den gesuchten Berührungspunkt M bestimmen, den man mit S durch eine Gerade verbinden muß, um die verlangte Tangente zu erhalten; im Falle man aber die Tangente ST schon mittels eines Lineals gezogen hat, so dient jener Durchschnitt wenigstens dazu, den wahren Ort der Berührung zu bestimmen. Es ist ferner klar, daß, wenn man alle Senkrechten nun auch in einer ihrer wirklichen Lage entgegengesetzten Richtung ziehen würde, man eine zweite Hilfscurve erhielte, die ebenfalls durch den Punkt M gehen müßte, und durch welche man also die Richtigkeit der ersten Construction erproben könnte. Endlich erhellet auch, daß man jeder der Senkrechten das Doppelte oder die Hälfte von der Länge der ihr entsprechenden Sehne hätte geben können, welche Abänderung von Nutzen sein kann, je nach der größeren oder geringeren Abplattung, welche die Curve in der Gegend des Punktes M hat.

§. 329.

Auch bei Auflösung folgender Aufgaben könnte man sich einer fehlerzeigenden Curve bedienen:

An eine ebene Curve eine Tangente zu ziehen, welche mit einer in der Ebene der Curve gegebenen Linie parallel läuft.

An zwei in derselben Ebene liegende Curven eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Aber man erreicht eine eben so große, ja sogar eine größere Genauigkeit, wenn man sich einfach eines guten Lineals bedient, das man entweder an beide Curven oder an die einzig gegebene in der bezeichneten Richtung berührend anlegt, statt zu Hilfslinien seine Zuflucht zu nehmen, die durch einen stetigen Zug der freien Hand gezeichnet werden müssen, und deren Form daher immer einiges Willkürliche enthalten wird. Nur in dem Falle, da der Ort der Berührung, den man genau zu wissen wünscht, etwas unsicher wäre, könnte man, nachdem man die Tangente gezogen, zu dem Verfahren des §. 328 seine Zuflucht nehmen.

§. 330.

Fig. 75. Aufgabe. Entwicklung einer Kegelfläche mit beliebiger Grundlinie.

Auflösung. Die in §. 319 aufgelöste Aufgabe dient zur Construction dieser Entwicklung. Man construirt nämlich die Durchschnittscurve des gegebenen Kegels mit einer Kugel von beliebigem Halbmesser, deren Mittelpunkt die Kegelspitze ist, entwickelt hierauf den senkrechten Cylinder, durch welchen jene Curve in abcdm... projicirt wird, und verzeichnet auf dieser Entwicklung die verwandelte Curve der Linie (abcdm..., a'b'c'd'm'...) von doppelter Krümmung, so erhält man eine ebene Curve, die durch $\alpha\beta\gamma\delta\mu\ldots$ bezeichnet sein mag, deren (leicht meßbare) Bögen die nämliche Länge haben werden, wie die Bögen der Linie von doppelter Krümmung. Da nun aber alle Punkte dieser letzteren Curve sich auf der Kegelfläche in gleicher Entfernung von der Spitze befinden (weil sie zugleich auch Punkte der Kugel sind, deren Mittelpunkt jene Spitze ist), so müssen sie bei der

Entwicklung des Kegels offenbar in die Peripherie eines Kreises zu liegen kommen, den man aus einem beliebigen Punkt S'' mit dem Halbmesser S'Y' der schneidenden Kugel beschreibt. Hat man folglich auf der Entwicklungsebene einen solchen Kreis beschrieben, so bezeichne man auf demselben Bögen, wie

$$\alpha'\beta',\ \beta'\gamma',\ \gamma'\delta',\ \delta'\mu',\ \ldots.$$

von der nämlichen absoluten Länge wie die Bögen

$$\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\mu,\ \ldots.$$

der ersten Verwandelten; hierauf ziehe man von den Theilpunkten α', β', γ', ... gerade Linien nach S'' und trage auf diese die Längen

$$S''\alpha'A'',\ S''\beta'B'',\ S''\gamma'C'',\ S''\delta'D'',\ S''\mu'M'',\ \ldots$$

beziehlich von der nämlichen Größe wie diejenigen Erzeugenden des Kegels, welche zu den Punkten

$$(A, A'),\ (B, B'),\ (C, C'),\ (D, D'),\ (M, M')$$

gehören; auf diese Art erhält man die Entwicklung des Kegels und zugleich die Verwandelte $A''B''C''D''M''\ldots$ der Grundlinie desselben.

§. 331.

Da die Durchschnittscurve des Kegels mit der Kugel alle Erzeugenden unter rechten Winkeln schneidet, so vertritt sie hier die Stelle derjenigen Curve, welche bei Cylindern der *senkrechte Durchschnitt* heißt und durch welche die Entwicklung jedes Cylinders sich sehr bequem ausführen läßt, weil man zum Voraus von der *geradlinigen* Form überzeugt ist, welche die Verwandelte jenes Durchschnittes annimmt. Eben so weiß man auch zum Voraus, daß der *senkrechte* oder *sphärische* Schnitt einer Kegelfläche bei der Entwicklung der letzteren *kreisförmig* wird. Da aber die Durchschnittscurve selbst keine ebene Linie ist, so kann man die Länge ihrer Bögen nicht anders messen, als wenn man zuvor eine ihrer Krümmungen aufhebt,*) was hier durch die vorläufige Entwicklung eines Cylinders geschieht. Es erfordert also dieses Verfahren viele vorbereitende Constructionen, und da hiedurch die Zahl der Fehler sich immer vermehrt, so liefert es keine genauere graphische Resultate, als das weit kürzere Verfahren des §. 267.

§. 332.

Aufgabe 6. *Den Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen zu construiren, deren Axen sich schneiden.* Fig. 7

Auflösung. Man nehme die beiden Projectionsebenen so an, daß die erste mit beiden Axen parallel und die zweite senkrecht auf einer dieser Geraden sei. Betrachtet man diese zweite Ebene als die Horizontalebene, so sind die Vertikale O'Z' und der Punkt O die beiden Projectionen der ersten Umdrehungsaxe, während die andere in Z'I' und in der mit der Projectionsaxe Parallelen OI projicirt ist. Die Hauptmeridiane A'B'C' und a'b'c', d. h. diejenigen, welche in der Vertikalebene OI liegen, sind durch die Aufgabe gegeben und projiciren sich auf der vertikalen Grundebene in ihrer wahren Größe; sie bilden zugleich die sichtbaren Umrisse beider Umdrehungsflächen (§. 131) und sind hier Ellipsen; übrigens ist das nun folgende Verfahren ganz unabhängig von der Natur der Meridiancurven. Auf der Horizontalebene wird der sichtbare Umriß des ersten Ellipsoides durch den Aequator BLXI bezeichnet; der sichtbare Umriß der andern Fläche kann für die Horizontalebene hier nicht angegeben werden, weil derselbe die Construction der Berührungscurve dieses Ellipsoides mit einem umschriebenen, vertikalen Cylinder voraussetzt (§. 106), welche erst später gelehrt werden wird, und welche die Auflösung gegenwärtiger Aufgabe unnützerweise verwickelt machen würde.

*) Siehe hierüber §§. 7 und 654.

§. 333.

Man bemerke nun erſtlich, daß zwei Umdrehungsflächen, die eine, hinſichtlich der Richtung, gemeinſchaftliche Axe haben, ſich nur in (einem oder mehreren) Kreiſen ſchneiden können, deren Ebenen ſenkrecht auf jener Axe ſind und deren Umfänge durch die Punkte beſchrieben werden, in welchen ihre Meridiane ſich ſchneiden. Da nun eine Kugel jeden ihrer Durchmeſſer zur Umdrehungsaxe haben kann, ſo ſtelle man ſich eine Reihe ſchneidender Kugeln vor, die alle ihren Mittelpunkt in (Z', O) haben, in welchem Punkt die Axen beider Umdrehungsflächen ſich ſchneiden, ſo wird jede dieſer Kugeln die beiden gegebenen Flächen in zwei Kreiſen ſchneiden, deren Ebenen ſenkrecht auf den Axen ſtehen und deren Durchſchnittspunkte leicht beſtimmt werden können. Man beſchreibt nämlich aus dem Punkt Z', mit beliebigem Halbmeſſer, den Kreis D'F'E'G', um durch denſelben die Projection einer jener Kugeln darzuſtellen; dieſer ſchneidet die gegebenen Meridiane in den Punkten D' und E', F' und G'; nun erhellet aus obigen Betrachtungen, daß die Geraden D'E' und F'G' die vertikalen Projectionen der beiden Kreiſe ſein müſſen, in welchen die Ellipſoide von der durch D'F'E'G' projicirten Kugel geſchnitten werden; und da die Ebenen dieſer beiden Kreiſe ſich in der horizontalen Sehne (M', Mm) ſchneiden, welche hier innerhalb des Umriſſes der Kugel fällt, ſo müſſen nothwendig ihre auf der Kugel liegenden Umfänge ſich ſelbſt in den beiden Punkten ſchneiden, die in M' vertikal projicirt ſind und deren Horizontalprojectionen durch die Punkte M und m beſtimmt werden, in welchen die Sehne Mm den Kreis (DME, D'E') ſchneidet. Da nun dieſe Punkte offenbar beiden Ellipſoiden gemeinſchaftlich ſind, ſo gehören ſie ihrer Durchſchnittscurve an und man erhält durch ähnliche Conſtructionen, indem man aus Z' mit immer wieder verändertem Halbmeſſer noch andere Kugeln beſchreibt, als Projectionen jenes Durchſchnittes, die beiden Linien

K'L'M'H' und KLMHmlK.

§. 334.

Beſonders wird man das vorhergehende Verfahren auf diejenige Kugel anzuwenden haben, welche durch den Aequator (B'X', BLX) geht; denn dadurch erhält man die beiden Punkte (L', L) und (L', l), von welchen aus die Durchſchnittscurve unter den Aequator geht, und deshalb unſichtbar wird in Beziehung auf die Horizotalebenen. Ob nun gleich dieſe Curve, im Raume betrachtet, den Aequator nicht berührt, ſo befinden ſich gleichwohl die Tangenten am Punkt (L', L) dieſer beiden Curven, in der zu dieſem Punkte gehörigen Berührungsebene, welche, wie jede Berührungsebene am Aequator, vertikal iſt. Die beiden horizontalen Projectionen jener Tangenten müſſen alſo zuſammenfallen, und mithin berührt auch die Curve KLM .... den Kreis BLX in den Punkten L und l, jedoch nur auf der Horizontalebene.

§. 335.

Dieſe allgemeine Folgerung erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn die Tangente am Punkt (L, L') der Curve von doppelter Krümmung vertikal iſt, denn in dieſem Falle verſchwindet das Element, welches die Horizontalprojectionen jener Tangente und des Aequators gemeinſchaftlich hatten, oder es reducirt ſich vielmehr auf einen mathematiſchen Punkt; die Curve (d. h. ihre Projection) hört alſo auf, den Aequator zu berühren und ſchneidet ihn, wobei ſie gewöhnlich einen Wendepunkt bildet. Dieſer Umſtand findet hier wirklich für die Punkte (K', K), (H', H) ſtatt, welche unmittelbar durch den Durchſchnitt der beiden Hauptmeridiane gegeben ſind. Es ſtehen nämlich die Berührungsebenen an dieſen Punkten der Umdrehungsflächen ſenkrecht auf den Meridianebenen und mithin auch ſenkrecht auf der vertikalen Grundebene; mithin muß auch ihr Durchſchnitt — und dieſer iſt eben die Tangente an der Curve — ſenkrecht auf der Vertikalebene ſtehen und ſich auf derſelben alſo in einem einzigen Punkte projiciren. Eben darum aber kann, nach den oben angegebenen Gründen, die

Projection K′L′H′ keinen der beiden ſichtbaren Umriſſe der Ellipſoide berühren, wie es doch ſonſt gewöhnlich der Fall iſt. Uebrigens findet hier weder in K′ noch in H′ ein Wendepunkt ſtatt, weil die beiden Aeſte der Durchſchnittscurve, von denen der eine vor, der andere hinter der Vertikalebene OI liegt, ihrer ſymmetriſchen Lage wegen eine und dieſelbe Vertikalprojection haben, wie ſolches aus der allgemeinen Conſtruction hervorgeht, durch welche man die Punkte (M, M′) und (m, M′) erhalten.

§. 336.

Die Vertikalprojection K′L′H′ wird immer eine Curve zweiter Ordnung ſein, ſo oft die beiden Umdrehungsflächen dieſer Ordnung angehören; denn die Vertikalebene OI, welche zugleich die Ebene des Hauptmeridians beider Umdrehungsflächen iſt, halbirt offenbar alle ſenkrecht auf ihr ſtehenden Sehnen, wie z. B. (Mm, M′), mithin iſt ſie eine beiden Umdrehungsflächen gemeinſchaftliche Hauptebene, und es kann durch einen ſehr einfachen Calcul gezeigt werden, daß der Durchſchnitt jener Flächen ſich auf dieſer Hauptebene als eine Linie vom zweiten Grade projicirt.*) Da man alſo die Natur der Durchſchnittscurve zum Voraus kennt, ſo iſt es leicht, die bei ihrer Conſtruction begangenen Fehler aufzufinden, und diejenigen Biegungen oder Krümmungen auszugleichen, welche ſich mit der wohlbekannten Form der Kegelſchnitte nicht vertragen. Fig. 78

§. 337.

Nimmt man den Grad, welchem die beiden Umdrehungsflächen zugehören, ganz beliebig und betrachtet die ebene Curve K′L′H′ an und für ſich und unabhängig von der windſchiefen Curve, deren vertikale Projection ſie iſt, ſo endigt ſie nicht in den Punkten K′ und H′, ſondern erſtreckt ſich über dieſelben hinaus, entweder um wieder in ſich ſelbſt zurück oder ins Unbeſtimmte fortzugehen. Fährt man daher fort, auf der Vertikalebene Kreiſe aus dem Punkt Z′ zu beſchreiben, theils mit größerem Halbmeſſer als Z′H′, theils mit kleinerem als Z′K′, ſo erhält man, wenn anders die Form der Meridiane noch Durchſchnitte mit dieſen Kreiſen zuläßt, weitere Punkte der Curve K′L′H′, welche außerhalb desjenigen Theiles derſelben liegen, der die Projection der Durchſchnittscurve beider Umdrehungsflächen darſtellt. Dieſer Umſtand, den die auf eine ähnliche Aufgabe ſich beziehende Figur 79. noch deutlicher zeigt, rührt daher, weil das graphiſche Verfahren, das bei der Conſtruction der ebenen Curve K′L′H′ angewendet wird, ein allgemeines iſt und alle Punkte dieſer Curve finden lehrt, während Punkte, wie M′, noch die beſondere Beſtimmung haben, Projectionen der beiden Flächen gemeinſchaftlichen, Punkte zu ſein. In letzterer Beziehung muß daher M′ nicht nur überhaupt der Durchſchnitt zweier Sehnenrichtungen D′E′ und F′G′ ſein, ſondern er muß zugleich auch innerhalb des Kreiſes D′F′E′G liegen, wie ſolches in §. 333 ſchon bemerkt worden iſt. Schneiden ſich alſo die beiden Sehnen D′E′ und F′G′ erſt in ihrer Verlängerung, ſo liefern ſie zwar immer noch einen zur Curve K′L′H gehörigen Punkt, der aber jetzt nicht mehr zur Projection der windſchiefen Durchſchnittscurve gehört.

§. 338.

Eine Tangente an die Durchſchnittscurve zu ziehen. Fig. 78

Erſte Methode. Die Tangente an einen gegebenen Punkt (M, M′) kann dadurch gefunden werden, daß man den Durchſchnitt zweier Ebenen ſucht, welche die Umdrehungsflächen in jenem Punkte berühren. Nun erhält man die Berührungsebene für das Ellipſoid A′B′C′, wenn man (§. 133) den Punkt M′ auf den Hauptmeridian in D′ aufklappt, und hierauf an letzteren die Tangente D′T′ zieht; führt man alsdann den Fußpunkt T′ dieſer

*) Der Erfinder dieſes intereſſanten Satzes iſt Hr. J. Binet. Siehe auch Analytiſche Geometrie im Raum, 9. Kap.

Tangente auf den Punkt T des Meridians OM zurück und errichtet auf OM die Senkrechte Tθ, so ist diese die horizontale Spur der gesuchten Berührungsebene an dem Ellipsoid A′B′C′.

Um nun auch die Berührungsebene für das Ellipsoid a′b′c′, dessen Axe nicht vertikal ist, zu finden, bringe man zuerst den Punkt M′ in den Punkt F′ des Hauptmeridians; hierauf construire man die Normale F′N′, aus welcher man sodann die Normale (M′N′, MN) für den Punkt (M, M′) findet, der mit F′ in einerlei Parallelkreis liegt (§. 130). Nun darf man nur noch durch (M, M′) eine senkrechte Ebene auf letztere Normale legen, um die gesuchte Berührungsebene zu erhalten. Man denke sich daher in dieser Ebene eine mit ihrer vertikalen Spur parallele Gerade durch (M, M′) gezogen, deren Vertikalprojection die auf M′N′ senkrechte Linie M′P′, und deren Horizontalprojection die mit der Projectionsaxe parallele Gerade MP sein wird. Zieht man hierauf durch den Fußpunkt (P, P′) dieser Hilfslinie auf MN die Senkrechte PQ, so ist diese die horizontale Spur der Ebene, welche das Ellipsoid a′b′c′ in dem Punkt (M, M′) berührt (§. 33). Da nun die beiden Spuren PQ und Tθ der beiden Berührungsebenen sich in dem Punkte θ schneiden, so ist dieser der Fußpunkt der gesuchten Tangente, deren Projectionen mithin θM und θ'M′ sein werden.

§. 339.

Zweite Methode, mittels einer Normalebene. Aus §. 214 geht hervor, daß die Tangente der Durchschnittscurve senkrecht sein muß auf der Ebene, welche man durch die nach dem Berührungspunkte gezogenen Normalen beider Umdrehungsflächen gelegt hat. Man darf daher nur diese Ebene, welche zugleich eine Normalebene der Curve ist, construiren. Nun hat man für das zweite Ellipsoid a′b′c′ schon die Normale (M′N′, MN) construirt; um aber auch für das erste eine solche zu finden, ziehe man nach dem Punkt D′ des Hauptmeridians die Gerade D′R′ senkrecht auf die Tangente D′T′, so erhält man als Normale für den Punkt (M′, M) die Gerade (M′R′, MO) nach §. 130. Nun könnte man leicht die vertikale Spur der durch die beiden Normalen gehenden Ebene finden; da man aber hier nur die Richtung dieser Spur zu kennen braucht, welche auf den beiden Vertikalebenen OI und O′I′ dieselbe ist, so bemerke man, daß die beiden Normalen die Axen O′Z′ und I′Z′ in R′ und N′ schneiden, woraus sich unmittelbar N′R′ als Spur der gesuchten Normalebene auf der Vertikalebene OI ergibt. Zieht man daher durch M′ die Gerade M′δ' senkrecht auf diese Spur, so erhält man die Vertikalprojection der gesuchten Tangente.

Um nun auch ihre Horizontalprojection zu finden, suche man die horizontalen Spuren irgend zweier von denjenigen Linien, welche die drei in der Normalebene liegenden Punkte (M′, M), (N′, N), (R′, O) verbinden. Für die Gerade (N′M′, NM) findet man den Punkt α und für die Gerade (N′R′, NO) den Punkt β als horizontale Spur, mithin muß $\alpha\beta$ die horizontale Spur der Normalebene sein. Errichtet man nun auf diese die Senkrechte Mθ, so erhält man die Horizontalprojection der gesuchten Tangente.

§. 340.

§. 78. Das im vorigen Paragraph gelehrte Verfahren ist nicht nur in gewissen Fällen einfacher als dasjenige mittels zweier Berührungsebenen, sondern es hat auch noch den Vortheil, daß es sich manchmal bei gewissen besondern Punkten anwenden läßt, für welche das andere Verfahren keine Auflösung liefert. Man betrachte z. B. den Punkt (K, K′), der auf den beiden Hauptmeridianen zugleich liegt. Wegen dieser besondern Lage des Punktes stehen die beiden ihm entsprechenden Berührungsebenen senkrecht auf der Vertikalebene, und folglich wird ihr Durchschnitt, d. i. die Tangente der Curve (K′L′H′, KLH . . .), horizontal in einer auf KO Senkrechten und vertikal in dem Punkte K′ projicirt sein. Aus diesen beiden Projectionen läßt sich nun zwar erkennen, welche Lage die Tangente an der windschiefen Curve im Raume einnimmt; über die Lage derjenigen Tangente hingegen, welche die ebene Curve K′L′H′ in K′ berührt, bleibt man im Ungewissen. (Diese letztere Tangente kann als

die Projection einer Tangente an der windschiefen Curve angesehen werden, welche derjenigen Tangente, deren Vertikalprojection sich auf einen Punkt reducirte, im Raume unmittelbar vorausging.) Es ergibt sich aber aus der Betrachtung der beiden Normalen eine gewisse constante Eigenschaft der ebenen Curve K′L′H′, welche letztere man so betrachten kann, als sei sie in der Ebene der beiden Meridiane verzeichnet und ganz unabhängig von der windschiefen Curve, deren Projection sie aufnimmt. Bezieht man nämlich irgend einen beliebigen Punkt M′ auf die Punkte D′ und F′ der Meridiane, durch Senkrechte, die man auf die Axen zieht, und construirt hierauf die Normalen D′R′ und F′N′, so steht die Gerade R′N′ immer senkrecht auf der durch M′ gehenden Tangente. Da nun diese Eigenschaft für alle Punkte der ebenen Curve K′L′H′ gilt, wenn man nur immer solche Linien anwendet, die in ihrer Ebene liegen, so muß sie auch gelten für den Punkt K′; und offenbar ist die Anwendung auf diesen noch einfacher, weil er auf beiden Meridianen zugleich liegt. Man darf nämlich nur die beiden Normalen K′V′ und K′U′ construiren, hierauf die Gerade U′V′ ziehen und auf diese die Senkrechte K′S′ fällen, um in letzterer die gesuchte Tangente zu erhalten.

Durch eine ähnliche Construction findet man auch die Tangente an dem Punkt H′.

§. 341.

Aufgabe 7. Man soll den Durchschnitt eines Paraboloids mit einem Hyperboloid finden, vorausgesetzt, daß Beide Umdrehungsflächen sind, deren Axen sich schneiden.

Auflösung. Es sei (O, O′Z′) die Axe und A′C′B′ der Hauptmeridian des Paraboloids, das hier durch den Kreis (A′B′, AB) begrenzt ist und dessen Inneres sichtbar ist in Bezug auf die Horizontalebene. Ferner sei (OI, Z′I′) die Axe des Hyperboloids: die Vertikalebene ist nämlich so angenommen, daß sie parallel ist mit beiden Axen. Was aber den Meridian des Hyperboloids betrifft, so wird derselbe nicht als gegeben betrachtet, indem sonst die Aufgabe sich ganz auf die des §. 332 zurückführen ließe; dagegen ist die geradlinige Erzeugende (PQ, P′Q′) gegeben, durch deren Umdrehung um die feste Gerade (OI, Z′I′) das Hyperboloid erzeugt wurde; dieses wird jedoch nicht als wirklich vorhanden betrachtet, sondern es ist hier blos dasjenige Paraboloid vorhanden, welches durch die verschiedenen, aufeinanderfolgenden Lagen der beweglichen Geraden (PQ, P′Q′) in einer gewissen Curve geschnitten wird. Um diese Curve zu finden werden abermals schneidende Kugeln angewendet (§. 333), die alle aus dem Punkt Z′ beschrieben sind; da aber der Meridian des Hyperboloids nicht zum Voraus gegeben ist, so kann auch der größte Kreis einer solchen Kugel nicht mehr willkürlich gezogen werden, sondern man muß immer zuerst einen Parallelkreis jenes Hyperboloids construiren. Fig. 7

§. 342.

Man lege daher durch einen willkürlich auf der Axe genommenen Punkt ω′ eine Ebene F′ω′G′ senkrecht auf die Axe; diese Ebene schneidet die Erzeugende in dem Punkt (β′, β), dessen Entfernung vom Punkt ω′ offenbar der Hypotenuse eines rechtwinkligen, aus den Katheten ω′β′ und β′β″ = αβ construirten Dreiecks gleich ist; beschreibt man also mit dieser Hypotenuse ω′β′ einen Kreis F′β″G′, so wird solcher die Aufklappung des Parallelkreises sein, in welchem das Hyperboloid durch die Ebene F′ω′G′ geschnitten wird; und die Endpunkte F′ und G′ seines Durchmessers werden zwei Punkte der Meridian-Hyperbel sein, die man sich auf der Vertikalebene OI liegend zu denken hat. Fig. 7

Man nehme nun die Entfernung Z′F′ als Halbmesser einer der schneidenden Kugeln an; diese Kugel nun schneidet das Hyperboloid in dem auf F′G′ projicirten Parallelkreis, und das Paraboloid in einem Kreise, dessen Projection D′E′ ist. Mithin ist der Punkt M′, in welchem die beiden Sehnen F′G′ und D′E′ sich schneiden, und der innerhalb der Kugel fällt, die Vertikalprojection derjenigen zwei Punkte, in welchen die Umfänge der beiden Parallelkreise sich schneiden; diese Punkte aber gehören dem Durchschnitt der gegebenen Flächen an, und

man findet ihre Horizontalprojectionen, wenn man auf der Horizontalebene den Parallelkreis (D M E, D′ E′) beſchreibt und die Vertikale M′ m M zieht.

§. 343.

Durch ähnliche Conſtructionen erhält man auch die übrigen Punkte der Curve

(K′ L′ λ′ M′ H′, K L λ M H m l K),

in welcher das Paraboloid von dem Hyperboloid geſchnitten wird; und der Meridian V′ F′ S′ U′ der letzteren Fläche, deſſen Punkte auf die nämliche Art gefunden werden, wie der Punkt F′, muß, auf der Vertikalebene, die Projection der Erzeugenden in dem Punkte (S, S′), wo ſie den Hauptmeridian O I ſchneidet, berühren. Ferner gibt der Durchſchnitt des Meridians V′ F′ S′ U′ mit dem Meridian des Paraboloids die äußerſten Punkte (K, K′) und (H, H′) der Durchſchnittscurve.

§. 344.

Man bemerke auch, daß eine und dieſelbe Kugel zwei ſolche Punkte wie L′ und λ′ liefern kann, die auf Einem Parallelkreis liegen und beide dem Durchſchnitt der gegebenen Umdrehungsflächen angehören; während ein andermal eine ſchneidende Kugel zwei Punkte M′ und μ′ liefern kann, von denen nur einer dem geſuchten Durchſchnitte angehört, weil der zweite außerhalb des Kugelumriſſes liegt. Da jedoch der Punkt μ′ aus dem allgemeinen graphiſchen Verfahren ſich ergibt, durch welches man alle Punkte der ebenen Curve K′ M′ H erhält, wenn letztere als unabhängig von der windſchiefen Linie, deren Projectionen ſie aufnimmt, betrachtet wird; ſo gehört er alſo auch jener ebenen Curve und zwar ihrer Verlängerung an (§. 337). Die Curve ſelbſt iſt offenbar eine Hyperbel, aus den in §. 336 angeführten Gründen.

§. 345.

Die Tangente. Um dieſe für irgend einen Punkt (M, M′) zu finden, conſtruire man, wie in §. 339, zuerſt die Normalen beider Umdrehungsflächen für dieſen Punkt. Durch die Normale E′ R′ des Paraboloids aber erhält man den Punkt R′ der Axe O′ Z′, durch welchen die dem Punkt (M, M′) entſprechende Normale der Umdrehungsfläche gehen muß; man braucht übrigens dieſe Normale nicht wirklich zu ziehen, indem der Punkt R′ der ferneren Conſtruction genügt.

Was das Hyperboloid betrifft, deſſen Meridian durch die Aufgabe nicht gegeben iſt, ſo bemerke man, daß die Berührungsebene an dem in (β, β′) projicirten und in β″ aufgeklappten Punkte durch die Tangente β″ T des Parallelkreiſes ſowohl als auch durch die Erzeugende (β P, β′ P′) gehen muß, welche die Vertikalebene O I in (S, S′) ſchneidet; mithin iſt T S′ die Spur der Berührungsebene auf der Ebene der beiden Axen, und zieht man auf ſie die Senkrechte β′ N′, ſo iſt dieſe die Projection der zum Punkt (β, β′) gehörigen Normale. Da dieſer Punkt aber auf dem nämlichen Parallelkreis liegt wie (M, M′), ſo muß auch die zu dem letzteren gehörige Normale der Umdrehungsfläche die Axe I′ Z′ in N′ ſchneiden; es iſt mithin auch dieſe Normale beſtimmt.

Die Ebene der beiden zu dem Punkt (M, M′) gehörigen Normalen ſchneidet nun die Vertikalebene O I offenbar in der Geraden R′ N′. Fällt man nun auf dieſe aus M′ eine Senkrechte M′ θ′ ſo wird letztere die Vertikalprojection der geſuchten Tangente ſein. Nun konnte man auch auf der horizontalen Grundebene die Spur der Normalebene ſuchen, welche durch die drei bekannten Punkte (M′, M), (R′, O), (N′, N) geht; kürzer aber iſt es, dieſe Spur auf der Horizontalebene D′ E′ zu beſtimmen, in welcher der Punkt (M, M′) liegt. Verlängert man nämlich R′ N′, bis ſie dieſe Ebene ϱ′ ſchneidet und projicirt dieſen Punkt in ϱ, ſo iſt die Gerade ϱ M offenbar die geſuchte Spur; zieht man nun auf dieſe eine Senkrechte M θ, ſo iſt ſolche die Horizontalprojection der Tangente an der Durchſchnittscurve beider Umdrehungsflächen.

Fünfter Abschnitt.

Berührungsebenen, bei welchen der Berührungspunkt nicht gegeben ist.

§. 346.

Die Aufgaben über Berührungsebenen, welche im zweiten Abschnitte aufgelöst wurden, setzten den Berührungspunkt auf der krummen Fläche als gegeben voraus. Es bleibt daher zur Vervollständigung dieser wichtigen Theorie noch die Auflösung solcher Aufgaben übrig, wo der Berührungspunkt nicht gegeben ist, die Berührungsebene hingegen einer von den folgenden Bedingungen entsprechen soll:

1) Die Berührungsebene soll durch einen außerhalb der krummen Fläche gegebenen Punkt gehen;
2) Sie soll mit einer gegebenen Linie parallel sein;
3) Sie soll durch eine gegebene Gerade oder durch zwei im Raume gegebene Punkte gehen;
4) Die Berührungsebene soll mit einer gegebenen Ebene parallel sein;
5) Sie soll mehrere krumme Flächen zugleich berühren.

Diese verschiedenen Bedingungen begründen die Eintheilung dieses Abschnittes in eben so viele Kapitel, in welchen übrigens von cylindrischen und conischen Flächen keine Rede mehr sein wird, da im dritten Kapitel des zweiten Abschnittes alle auf diese beiden sehr einfachen Flächenarten Bezug habenden Aufgaben vollständig abgehandelt worden sind.

Erstes Kapitel.

Berührungsebenen, welche durch einen außerhalb der krummen Fläche gegebenen Punkt gehen.

§. 347.

Es sei V der außerhalb einer beliebigen krummen Fläche S gegebene Punkt; man lege durch ihn verschiedene schneidende Ebenen in beliebiger Richtung und lasse sie z. B. alle durch eine beliebige Gerade VAD gehen, welche die krumme Fläche durchschneidet. Diese Ebenen werden die krumme Fläche in den Curven AMD, AM′D, AM″D, ... schneiden, die man nach den vorangegangenen Methoden construiren und an welche man vom Punkte V aus Tangenten VM, VM′, VM″, ... ziehen kann; so daß alle diese Geraden zusammen einen Kegelmantel bilden, der den Punkt V zur Spitze hat, und um die Fläche S so beschrieben ist, daß er sie längs der Curve MM′M″.... berührt. Denn die Berührungsebene am Punkt M″ enthält die Tangente M″T der Curve MM′M″ und zugleich auch die Seite M″V, welche, nach der Construction, die Fläche S berührt; beide Flächen haben also in M″ eine gemeinschaftliche Berührungsebene und berühren sich folglich in diesem Punkte; das Gleiche aber gilt auch für die übrigen Punkte der Linie MM′M″..... Fig. 80.

§. 348.

Um also die Aufgabe, von welcher dies Kapitel handelt, aufzulösen, darf man nur die Berührungscurve MM′M″ construiren, welche die gegebene Fläche S mit einem umschriebenen Kegel, der

in V seine Spitze hat, bildet, und hierauf durch einen beliebigen Punkt jener Curve eine Berührungsebene an S legen; diese Ebene wird sodann der Aufgabe Genüge leisten, weil sie, indem sie nothwendigerweise auch den umschriebenen Kegel berührt (§. 347), zugleich durch dessen Spitze, d. h. also durch den gegebenen Punkt V geht.

Umgekehrt wird jede durch den Punkt V an die Fläche S gelegte Berührungsebene diese in einem gewissen Punkt m berühren, und verbindet man diesen Punkt mit V durch eine Gerade Vm, so wird solche offenbar eine Tangente an S und mithin eine der Seitenlinien des umschriebenen Kegels VMM'M'' ... sein. Der Punkt m gehört mithin der Curve MM'M'' ... an, und diese ist also der geometrische Ort aller Auflösungen, welche die gegebene Aufgabe zuläßt.

Nur in dem Falle würde die Auflösung unmöglich sein, wenn es keinen umschriebenen Kegel gäbe; d. h. wenn der Punkt V eine solche Lage hätte, daß von ihm aus keine Tangenten an die verschiedenen Durchschnittscurven AMD, AM'D, AM''D ꝛc. möglich wären.

§. 349.

Hieraus folgt, daß die vorliegende Aufgabe unendlich viele Auflösungen zuläßt, den Fall ausgenommen, da die gegebene Fläche S entwickelbar ist. Denn aus §. 183 ist bekannt, daß eine solche Fläche die Umhüllung aller Lagen einer Ebene ist, die nach einem bestimmten Gesetze, das nur Eine willkürliche Bedingung zuläßt, *) sich bewegt. Soll also diese bewegliche Ebene, welche zugleich die Berührungsebene der entwickelbaren Fläche ist, noch durch den gegebenen Punkt V gehen, so kann sie keine andere Lage mehr annehmen, oder sie wird sich wenigstens auf eine gewisse bestimmte Zahl von Lagen beschränken, je nach der Art und Zahl der Flächenmäntel. Für die entwickelbaren Flächen wird also die Aufgabe: eine Berührungsebene zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt gehe, zu einer vollkommen bestimmten, **) wie solches schon bei den Kegel- und Cylinderflächen (§. 116 und §. 123) sich zeigte.

§. 350.

Da ferner eine entwickelbare Fläche von ihrer Berührungsebene nach der ganzen Länge einer und derselben Erzeugungslinie berührt wird (§. 177), so folgt, daß, wenn man hier die im §. 347 erwähnten Durchschnitte anwenden, und aus V Tangenten an dieselben ziehen wollte, alsdann alle Berührungspunkte in Einer Geraden der Fläche liegen müßten; statt des unbeschriebenen Kegels erhielte man also eine oder mehrere durch V gehende Berührungsebenen.

§. 351.

Die Aufgabe: durch einen Punkt V eine Berührungsebene an eine nicht entwickelbare Fläche zu legen, wäre bestimmt, wenn noch die Bedingung hinzukäme, daß der Berührungspunkt jener Ebene mit der Fläche S auf einer gegebenen Curve liegen müsse, z. B. auf einem Meridian oder einem Parallelkreis von bestimmter Lage; denn man dürfte alsdann, nachdem man die Berührungscurve MM'M'' ... des um S beschriebenen Kegels construirt hätte, nur untersuchen, in welchen Punkten sie die gegebene Curve durchschnitte: diese Punkte

*) Oder, deren Gleichung nur Eine willkürliche Constante zuläßt; die Bedingung aber, daß die Ebene durch den Punkt V gehen solle, bestimmt ihre Lage vollkommen.

**) Die Ausnahme, welche hierin die entwickelbaren Flächen machen, erstreckt sich nicht auch auf windschiefe Flächen. Denn es wird sich zeigen, daß bei diesen jede Ebene, welche man durch V und eine geradlinige Erzeugende legt, die windschiefe Fläche in einem gewissen Punkte, den man construiren muß, berührt; verbindet man daher diesen Berührungspunkt mit V, so erhält man zugleich eine der Seiten des umschriebenen Kegels, der hier wie bei andern Flächen stattfindet.

wären offenbar die Berührungspunkte derjenigen Ebenen, welche der Aufgabe Genüge leisteten. Unmöglich würde die Auflösung, wenn die auf der krummen Fläche gegebene Curve keinen Punkt mit der Linie MM'M'' ... gemeinschaftlich hätte.

§. 352.

Die Construction der Berührungslinie einer gegebenen Fläche S mit einem umschriebenen Kegel, der seine Spitze in dem gegebenen Punkt V hat, ist sehr nützlich in der Perspective, weil jene Curve offenbar nichts anderes ist, als der sichtbare Umriß der Fläche S für den Augpunkt V. Da jedoch die allgemeine Methode des §. 347, nach welcher diese Construction geschehen müßte, ziemlich mühsame graphische Operationen erfordert, so sollen im Folgenden andere, einfachere Mittel angegeben werden, welche jedoch nur auf gewisse besondere, am häufigsten vorkommende Flächenarten anwendbar sind. Als Vorbereitung hiezu dient folgender wichtige Lehrsatz über Berührungscurven an allen Flächen vom zweiten Grade.

§. 353.

Lehrsatz. Die Berührungscurve, welche eine Fläche vom zweiten Grade mit dem umschriebenen Kegel bildet, ist immer eben, und ihre Ebene ist parallel mit der Diametralebene, welche dem durch die Spitze des Kegels gehenden Durchmesser conjugirt ist.

Beweis. Es sei V die Spitze des Kegels und S die Fläche vom zweiten Grade, von der es sich handelt; sie sei fürs Erste von der Art, daß sie einen Mittelpunkt O zulasse, also ein Ellipsoid oder eines der beiden Hyperboloide. Legt man nun durch die Gerade VO verschiedene schneidende Ebenen, so erhält man die Curven ABD, AB'D, AB''D ꝛc. vom zweiten Grade, welche alle den gemeinschaftlichen Durchmesser OA haben, und schneidet man sie durch die Diametralebene BB'C, welche mit OA conjugirt ist, d. h. welche alle mit OA parallelen Sehnen der Fläche halbirt, so erhält man die Geraden OB, OB', OB'', ... welche die in jenen Curven parallel mit OA gezogenen Sehnen ebenfalls halbiren. Die Linien OA und OB, OA und OB', OA und OB'', ... sind also — je zwei — conjugirte Durchmesser in den verschiedenen Curven ABD, AB'D, AB''D ꝛc. vom zweiten Grade. Fig. 80.

Man ziehe nun an eine dieser Curven eine Tangente VM und lege hierauf durch den Berührungspunkt M eine Parallelebene mit BB'C: diese neue Ebene schneidet die Fläche S in einer Curve MM'N, und die Curven ABD, AB'D, AB''D, ... in den Ordinaten PM, PM', PM'', ... welche beziehlich parallel sein werden mit OB, OB', OB''. Zieht man hierauf durch die verschiedenen Punkte M', M'' ꝛc. Tangenten an die Curven AM'D, AM''D, ... so müssen diese Tangenten in demselben Punkt V der Geraden OA zusammentreffen, von welchem aus die erste Tangente MV gezogen wurde. Denn es ist bekannt, daß bei jeder auf zwei conjugirte Durchmesser bezogenen Curve zweiter Ordnung die Subtangente einzig von der Absziſſe des Berührungspunktes und von dem Durchmesser, auf welchem die Absziſſe genommen ist, abhängt; nun hat, für die verschiedenen Punkte M, M', M'', ... welche derselben Absziſſe OP entsprechen, die Subtangente den gemeinschaftlichen Werth:

$$PV = \frac{\overline{OA}^2}{OP} - OP; \text{ woraus } OV = \frac{\overline{OA}^2}{OP}$$

sich ergibt; mithin bilden alle nach M, M', M'', ... gezogenen Tangenten einen um die Fläche S beschriebenen Kegel, dessen Berührungslinie die ebene Curve MM'M''N sein wird, die parallel ist mit der diametralen und zu VO conjugirten Ebene BB'C.*) Dieser Durchmesser VO enthält aber auch zugleich den Mittelpunkt P der Curve MM'M'', ... wie sogleich gezeigt werden wird.

*) In dem besondern Falle, da die Fläche eine Kugel ist, wird die Berührungscurve des umschriebenen Kegels ein kleiner

§. 354.

Bei jeder Fläche vom zweiten Grad sind die verschiedenen Durchschnitte, welche von parallelen Ebenen gemacht werden, **ähnliche** Curven, deren Mittelpunkte in dem Durchmesser liegen, welcher mit derjenigen von jenen Ebenen, die durch den Mittelpunkt der Fläche geht, conjugirt ist.

Denn was auch MM'M''N für ein ebener Schnitt sein mag, so kann man immer durch den Mittelpunkt O eine ihm parallele Ebene BB'B''C legen, und zu letzterer den conjugirten Durchmesser OA construiren. Alsdann haben die Curven ABD, AB'D, AB''D ꝛc. zu conjugirten Durchmessern beziehlich die Linien OA und OB, OA und OB', OA und OB''; nun sind die Ordinaten PM, PM', PM'', ... welche einer und derselben Absisse OP entsprechen, den Durchmessern OB, OB', OB'' proportional, und mithin erfüllen diese Geraden, welche man als parallele Leitstrahlen der Curven MM'N und BB'C betrachten kann, die allgemeine Bedingung der Aehnlichkeit. Und da der Punkt O der Mittelpunkt der Curve BB'C ist, so muß nothwendig auch P der Mittelpunkt der Curve MM'N sein; mithin liegen die Mittelpunkte der mit der Diametralebene BB'C parallelen Schnitte auf dem mit dieser Ebene conjugirten Durchmesser OA.

§. 355.

Der Lehrsatz des §. 353 wurde für solche Flächen bewiesen, welche einen Mittelpunkt haben; um ihn nun auch auf solche Flächen auszudehnen, welche keinen haben, d. h. auf die beiden Paraboloide, kann der Beweis
§. 81. folgendergestalt modifizirt werden. Durch den gegebenen Punkt V lege man eine Gerade VX' parallel mit der Hauptaxe OX des Paraboloids; so ist die Gerade VX' hier ebenfalls ein Durchmesser der Fläche und die verschiedenen schneidenden Ebenen, welche man durch diesen Durchmesser legt, bilden die **parabolischen Schnitte** AME, AM'E', AM''E'', ... Man ziehe nun an einen dieser letzteren die Tangente V'M und lege durch den Berührungspunkt M, parallel mit der Berührungsebene des Paraboloids in A, eine Ebene MM'M''N, welche die Parabeln in den Ordinaten MP, M'P, M''P, ... schneiden wird, die beziehlich parallel sind mit den Tangenten AT, AT', AT'', ... dieser Curven. Nun ist bekannt, daß, für solche Ordinaten, die Subtangente beständig das Doppelte der gemeinschaftlichen Absisse AP ist; folglich werden alle die Tangenten an M, M', M'' durch einen und denselben Punkt V gehen, und somit einen umschriebenen Kegel bilden, der das Paraboloid längs der ebenen Curve MM'M''N berührt. Ueberdieß sieht man auch, daß die Ebene dieser Curve **parallel ist mit der Berührungsebene** in A, welche hier die Stelle der diametralen, und mit VX' conjugirten Ebene vertritt; denn letztere ist unendlich weit entfernt. Uebrigens ist in dem Ellipsoid der Fig. 80. die Berührungsebene in A ebenfalls parallel mit BB'B''C, und folglich auch mit der Ebene der Berührungscurve MM'M''N; aber es wurde dort jene Berührungsebene deshalb nicht angewendet, weil sie in den Hyperboloiden für den Fall nicht mehr existirt, wenn der Durchmesser VO die Fläche nicht trifft.

§. 356.

Aufgabe 1. Die Berührungscurve einer Umdrehungsfläche mit einem umschriebenen Kegel, dessen Spitze gegeben ist, zu finden.

§. 84. Es sei (O, I'Z') die Umdrehungsaxe, die als vertikal angenommen wird, und (X'C'Y'A, CD) der

---

Kreis, dessen Ebene senkrecht steht auf der Geraden VO, welche den Mittelpunkt der Kugel mit der Spitze des Kegels verbindet. Dieses läßt sich übrigens direct erweisen, wenn man einen größten Kreis und seine durch V gehende Tangente sich um VO drehen läßt.

auptmeridian der Umdrehungsfläche. Dieſer Meridian iſt hier eine Ellipſe, von deren Hauptdurchmeſſern einer it der Umdrehungsaxe zuſammenfällt; aber das nachfolgende Verfahren iſt ganz allgemein und läßt ſich auf den andern Meridian anwenden. Es ſei ferner (V, V′) die gegebene Spitze des umſchriebenen Kegels; nun nn die Curve X′M′Y′, nach welcher er das Ellipſoid berühren wird, dadurch beſtimmt werden, daß man ent- eder alle diejenigen ihrer Punkte conſtruirt, welche ſich auf den Parallelkreiſen der Umdrehungsfläche befinden, er diejenigen, welche auf den verſchiedenen Meridianen liegen: es finden alſo zwei Auflöſungsmethoden ſtatt, n denen jede für ſich der Aufgabe Genüge zu leiſten vermag.

§. 357.

Erſte Auflöſung vermittelſt der Parallelkreiſe. Es ſei (E′F′, EMF) ein auf der Umdrehungs- äche S willkürlich gewählter Parallelkreis; denkt man ſich nun einen durch die Umdrehung der Tangente E′Z′ m die Axe I′Z′ erzeugten ſenkrechten Kegel, ſo muß dieſer die Fläche S längs des Kreiſes E′F′ berühren, und lſo wird jede durch (V, V′) an dieſen Kegel gelegte Berührungsebene, die Fläche S in demjenigen Punkte rühren, in welchem die Berührungsſeite den Kreis E′F′ ſchneidet. Dieſer Punkt wird alſo der geſuchten Curve ′M′Y′ angehören, welche nach §. 348 nichts anderes iſt, als **der Ort der Berührungspunkte aller der erſchiedenen Ebenen, welche, durch (V, V′) gehend, den Kegel berühren.**

§. 358.

Es handelt ſich alſo darum, eine Ebene zu finden, welche durch (V, V′) geht und zugleich den Kegel ′E′F berührt; nun könnte man (§. 123) zu dieſem Zwecke die Spitze (Z′, O)*) mit (V, V′) durch eine Gerade rbinden, hierauf den Punkt ſuchen, in welchem dieſe Gerade die Horizontalebene E′F′ ſchneidet, und durch dieſen unkt Tangenten an den Kreis (E′F′, EMF) ziehen. Da aber, wie es hier der Fall iſt, die Spitze (Z′, O) i unbequemer Entfernung liegen kann, und da überdieß die Lage des Punktes, von welchem aus die Tangenten a die Grundlinie des Kegels gezogen werden ſollen, ſich von einem Parallelkreis zum andern verändert, ſo iſt s beſſer, folgendes Verfahren anzuwenden, durch welches die erwähnten Unbequemlichkeiten gehoben werden.

Man nehme als Grundlinie des ſenkrechten Kegels den Kreis (G′H′, GPH), in welchem jener durch die orizontalebene V′G′H′ geſchnitten wird. Da nun der gegebene Punkt (V, V′) in der Ebene dieſer neuen rundlinie liegt, ſo bedarf man der Spitze des Kegels nicht mehr, ſondern darf nur an die neue Grundlinie angenten aus (V, V′) ziehen, und da es ſich überdieß nur um die Berührungspunkte dieſer Tangenten handelt, darf man nur über VO, als einem Durchmeſſer, eine Kreislinie, beſchreiben, welche den Kreis GPH in den unkten P und Q ſchneiden wird, ſo daß alſo OP und OQ offenbar die Horizontalprojectionen derjenigen Seiten in werden, in welchen die durch (V, V′) gehenden Berührungsebenen den ſenkrechten Kegel berühren. Verlän- ert man daher OP und OQ bis zu dem gegebenen Parallelkreis EMF, ſo werden die Punkte M und N, und re Projectionen auf E′F′, nämlich M′ und N′, zwei Punkte der Berührungscurve beſtimmen, welche die Um- ehungsfläche S mit dem umſchriebenen Kegel, deſſen Spitze (V, V′) iſt, bildet (§. 357).

§. 359.

Um nun auch diejenigen Punkte dieſer Curve zu finden, welche auf andern Parallelkreiſen liegen, kann an auf ähnliche Weiſe verfahren, und **die um VO als Durchmeſſer beſchriebene Kreislinie dient für lle folgenden Conſtructionen**, weil die Tangenten der Grundlinie jedes andern ſenkrechten Kegels ebenfalls

*) Die drei, durch Z′ bezeichneten Punkte der Fig. 84. ſollen den einzigen Punkt darſtellen, in welchem die Tangente E′Z′ die Vertikalaxe ſchneidet; dieſer Punkt iſt die Spitze des ſenkrechten Kegels, fällt aber hier über die Tafel der Figur hinaus.

von (V, V') ausgehen müssen. Nimmt man z. B. den Parallelkreis (E'''F''', EMF), der dem vorigen gleich ist, so muß man die Tangente E'''G''' ziehen, welche, indem sie sich um die vertikale Axe dreht, einen senkrechten Kegel beschreibt, dessen Grundlinie in Beziehung auf die Horizontalebene V'G', der Kreis (G'''H''', G''P''H'') ist; da nun dieser durch den Kreis VO in zwei Punkten P'' und Q'' geschnitten wird, so sind die Halbmesser OP'' und OQ'' die Horizontalprojectionen derjenigen Seiten, in welchen der senkrechte Kegel G'''E'''F'''H''' von den durch (V, V') gehenden Berührungsebenen berührt wird; verlängert man also wieder jene Halbmesser bis zu ihrem Durchschnitt mit dem Parallelkreis (EMF, E'''F'''), so erhält man auf letzterem die Punkte (M'', M''') und (N'', N'''), welche der gesuchten Berührungscurve angehören.

§. 360.

§. 84. **Zweite Auflösung durch Meridiane.** Um diejenigen Punkte dieser Curve zu finden, welche auf irgend einem Meridian $\alpha O \beta$ liegen, denke man sich in allen Punkten des letzteren Senkrechte auf seine Ebene errichtet, welche zusammen einen horizontalen Cylinder bilden werden, der längs jener Meridiancurve um die Fläche S. beschrieben ist. Legt man also durch (V, V') eine Berührungsebene an diesen Cylinder, so wird solche auch das Ellipsoid berühren, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem sie die Grundlinie des Cylinders berührt; folglich wird dieser Punkt der gesuchten Curve angehören, welche der Ort aller Berührungspunkte des Ellipsoids mit den durch (V, V') gehenden Berührungsebenen ist (§. 348).

Um aber diese Berührungsebene an den horizontalen Cylinder zu construiren, muß man (nach §. 116) durch (V, V') eine Parallele mit den Seiten desselben, d. h. eine Gerade ziehen, welche senkrecht auf der vertikalen Ebene $\alpha O \beta$ ist, in welcher die Grundlinie des Cylinders liegt; hierauf muß man aus P''', in welchem Punkte jene Gerade die Meridianebene $\alpha O \beta$ schneidet, eine oder mehrere Tangenten an jene Grundlinie ziehen. Um aber dieses zu können, klappe man den Meridian $\alpha O \beta$, und eben so auch den Punkt P''' auf die Vertikalebene auf; letzterer wird in (H'', H''') zu liegen kommen, und zieht man nun die Tangenten H'''φ' und H'''F''', so erhält man auf der aufgeklappten Grundlinie des Cylinders die Berührungspunkte (φ', φ) und (F''', F), aus welchen man, wenn man sie durch horizontale Kreisbögen auf den ersteren Meridian $\alpha O \beta$ bezieht, die wahren Lagen (ψ, ψ') und (M'', M''') jener Berührungspunkte findet.

§. 361.

Der letztere Punkt fällt mit einem von denen zusammen, welche durch die **Methode der Parallelkreise** gefunden wurden, und zwar aus dem Grunde, weil die Meridianebene $\alpha O \beta$ so angenommen wurde, daß sie den bereits construirten Punkt (M'', M''') enthielt; diese Lage des Meridians $\alpha O \beta$ wurde aber deshalb gewählt, um zu zeigen, daß, wenn auch beide Constructionsmethoden sich auf sehr verschiedene Betrachtungen gründen, sie dennoch **dieselben graphischen Operationen, nur in umgekehrter Ordnung, erheischen**, wie solches aus der Construction des Punktes (M'', M''') ersehen werden kann. Welcher von diesen beiden Methoden man sich aber auch bedienen mag, so gibt es einzelne Punkte, die man direct erhalten kann, und mit deren Construction man am Besten den Anfang macht.

§. 362.

Punkte auf den sichtbaren Umrissen. Was diejenigen unter diesen Punkten betrifft, welche auf dem Aequator (C'D', CLD) liegen, so ist klar, daß die ihnen entsprechenden Berührungsebenen des Ellipsoides vertikal sein müssen, daher denn auch ihre horizontalen Spuren die durch den Punkt V gehenden Tangenten VL und VK sein werden. Da nun die Berührungspunkte L und K ihrer Horizontalprojection nach bestimmt sind durch den Durchschnitt des Kreises CLD mit derjenigen Kreislinie, deren Durchmesser VO ist, so darf man nur L und K auf C'D',

L′ und K′ projiciren. Weil aber dieſe Punkte in Beziehung auf die Horizontalebene auf dem ſichtbaren Umriſſe der Umdrehungsfläche liegen, ſo bilden ſie die Grenzen zwiſchen dem ſichtbaren Bogen LMXK und dem unſichtbaren LM″YK der Horizontalprojection. Dieſe beiden Bögen unterſcheidet man leicht von einander, wenn man unterſucht, ob ein Punkt (M, M′) derſelben vor oder hinter dem Aequator C′D′ liegt.

Ferner ſind die Berührungsebenen derjenigen Punkte des Ellipſoids, welche auf dem Hauptmeridian X′C′Y′D, CD) liegen, ſenkrecht auf der Vertikalebene (§. 129); ihre Spuren, welche durch V′ gehen, ſind alſo die beiden Tangenten V′X′ und V′Y′, deren Berührungspunkte*) X′ und Y′ auf CD in X und Y projicirt ſind. Da nun dieſe Punkte auf dem ſich auf die Vertikalebene beziehenden ſichtbaren Umriſſe der Umdrehungsfläche liegen, ſo ſcheiden ſie den ſichtbaren Bogen X′M′Y′ von dem unſichtbaren X′N′Y′ der Vertikalprojection ab; der erſte dieſer Bögen aber iſt leicht vom andern zu unterſcheiden, wenn man unterſucht, ob ein Punkt (M, M′) der Curve vor oder hinter der Vertikalebene CD liegt, welche den Hauptmeridian enthält.

§. 363.

Grenzpunkte. Unter dieſen verſteht man ſolche, in welchen die Tangente an der Berührungscurve horizontal iſt, und welche mithin höher oder tiefer als alle benachbarten Punkte liegen. Offenbar können dieſe Punkte nur im Meridian VO ſich befinden, der durch die Spitze (V, V′) des umſchriebenen Kegels geht; denn das allgemeine Verfahren des §. 358, durch welches man die Punkte (M, M′) und (N, N′) erhielt, zeigt deutlich, daß die verſchiedenen Punkte der Curve zu zwei und zwei auf horizontalen Sehnen (MN, M′N′) liegen, welche alle von der Vertikalebene VO halbirt werden; liegt alſo einer von dieſen correſpondirenden Punkten in der Vertikalebene VO, ſo muß der andere eben daſelbſt liegen; beide Punkte fallen alſo in Einen zuſammen, und aus der ſie verbindenden Sehne wird eine horizontale Tangente.

Um nun die in dem Meridian VO liegenden Gränzpunkte zu beſtimmen, bemerke man, daß die Gerade, welche einen derſelben mit (V, V′) verbände, nothwendig eine Tangente am Meridian VO ſein würde, weil ſie ſich in der Ebene dieſes letztern und in der Berührungsebene des Ellipſoides zugleich befände. Man klappe daher den Meridian VO auf die Vertikalebene auf, ſo daß der Punkt (V, V′) in V″ zu liegen komme; hierauf ziehe man die Tangente V″U′ und beſtimme den Berührungspunkt U′ genau mittels ergänzender Sehnen. Dieſen Punkt projicire man auf CD in U und führe ihn durch einen horizontalen Kreisbogen in ſeine wahre Lage (R, R′) zurück. So erhält man den am tiefſten liegenden Punkt der Curve, und die Tangente U′R′ iſt die letzte von den horizontalen Parallelen, welche Punkte jener Curve enthalten.

Auf eine ähnliche Art erhält man auch den höchſten Punkt, deſſen Conſtruction jedoch, um keine Verwirrung in die Figur zu bringen, weggelaſſen wurde.

§. 364.

Da in vorliegendem Beiſpiel die Umdrehungsfläche vom zweiten Grade iſt, ſo iſt die Berührungscurve nothwendig eben (§. 353), und hier eine Ellipſe, deren eine Axe, im Raume, die Gerade (RT, R′T′) iſt; denn die Tangenten an den Endpunkten dieſer Geraden ſtehen ſenkrecht auf ihr, weil ſie auf der Vertikalebene VO ſenkrecht ſtehen (§. 363). Man könnte nun leicht auch die andere Axe und die beiden andern Scheitelpunkte der Ellipſe finden, wenn man das Ellipſoid durch eine horizontale Ebene, welche durch die Mitte von (RT, R′T′) ginge, ſchnitte. Hiebei iſt zu bemerken, daß die beiden Hauptdurchmeſſer der Ellipſe im Raume zugleich auch die Axen der Horizontalprojection RLTK bleiben werden; denn da der eine von ihnen horizontal iſt,

*) Es iſt hinreichend, die Tangenten vermittelſt eines Lineals zu ziehen, das man an V′ und den Meridian berührend anlegt; hierauf aber müſſen die Berührungspunkte genau beſtimmt werden, was z. B. durch ergänzende Sehnen geſchehen kann.

so bleibt der Winkel, unter dem sich ihre Projectionen schneiden, ein Rechter; auf der Vertikalebene hingegen projiciren sich jene beiden Hauptdurchmesser als zwei schief auf einander stehende conjugirte Durchmesser der Curve R′L′T′K′.

§. 365.

Anmerkung. Wenn man sich erinnert, daß jede Umdrehungsfläche als die Umhüllung eines beweglichen Kegels angesehen werden kann, der jene Fläche immer längs eines Parallelkreises berührt (§. 194), oder auch als die Umhüllung eines stets um einen Meridian beschriebenen beweglichen Cylinders (§. 196); so wird man leicht bemerken, daß in den beiden Methoden der §§. 357 und 360 an die Stelle der Umdrehungsfläche immer eine umhüllte conische oder cylindrische Fläche gesetzt wurde, an welche sodann die durch (V, V′) gehende Berührungsebene leichter construirt werden konnte, als an die gegebene Fläche. Da nun die Umdrehungsflächen auch als Umhüllungen einer beweglichen Kugel, deren Halbmesser die Normale des Meridians ist, betrachtet werden können, so ergibt sich hieraus eine dritte Methode, die zwar in der Anwendung weniger Vortheil gewährt, gleichwohl aber gekannt zu werden verdient.

§. 366.

Dritte Auflösung, durch eine umhüllte sphärische Fläche.

z. 84. Mit der Normale E′ω des Meridians X′Y′D′ beschreibe man einen Kreis, der durch seine Umdrehung um die Vertikalare eine Kugel erzeugen würde, welche die Umdrehungsfläche S längs eines Parallelkreises E′F′ berührte; hierauf denke man sich um diese Kugel einen Kegel beschrieben, der seine Spitze in dem gegebenen Punkt (V, V′) habe. Die Berührungscurve dieses Hilfskegels mit der Kugel ist ein kleiner Kreis (s. die Note zu §. 353), dessen Ebene senkrecht auf der Geraden (V′ω, VO) steht; und da Umdrehungsfläche und Kugel in denjenigen Punkten, in welchen dieser kleine Kreis den Parallelkreis E′F′ schneidet, gemeinschaftliche Berührungsebenen haben, so folgt daraus, daß eben diese Punkte der gesuchten Curve X′M′Y′ angehören müssen. Läßt man nun die Kugel und den um sie beschriebenen Kegel sich gleichzeitig um die Vertikale O drehen, bis die Axe (V′ω, VO) des Kegels mit der Vertikalebene parallel geworden, so wird die Spitze (V, V′) in die Lage V″ kommen; und zieht man die Tangenten V″γ und V″δ, so stellt die Sehne γδ die Projection des Kreises dar, in welchem Kugel und Kegel sich berühren. In dieser Lage nun schneidet dieser Berührungskreis den Parallelkreis E′F′ in zwei Punkten, welche zugleich die Endpunkte der vertikal in ε′ projicirten Sehne sind; und da die Entfernung dieser Sehne von der Umdrehungsaxe sich nicht ändert, wenn man Kugel und Kegel in ihre erste Lage zurückführt, so ist klar, daß, wenn man den Punkt ε′ durch einen Kreisbogen auf den Meridian VO in ε zurückträgt und durch letzteren Punkt eine senkrechte Sehne auf VO zieht, alsdann die Durchschnitte dieser Sehne mit dem Parallelkreis EMF die gesuchten Punkte M und N liefern werden, die man nun noch auf E′F′ in M′ und N′ projiciren muß.

§. 367.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungsebene an eine Umdrehungsfläche zu legen, welche letztere in einem gegebenen Parallelkreis berühre.

Es ist hier nicht nöthig, die Berührungscurve der Umdrehungsfläche mit einem umschriebenen Kegel zu construiren, wie es in §. 351 im Allgemeinen gefordert wird; es ist vielmehr hinreichend, auf den gegebenen Parallelkreis die Methode des §. 357 oder des §. 366 anzuwenden, um direkt die Berührungspunkte der gesuchten Berührungsebenen zu erhalten, welche alsdann ihrer Zahl nach bestimmt, und leicht zu construiren sind (§. 132).

§. 368.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungsebene an eine Umdrehungsfläche zu legen, welche letztere in einem gegebenen Meridian berühre.

Auch die Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich unmittelbar, wenn man auf den gegebenen Meridian die Methode des §. 360 anwendet. Man erhält dadurch die Berührungspunkte der gesuchten Berührungsebenen, die alsdann leicht zu construiren sind (§. 132).

§. 369.

Aufgabe 4. Die Berührungscurve irgend einer beliebigen Fläche vom zweiten Grade mit einem umschriebenen Kegel, dessen Spitze gegeben ist, zu construiren.

Auflösung. Als Beispiel diene ein Ellipsoid von drei ungleichen Axen, zu welchem man die Projec- Fig. 85.
tionsebenen so wählt, daß sie mit zweien von den drei Hauptebenen jenes Körpers parallel sind. Alsdann stellen die Ellipsen (ABDE, A′D′) und (A′C′D′F′, AD), von denen jede zwei Axen mit dem Ellipsoid gemein hat, die sichtbaren Umrisse des letzteren dar; und bezeichnet (V, V′) die Spitze des umschriebenen Kegels, so sollen nun diejenigen Punkte der Berührungscurve bestimmt werden, welche sich auf irgend einem horizontalen Schnitte G′H′ befinden. Dieser Schnitt ist eine der ABDE ähnliche Ellipse, welche G′H′ zu einem ihrer Hauptdurchmesser hat. Betrachtet man sie nun als die Grundlinie eines Hilfskegels, der seinen Scheitel im Punkt T′ hat, in welchem die vertikale Axe der Fläche von der Tangente G′T′ geschnitten wird, so ist T′G′H′ der um das Ellipsoid beschriebene Kegel. Denn alle durch die Vertikale (O, O′T′) gelegten Ebenen bilden mit der gegebenen Fläche elliptische Schnitte, die alle eine gemeinschaftliche Axe (O, C′F′) haben; da ferner alle auf G′H′ liegenden Punkte dieser Ellipsen eine und dieselbe Abszisse O′I′ haben, so ist auch ihre Subtangente beständig gleich I′T′, d. h. die Tangenten an allen in G′H′ liegenden Punkten jener vertikalen Ellipsen gehen alle durch den Punkt T′ und bilden also zusammen den umschriebenen Kegel T′G′H′. Legt man nun an diesen Hilfskegel eine durch (V, V′) gehende Berührungsebene, so wird die Berührungsseite die Grundlinie G′H′ in einem Punkte schneiden, welcher der gesuchten Curve angehört. Denn da in diesem Punkte die durch (V, V′) gehende Berührungsebene des Hilfskegels das Ellipsoid berührt, so entspricht er vollkommen dem Merkmal der Berührungscurve (§. 348), welche die gegebene Fläche mit dem umschriebenen Kegel bildet, dessen Scheitel in (V, V′) ist.

§. 370.

Um nun durch (V, V′) eine Berührungsebene an den Kegel T′G′H′ zu legen, verlängere man letzteren bis zur Horizontalebene A″D″, die man so gewählt hat, daß sie den Kegel in einer Ellipse schneidet, welche der durch die Aufgabe gegebenen ABDE gleich ist. Diesen Schnitt (A″D″, ABDE) betrachte man als Grundlinie des Kegels, verbinde dessen Spitze mit dem Punkt (V, V′) durch eine Gerade (V′T′R′, VOR) und suche die Spur dieser letzteren mit der Ebene A″D″; endlich ziehe man aus R zwei Tangenten RP und RQ an die Ellipse ABDE.

Nachdem man nun die Berührungspunkte dieser Tangenten genau bestimmt hat (z. B. durch ergänzende Sehnen) ziehe man die Halbmesser OP und OQ, so werden diese die Horizontalprojectionen der Berührungsseiten sein, aus welchen man leicht die Vertikalprojectionen T′P′ und T′Q′ erhält. Letztere nun schneiden die Ellipse G′H′ in den Punkten M′ und N′, welche, in Verbindung mit den Horizontalprojectionen M und N, zwei solche Punkte der gesuchten Curve bestimmen, welche auf dem horizontalen Schnitte G′H′ des Ellipsoids liegen.

Die Punkte M und N hätte man auch unmittelbar finden können, wenn man H′ in H projicirt und durch

letzteren Punkt die Linien HM und HN parallel mit den Sehnen DP und DQ gezogen hätte; denn in ähnlichen Ellipsen, wie G'H' und A"D" sind die Leitstrahlen OM und OP den Halbaxen OH und OD proportionirt.

§. 371.

Für jeden andern horizontalen Schnitt als G'H' kann man auf ähnliche Art verfahren; sollte es sich aber zutragen, daß die Spitze T' des Hilfskegels in eine unbequeme Entfernung fiele, so könnte man zur Grundlinie dieses Kegels den Schnitt K'L' nehmen, welchen die durch (V, V') gelegte Horizontalebene bildet; alsdann dürfte man nur durch letzteren Punkt Tangenten an die Ellipse K'L' ziehen. Diese Tangenten aber sind, so wie auch ihre Berührungspunkte, sehr leicht zu bestimmen, ohne daß man nöthig hätte, die Curve selbst zu construiren, wenn man nur ihre Axen kennt, welche proportionirt sind, mit AD und BE, und deren eine K'L' ist. Im §. 374 wird bei einem ähnlichen Falle, diese Construction vorgenommen werden.

§. 372.

Punkte, welche auf den sichtbaren Umrissen liegen. Man bestimmt sie eben so wie in der vorigen Aufgabe (§. 362), indem man an den sichtbaren Umriß des Ellipsoides auf der Vertikalebene die Tangenten V'X' und V'Y' zieht und die Berührungspunkte X' und Y' auf AD in X und Y projicirt. Eben so erhält man durch die Tangenten Vx und Vy am sichtbaren Umriß auf der Horizontalebene zwei Punkte x und y, die man auf A'D' in x' und y' projiciren muß. Diese Punkte zeigen auf beiden Grundebenen den Uebergang von den sichtbaren zu den unsichtbaren Bögen der Berührungscurve an.

§. 373.

Fig. 85. Die Grenzpunkte, d. h. solche Punkte, in welchen die Tangente an der Curve horizontal ist, müssen nothwendig in der Vertikalebene VO liegen. Denn aus dem allgemeinen Verfahren, das die Punkte P und Q, oder M und N lieferte, erhellt, daß die Punkte der Berührungscurve zu zwei und zwei auf horizontalen Sehnen (MN, M'N') liegen, welche dem zu OR gehörigen conjugirten Durchmesser in der Ellipse ABDE parallel sind; mithin wird jede dieser Sehnen durch die Vertikalebene VOR halbirt. Liegt also einer dieser correspondirenden Punkte in der Ebene VOR, so muß der andere gleichfalls daselbst liegen; und die Sehne, zu welcher beide Punkte gehören, wird eine — horizontale — Tangente.

§. 374.

Um nun diese Punkte, deren Höhe ein Maximum oder Minimum ist, zu construiren, darf man offenbar nur aus (V, V') zwei Tangenten an die Durchschnittscurve ziehen, welche die Vertikalebene VOR mit dem Ellipsoid bildet. Dieser Durchschnitt ist eine Ellipse, deren Halbaxen O'C' und Oα sind; und klappt man sie auf die Vertikalebene auf, so wie auch den Punkt (V, V'), der in die Lage (V") kommen wird, so darf man nur von letzterem aus zwei Tangenten an eine Ellipse ziehen, deren Halbaxen O'C' und O'α' sind; dieses läßt sich ausführen, ohne daß man nöthig hätte, die Curve erst zu zeichnen. Denn nachdem man die Brennpunkte φ und ψ derselben construirt hat, beschreibe man einen Kreisbogen mit dem Halbmesser V"φ, und einen zweiten Bogen aus ψ mit einem Halbmesser, welcher der großen Axe der Ellipse gleich ist; diese beiden Kreisbögen werden sich in den Punkten β und γ schneiden, und bekanntlich ist alsdann die durch die Mitte des Bogens $\varphi\beta$ gezogene Linie V"δ die gesuchte Tangente, *) und δ', wo die Geraden V"δ und $\psi\beta$ sich

*) Man sehe in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie die graphische Methode der Alten, um Tangenten an Kegelschnitte zu ziehen.

ſchneiden, ihr Berührungspunkt. Nun darf man alſo nur den Punkt (s, s') wieder in die Vertikalebene VO zurückführen vermittelſt eines horizontalen Kreisbogens, um den tiefſten Punkt (λ, λ') der Berührungscurve zu erhalten.

Eben ſo erhält man als zweite Tangente an derſelben Ellipſe die Gerade V''ω, welche durch die Mitte des Bogens φγ geht, und deren Durchſchnitt mit der Geraden ψγ, den Berührungspunkt (π', π) beſtimmt; dieſer in die vertikale Ebene VO zurückgeführt, gibt den höchſten Punkt der Berührungscurve.

§. 375.

Auf eine ähnliche Art könnte man auch diejenigen beiden Punkte der Curve conſtruiren, welche in der ſenkrecht auf der Vertikalebene ſtehenden Ebene V'O' liegen; denn der Durchſchnitt, welchen die ſchneidende Ebene V'O' mit dem Ellipſoid bildet, iſt eine Ellipſe, deren Axen leicht zu finden ſind; um aber die Figur durch zu viele Linien nicht undeutlich zu machen, bleibt dieſe weitere Conſtruction, welche der vorigen ganz ähnlich iſt, dem Leſer überlaſſen.

§. 376.

Schließlich iſt noch zu bemerken, daß das Verfahren, welches hier auf ein Ellipſoid angewendet wurde, auch auf das Hyperboloid und ſelbſt auf das Paraboloid angewendet werden kann, mit einigen leichten Modifikationen, die ſich aus der Natur der ebenen Schnitte jener Flächen ergeben.

Zweites Kapitel.

Berührungsebenen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel ſind.

§. 377.

Es ſei S irgend eine Fläche und VO die gegebene Gerade (oder vielmehr eine Linie, die mit der gegebenen Geraden parallel iſt, und durch einen im Innern der Fläche willkürlich angenommenen Punkt geht); legt man nun durch VO verſchiedene Ebenen, ſo werden ſolche die Fläche S in den Curven ABD, AB'D, AB''D, ... ſchneiden, welche letztere nach den allgemeinen Methoden des vierten Abſchnittes conſtruirt werden können; und zieht man hierauf an dieſe Durchſchnittscurven Tangenten BU, B'U', B''U'', ... parallel zu VO, ſo werden dieſe einen um S beſchriebenen Cylinder bilden, d. h. einen Cylinder, welcher die Fläche S längs der Curve BB'B''C berührt. Denn die zu irgend einem Punkt B'' gehörige Berührungsebene an S enthält offenbar nicht nur die Seite B''U'' des Cylinders, ſondern auch die Tangente B''t der Curve BB'B'', ... welche dem Cylinder als Grundlinie dient; mithin berührt jene Ebene auch den Cylinder, und dieſer berührt folglich die Fläche S ebenfalls in dem Punkte B''; das Gleiche aber gilt von allen Punkten der Linie BB'B''E. Fig. 80.

§. 378.

Um alſo an die Fläche S eine Berührungsebene zu legen, die mit einer gegebenen Geraden VO parallel ſei, darf man nur die Berührungscurve BB'C der Fläche mit einem umſchriebenen Cylinder ſuchen, deſſen Seiten parallel mit VO ſind, und hierauf die Berührungsebene an S für irgend einen der Punkte

jener Curve construiren; diese Ebene wird auch den umschriebenen Cylinder berühren und also eine seiner Seiten enthalten, die alle mit VO parallel sind; mithin wird die Ebene selbst mit VO parallel sein.

Umgekehrt: jede mit VO parallele Ebene, welche die Fläche S in irgend einem Punkte, der b heißen mag, berührt, muß nothwendig eine durch b parallel mit VO gezogene Gerade enthalten; letztere wird also eine Seite des umschriebenen Cylinders sein, und ihr Berührungspunkt b muß folglich auf der Curve BB′C liegen, welche demnach der ausschließende geometrische Ort aller Auflösungen ist, welche die gegebene Aufgabe zuläßt.

Die Aufgabe wird mithin unmöglich, wenn ein umschriebener mit VO paralleler Cylinder gar nicht existirt, was unter anderem beim Paraboloid der Fall ist, wenn die gegebene Gerade mit der Axe desselben parallel läuft; denn alsdann sind die Schnitte ABD, AB′D, ... Parabeln, welche bekanntlich keine mit ihrem Hauptdurchmesser parallele Tangenten zulassen.

§. 379.

Es geht aus diesen Betrachtungen hervor, daß die allgemeine Aufgabe, um die es sich handelt, entweder unendlich viele oder gar keine Auflösung zuläßt. Der einzige Fall ist auszunehmen, wenn S eine entwickelbare Fläche ist, weil, nach der in §. 349 gemachten Bemerkung, die bewegliche Ebene, welche eine solche Fläche erzeugt und sie zugleich berührt, dadurch, daß sie mit einer gegebenen Geraden parallel sein soll, vollkommen bestimmt ist. Für Cylinder und Kegel hat sich Dieses schon im dritten Kapitel des zweiten Abschnittes herausgestellt.

§. 380.

Die Aufgabe: an eine nicht entwickelbare Fläche S eine mit einer gegebenen Geraden parallele Berührungsebene zu legen, würde bestimmt sein, wenn noch die Bedingung hinzukäme, daß jene Ebene die Fläche in einem Punkt einer bekannten Curve berühren solle; denn alsdann würde aus dem Durchschnitt dieser Curve mit der Berührungslinie des umschriebenen Cylinders sich jener Berührungspunkt ergeben.

Für die Construction dieser Berührungslinie, welche besonders in der Theorie der Schatten von großem Nutzen ist, gibt es nur Ein allgemeines Verfahren, nämlich das in §. 377 erklärte; gewisse besondere Flächenarten aber, die sehr häufig vorkommen, lassen bequemere Constructionen zu, von denen gleich nachher die Rede sein wird. Vorher aber müssen noch einige wichtige Sätze über diejenigen Berührungscurven, welche Flächen vom zweiten Grade mit umschriebenen Cylindern bilden, erklärt werden.

§. 381.

§. 80. **Lehrsatz.** Die Berührungscurve eines um eine Fläche vom zweiten Grade umschriebenen Cylinders ist immer eben, und liegt in derjenigen Diametralebene, welche mit dem zum Cylinder parallelen Durchmesser conjugirt ist.

Beweis. Denkt man sich durch die Mitte O der Fläche S vom zweiten Grade eine Linie VO parallel mit den Seiten des Cylinders gezogen, so werden die verschiedenen Schnitte ABC, AB′D, AB″D, ... welche von den durch VO gelegten Ebenen erzeugt werden, Curven vom zweiten Grade sein, die alle den gemeinschaftlichen Durchmesser AOD haben; schneidet man nun diese Curven durch die mit AD conjugirte Diametralebene BB′C (d. h. durch eine Ebene, welche alle mit AD parallel gezogenen Sehnen halbirt), so erhält man als Durchschnitte die Geraden OB, OB′, OB″ ꝛc., von welchen jede in der entsprechenden Curve der mit OA conjugirte Durchmesser sein wird. Es werden mithin die Tangenten BU, B′U′, B″U″, ... welche man durch die Punkte B, B′, B″, ... der Durchschnittscurven zieht, alle mit OA parallel sein, und also einen m

S beschriebenen Cylinder bilden, dessen Berührungslinie BB′B″ ganz in der mit OA conjugirten Diametralebene liegt. *)

Dieser wichtige Satz kann als eine Folge des in §. 353 erwiesenen Lehrsatzes angesehen werden, wo es sich von der Berührungslinie eines um S beschriebenen Kegels VMM′N handelte; denn wenn der Scheitel V sich auf der Geraden OAV ins Unendliche entfernt, so gehen, wie leicht einzusehen ist, die Berührungspunkte M, M′, M″, ... in B, B′, B″, ... über.

§. 382.

Um den Lehrsatz des vorigen Paragraphen auch auf die beiden Paraboloide, die keinen Mittelpunkt haben, auszudehnen, denke man sich durch die Hauptaxe OX der Fläche eine Ebene EOF parallel mit der gegebenen Richtung der Cylinderseiten gelegt, und ziehe parallel mit der nämlichen Richtung eine Tangente VBU an die Parabel EOF; alsdann wird die Diametralebene, welche alle mit VBU parallelen Sehnen halbirt, offenbar durch den Berührungspunkt dieser Tangente gehen und mit der Fläche den paraboliſchen Schnitt BB′B″C bilden. Nun müssen alle durch die verschiedenen Punkte der letzteren Parabel parallel mit VBU gezogenen Geraden B′U′, B″U″, ... Tangenten an der Fläche sein; denn wäre dieses nicht der Fall, so würden ihre innern Theile, d. h. die Sehnen, nicht durch die mit VBU conjugirte Diametralebene halbirt werden. Folglich bilden alle die Geraden BU, B′U′, B″U″, ... den gesuchten umschriebenen Cylinder, und es erhellet zugleich, daß seine Berührungslinie mit der Fläche eben und immer paraboliſch sein muß. Fig. 82.

Ein ähnlicher, auf die Definition der Diametralebene selbst gegründeter Beweis, hätte auch in §. 381 geführt werden können.

§. 383.

Aufgabe. Die Berührungscurve einer Umdrehungsfläche mit einem umschriebenen und einer gegebenen Geraden parallelen Cylinder zu finden. Fig. 86.

Es sei (O, I′Z′) die Axe der Umdrehungsfläche und (E′C′E‴D′, CD) der Hauptmeridian, dessen besondere Form für die Auflösung ganz gleichgültig ist. Ferner sei (AB, A′B′) die Gerade, mit welcher der umschriebene Cylinder parallel sein soll; nun kann die Berührungscurve xmy**) dieses Cylinders mit der gegebenen Fläche construirt werden, indem man nach und nach alle Punkte derselben, wie sie entweder auf den verschiedenen Parallelkreisen oder auf den verschiedenen Meridianen liegen, sucht; hieraus aber ergeben sich folgende zwei Auflösungsarten.

§. 384.

Auflösung vermittelst der Parallelkreise. Es sei (E′F′, EmF) ein willkürlich auf der Umdrehungsfläche S angenommener Parallelkreis; denkt man sich nun den durch die Umdrehung der Tangente E′Z′ des Meridians entstandenen Kegel, so ist klar, daß solcher die Fläche längs des Parallelkreises E′F′ berühren muß, und daß also jede an diesen Kegel parallel mit (AB, A′B′) gelegte Berührungsebene die Fläche S in demjenigen Punkte berühren wird, in welchem die Berührungsseite den Parallelkreis E′F′ schneidet; dieser Punkt

*) In dem besondern Falle, da die gegebene Fläche eine Kugel ist, wird die Berührungscurve des umschriebenen Cylinders ein größter Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Richtung VO der Cylinderseiten steht. Dieses läßt sich auch direct erweisen, wenn man einen größten Kreis und seine mit VO parallele Tangente sich um die Gerade VO drehen läßt.

**) Da diese Aufgabe viele Aehnlichkeit mit der des §. 356 hat, so wurden hier kleine Buchstaben angewendet, damit man das Aehnliche leichter bemerken könne; doch wurden hier nicht, wie in Fig. 89., beide Curven zumal dargestellt.

wird also der gesuchten Curve angehören, deren besondere Eigenschaft nach §. 378 darin besteht, daß für ihrer Punkte die an S gelegte Berührungsebene parallel mit (AB, A'B') ist.

Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, an den Kegel Z'E'F' eine Berührungsebene zu legen, di der gegebenen Geraden parallel ist; damit aber die Construction nicht von der Spitze Z' des Kegels, wel unbequeme Entfernung fallen kann, abhänge, und damit man alle Tangenten nur von Einem bestimmten aus zu ziehen habe, kann das allgemeine Verfahren des §. 124 auf folgende Art abgeändert werden.

Man denke sich den senkrechten Kegel Z'E'F' und die gesuchte Berührungsebene sich selbst paral eine solche Lage gebracht, daß die Spitze Z' mit einem gewissen Punkt O' der vertikalen Axe (O, I'Z' sammenfalle. Nun ist klar, daß bei dieser Fortbewegung die Horizontalprojection der Berührungs dieselbe bleiben mußte; die horizontale Spur des versetzten Kegels aber erhält man, wenn man O'e' p mit Z'E' zieht und hierauf mit einem Halbmesser Oe = I'e' den Kreis epf beschreibt. Um nun ein (AB, A'B') parallele Berührungsebene an diesen Kegel zu legen, ziehe man, parallel mit (AB, A'B Gerade (O'a', Oa), aus deren horizontalem Fußpunkt (a, a') Tangenten an den Kreis epf gezogen müssen. Da man aber einzig die Berührungspunkte nöthig hat, so beschreibe man über Oa als einem messer eine Kreislinie, welche durch ihren Durchschnitt mit dem Kreis epf jene Punkte p und q bestimm Halbmesser Op und Oq sind alsdann die Horizontalprojectionen der Berührungsseiten, in welchen die ge Berührungsebenen den Kegel berühren; diese Seiten aber schneiden den Parallelkreis (EmF, E'F'), d. Grundlinie des Kegels in seiner ersten Lage, in den Punkten (m, m') und (n, n'); daher denn diese Pun gesuchten Berührungscurve angehören müssen.

§. 385.

Die auf andern Parallelkreisen liegenden Punkte dieser Curve lassen sich auf eine ähnliche Art const indem man stets die Scheitel der um jene Parallelkreise beschriebenen senkrechten Kegel in den Punkt O' v wobei die um den Durchmesser Oa beschriebene Kreislinie für alle noch folgenden Constr nen benützt werden kann.

Es ist aber von großem Vortheil, diejenigen Punkte unmittelbar zu suchen, welche auf dem mi gleichen Parallelkreis E'''F''' liegen, besonders wenn die ober- und unterhalb der Horizontalebene C'D' den Theile der Meridiancurve symmetrisch sind, wie es in Fig. 86. der Fall ist; denn alsdann braucht es neuen Constructionen. Denkt man sich nämlich den um den Parallelkreis E'''F''' beschriebenen Kegel Z'''E so ist einleuchtend, daß seine Seiten mit denen des Kegels Z'E'F' beziehlich parallel sein müssen; versetz ihn also nach der vorigen Regel in den Punkt O', so wird er ganz mit dem Kegel O'e'f' zusammenfalle da nun alle ferneren Operationen wieder die nämlichen werden, wie vorhin, so kann man hieraus schließe die Berührungsseiten mit den gesuchten Berührungsebenen ebenfalls wieder in Op und Oq horizontal p seien, und daß also ihr Durchschnitt mit dem Kreis EmF die gesuchten Punkte liefern müsse. Aber wahre Lage der Punkte m'' und n'' zu erhalten, muß man hier jene Radien Op und Oq verlängern, un auf m'' und n'' auf den Parallelkreis E'''F''' in m''' und n''' projiciren. Dieser Unterschied des Vers rührt daher, weil letzterer Parallelkreis auf dem obern Mantel des Kegels Z'''E'''F''' liegt, währe Kreis opf, an welchen die Tangenten ap und aq gezogen werden, dem untern Mantel des in die Lage versetzten Kegels angehörte.

§. 386.

ig. 86. Auflösung vermittelst der Meridiankreise. Um diejenigen Punkte der fraglichen Curve zu er welche auf einem gegebenen Meridian $\alpha O \beta$ liegen, denke man sich durch alle Punkte dieses letzteren Se

ſeine Ebene errichtet, welche zuſammen einen horizontalen Cylinder bilden werden, der offenbar um die Fläche beſchrieben iſt und ſie längs jenes Meridians berührt. Legt man nun an dieſen Hilfscylinder eine mit (AB, B′) parallele Berührungsebene, ſo wird ſolche die Fläche S in demjenigen Punkte berühren, in welchem ſie Meridian $\alpha\beta$, d. h. die Grundlinie des Cylinders, trifft. Dieſer Punkt gehört folglich der geſuchten Curve welche nach §. 378 der geometriſche Ort aller Berührungspunkte ſolcher Berührungsebenen S iſt, welche mit (AB, A′B′) parallel ſind.

Um nun dieſe Berührungsebene an den horizontalen Hilfscylinder zu erhalten, ziehe man die Gerade a, O′a′) parallel mit (AB, A′B′) und fälle aus ihrem Fußpunkt (a, a′) eine Senkrechte ap auf die Verlebene $\alpha O\beta$ (§. 117); verbindet man hierauf den Punkt p mit (O, O′) durch eine Gerade, ſo zeigt dieſe Richtung, nach welcher man eine Tangente an den Meridian $\alpha\beta$, als Grundlinie des gegebenen Cylinders, en muß. Um aber dieſe Conſtruction ausführen zu können, klappe man den Meridian und die Gerade, che p und (O, O′) verbindet, auf die Vertikalebene auf; dadurch kömmt der Punkt p in die Lage des Punktes e′), und die Gerade pO in die Lage (O e, O′e′); zieht man daher parallel mit dieſer eine Tangente Z′E′ den Hauptmeridian und führt den Berührungspunkt (E, E′) durch einen Kreisbogen auf den Meridian $O\alpha$ ück, ſo erhält man den geſuchten Punkt (m, m′).

Da man an den Hauptmeridian noch eine zweite Tangente parallel mit O′e′ ziehen kann, ſo gibt es alſo h einen zweiten Berührungspunkt (F‴, F), der, auf den Meridian $\alpha O\beta$ zurückgeführt, einen neuen, der geten Curve zugehörigen, Punkt liefert.

§. 387.

Die beiden hier gefundenen Punkte hatte man ſchon vorher durch das andere Verfahren erhalten, weil der ridian $\alpha O\beta$ ſo gewählt worden, daß er durch eben dieſe Punkte ging; und es erhellet hieraus der bemerkenswerthe Umſtand, daß beide Methoden, ſo verſchieden auch die Betrachtungen ſind, worauf ſie ſich gründen, ſelben graphiſchen Operationen, nur in umgekehrter Ordnung, erfordern. Welche der beiden thoden man aber auch anwenden mag, ſo gibt es immer einige ſehr weſentliche Punkte der Berührungscurve, man direct erhalten kann und mit deren Conſtruction man immer den Anfang machen ſollte.

§. 388.

Punkte auf den ſichtbaren Umriſſen. An denjenigen Punkten der Berührungscurve, welche auf Fig. 86.
a Aequator (C′D′, C1D) ſich befinden, ſind die Berührungsebenen vertikal; mithin müſſen die horizontalen uren dieſer Ebenen parallel mit AB und Tangenten am Kreis C1D ſein. Man ziehe daher den Durchmeſſer ſenkrecht auf AB, ſo ſind ſeine beiden Endpunkte k und l, die man auf CD in k′ und l′ projicirt, die vergten Punkte. Dieſe beſtimmen, auf der Horizontalebene, den ſichtbaren Bogen der Berührungscurve au, indem ſie dem ſichtbaren Umriß der Fläche S in Beziehung auf jene Projectionsebene angehören; dieſen tbaren Bogen lmnk aber unterſcheidet man leicht vom übrigen Theil der Curve, wenn man unterſucht, ob x ſeiner Punkte (m, m′) oberhalb des Aequators C′D′ liegt.

Was diejenigen Punkte der Curve betrifft, welche auf dem der Vertikalebene entſprechenden ſichtbaren riß der Fläche, d. h. auf dem Hauptmeridian liegen, ſo bemerke man, daß die zu ihnen gehörigen Berühgsebenen ſenkrecht auf der Vertikalebene ſtehen müſſen; mithin werden ihre Spuren mit A′B′ parallel und ngenten am Meridian E′C′E‴ ſein. Zieht man alſo dieſe Tangenten und beſtimmt ihre Berührungspunkte und y′, die man auf CD in x und y projicirt, ſo erhält man die geſuchten Punkte; dieſe beſtimmen, auf Vertikalebene, ebenfalls die Grenzpunkte des ſichtbaren Bogens der Curve, welcher hier x′m′y′ iſt, ll ein Punkt (m, m′) deſſelben ſich vor der Vertikalebene CD befindet, die den Hauptmeridian enthält.

§. 389.

Die Grenzpunkte, d. h. diejenigen Punkte, in welchen die Tangente der Curve horizonta müssen nothwendig in dem Meridian Oa liegen, welcher mit der gegebenen Geraden (AB, A′B′) parall Denn aus dem allgemeinen Verfahren, durch welches man die beiden auf einerlei Parallelkreis liegenden P (m, m′) und (n, n′) erhielt, geht hervor, daß die Vertikalebene Oa alle senkrecht auf ihr stehenden Se wie z. B. (mn, m′n′) halbirt; liegt daher einer von jenen Punkten in dem Meridian Oa, so muß der c gleichfalls daselbst liegen, und die Gerade, welche sie verbindet, wird zur Tangente an der Curve, ohne t aufzuhören, horizontal zu sein.

Um nun wirklich einen der im Meridian Oa liegenden Punkte zu construiren, bemerke man vorerst, da jenige Seite des umschriebenen Cylinders, welche durch jenen Punkt geht, den Meridian Oa nothwendig ber muß, weil sie in seiner Ebene sich befindet; man darf daher nur Tangenten an die Meridiancurve ziehen mit (AB, A′B′) parallel sind. Zu diesem Zwecke klappe man den Meridian Oa und die (schon mit (AB, A parallele) Gerade (Oa, O′a′) auf die Vertikalebene auf, so wird letztere Gerade in die Lage O′a″ kon und zieht man nun parallel mit dieser Richtung eine Tangente an den Hauptmeridian, so erhält man den rührungspunkt u′ und dessen Projection u; führt man hierauf diesen Punkt auf den Meridian Oa in (r, r′ rück, so erhält man auf diese Art den tiefsten Punkt der Curve. Den höchsten Punkt findet man auf äh Weise, indem man an den Hauptmeridian eine zweite mit O′a″ parallele Tangente zieht; da aber in Fig der Meridian eine Ellipse ist, so liegen bekanntlich die beiden Berührungspunkte jener parallelen Tangente einem und demselben Durchmesser, dessen Mittelpunkt unbeweglich bleibt, wenn man den Meridian sich u Vertikalaxe drehen läßt; folglich müssen die beiden Punkte (r, r′) und (t, t′) sich auch auf einem Durch der Fläche S befinden, so daß man also letzteren Punkt leicht aus ersterem finden kann.

§. 390.

Diese gegenseitige Abhängigkeit der Punkte (m, m′) und (m″, m‴), (n, n′) und (n″, n‴) .... einander, hinsichtlich ihrer Lage, ist eine nothwendige Folge des in §. 381 bewiesenen Lehrsatzes, aus we hervorgeht, daß, wenn die Fläche vom zweiten Grade ist, alsdann die Berührungscurve eines umschrie Cylinders ganz in der mit dem Durchmesser (Oa, O′a′) conjugirten Diametralebene liegen müsse; daraus folgt ferner, daß der Mittelpunkt (O, O) der Fläche S vom zweiten Grade, zugleich auch der Mittelp der Berührungscurve ist. — Man bemerke zugleich auch, daß die beiden Axen dieser Curve im A die Durchmesser (kl, k′l′) und (rt, r′t′) sind, weil die durch die Endpunkte derselben gezogenen Tang senkrecht auf ihnen stehen (§. 389). Und da eine dieser Axen horizontal ist, so erscheinen auch ihre zontalprojectionen als Hauptdurchmesser der horizontal projicirten Curve. Solches ist aber nicht der in Beziehung auf die vertikale Projectionsebene, wo jene Axen als schief auf einanderstehende conjugirte D messer sich zeigen.

§. 391.

§. 86. Dritte Auflösung durch eine umhüllte sphärische Fläche. Nach den im §. 365 gemachten merkungen können diejenigen Punkte der vorigen Curve, welche auf einem gegebenen Parallelkreis liegen, gef werden, wenn man statt der Umdrehungsfläche S eine Kugel setzt, die um erstere längs des gegebenen Par kreises beschrieben ist, und welche die zum Punkt F′ des Hauptmeridians gehörige Normale F′∞ zum Halbm hat. Denn denkt man sich einen um diese Kugel beschriebenen und mit (AB, A′B′) parallelen Hilfscylinde wird solcher die Kugel in einem größten, senkrecht auf (AB, A′B′) stehenden Kreise berühren (§. 381, R

b da in denjenigen Punkten, in welchen dieſer größte Kreis den Parallelkreis E′F′ ſchneidet, die Kugel und
ubrehungsfläche gemeinſchaftliche Berührungsebenen haben, ſo folgt hieraus, daß eben dieſe Punkte der geſuchten
rve angehören müſſen, deren Eigenſchaft darin beſteht, daß jede durch einen ihrer Punkte gelegte Berührungs-
ene an S parallel mit (AB, A′B′) iſt. Läßt man daher die Kugel und ihren umſchriebenen Cylinder ſich um
: Vertikale O drehen, ſo wie auch die Gerade (Oa, O′a′), welche die Richtung der Cylinderſeiten bezeichnet,
) letztere in die mit der Vertikalebene parallele Lage O′a″ gekommen, ſo wird der Berührungskreis auf der
ugel ſich im Durchmeſſer γωδ, welcher ſenkrecht auf O′a″ ſteht, projiciren, und in dieſer Lage den Parallel-
is E′F′ in zwei Punkten ſchneiden, welche die Endpunkte der in s′ projicirten horizontalen Sehne ſind. Dieſe
ehne aber ändert ihre Entfernung von der Vertikalaxe O nicht, wenn Kugel und Cylinder wieder in ihre erſte
ge zurückverſetzt werden; bezieht man daher durch einen Kreisbogen den Punkt s′ auf den Meridian Oa in s
b zieht die Sehne mn ſenkrecht auf Oa, ſo ſind die Punkte m und n, in welchen dieſe Sehne den Parallel-
is EmF ſchneidet, die geſuchten Punkte, die man nun auf E′F′ in m′ und n′ projiciren muß.

§. 392.

Aufgabe. Es ſoll an eine Umdrehungsfläche eine mit einer gegebenen Geraden parallele Berührungsebene gelegt werden, deren Berührungspunkt ſich auf einem gegebenen Parallelkreis befinde.

Es iſt hier nicht nothwendig, die Berührungscurve der Umdrehungsfläche mit einem umſchriebenen Cylin-
: zu finden, deſſen Seiten parallel mit der gegebenen Geraden ſind, wie ſolches im Allgemeinen der §. 380
rlangt; ſondern es genügt, das Verfahren des §. 384 oder §. 391 unmittelbar auf den gegebenen Parallel-
is anzuwenden, um den verlangten Berührungspunkt der Ebene zu finden, worauf dieſe ſelbſt leicht conſtruirt
rden kann.

§. 393.

Aufgabe. Es ſoll an eine Umdrehungsfläche eine mit einer gegebenen Geraden parallele Berührungsebene gelegt werden, deren Berührungspunkt ſich auf einem gegebenen Meridian befinde.

Dieſe Aufgabe läßt ſich auch direkt auflöſen, wenn man auf den gegebenen Meridian die Methode des
386 anwendet; denn man erhält auf dieſem Wege den Berührungspunkt der geſuchten Berührungsebene un-
ttelbar, worauf ſich alsdann letztere ſehr leicht conſtruiren läßt.

§. 394.

Aufgabe. Die Berührungscurve zu conſtruiren, welche irgend eine krumme Fläche m zweiten Grade mit einem um ſie beſchriebenen und einer gegebenen Geraden parallelen ylinder bildet.

Trifft man hinſichtlich der gegebenen Stücke die nämliche Wahl und Anordnung wie in der zu §. 369
örigen 85ſten Figur, ſo denke man ſich fürs Erſte einen Kegel um das Ellipſoid beſchrieben, der letzteres
ngs eines horizontalen Schnittes G′H′ berühre; hierauf lege man an dieſen Kegel eine Berührungsebene,
lche mit der gegebenen Geraden parallel iſt, ſtatt daß man ſie, wie in §. 369, durch den Punkt (V, V′)
jen läßt. Bekanntlich geſchieht dies dadurch, daß man durch die Kegelſpitze eine mit der gegebenen Geraden
rallele Linie zieht, hierauf den Durchſchnittspunkt dieſer Parallelen mit der Ebene A″D″, die man wieder
) Grundlinie des Kegels annimmt, ſucht, und von dieſem Punkte aus Tangenten an die Ellipſe ABDE zieht.

Dieſe kleine Aenderung abgerechnet, ſind die nun folgenden Conſtructionen dieſelben wie in der Aufgabe des §. 369; ſie mögen daher dem Fleiße des Leſers überlaſſen bleiben, der ſie auch auf die andern Flächen zweiten Grades anwenden wird.

Drittes Kapitel.

Berührungsebenen, welche durch eine gegebene Gerade gehen.

§. 395.

Fig. 83. Um dieſe Aufgabe allgemein an einer beliebigen krummen Fläche S aufzulöſen, die aber nicht entwickelbar ſein darf, weil die Auflöſung ſonſt unmöglich wäre (§. 349), denke man ſich einen um S beſchriebenen Kegel, deſſen Spitze V in der gegebenen Geraden AB liege; hierauf beſtimme man durch eine der Methoden des erſten Kapitels dieſes Abſchnittes die Berührungscurve XλY des Kegels mit der krummen Fläche S. Da dieſe Curve der geometriſche Ort der Berührungspunkte aller Berührungsebenen an S iſt, welche durch den Punkt V gehen (§. 348), ſo muß ſie alſo auch den Berührungspunkt λ der durch AVB gelegten Berührungsebene enthalten; und conſtruirt man eben ſo die Berührungscurve X′λY′ eines zweiten um S beſchriebenen Kegels, der ſeine Spitze V′ ebenfalls in der Linie AB hat, ſo muß dieſe Curve gleichfalls durch den Punkt λ gehen, welcher daher durch den Durchſchnitt der beiden Linien XλY und X′λY′ beſtimmt wird. — Umgekehrt: jeder Punkt λ oder μ, welcher beiden Curven gemeinſchaftlich iſt, leiſtet den Bedingungen der Aufgabe Genüge; denn weil der Punkt μ ſich auf XY befindet, ſo muß die zu ihm gehörige Berührungsebene durch den Punkt V gehen; da aber μ ſich auch auf X′Y′ befindet, ſo muß eben jene Berührungsebene auch durch V′ gehen; ſie muß folglich die Gerade AB enthalten.

§. 396.

Man kann zu der Curve XλY auch die Berührungscurve xλy eines um S beſchriebenen und mit AB parallelen Cylinders ſuchen. Da nämlich letztere Curve der geometriſche Ort der Berührungspunkte aller der Berührungsebenen an S iſt, welche mit AB parallel ſind (§. 378), und da die geſuchte Ebene eben dieſer Bedingung entſpricht, ſo muß ihr Berührungspunkt λ auch auf der Curve xλy liegen. Umgekehrt: durch jeden Punkt, welcher den Curven xλy und XλY gemeinſchaftlich iſt, kann eine Berührungsebene an S gelegt werden, welche 1) mit AB parallel iſt und 2) durch den Punkt V geht, ſo daß ſie alſo die Gerade AVB enthalten muß.

§. 397.

Hieraus folgt, daß wenn die Curven xy, XY, X′Y′, ... ſich nicht ſchneiden, alsdann die Aufgabe: eine Berührungsebene an S zu legen, die zugleich durch die gegebene Gerade AB gehe, unmöglich iſt. Man kann ſich leicht zum Voraus davon überzeugen, daß dieſer Fall, für gewiſſe Lagen von AB, wirklich eintritt.

§. 398.

Anmerkung. Iſt die gegebene Fläche S vom zweiten Grade, ſo ſind, nach §. 353, alle Berührungscurven XY, X′Y′, X″Y″, ... der umſchriebenen Kegel, die ihre Spitzen in AB haben, eben; mithin haben alle Ebenen dieſer Curven zum gemeinſchaftlichen Durchſchnitt die Sehne λμ, welche die Berührungspunkte der

den durch AB an S gelegten Berührungsebenen verbindet. Es ist leicht einzusehen, daß diese Sehne mit der ch AB gehenden Diametralebene conjugirt ist.

§. 399.

Befindet die Gerade AB sich in einer Hauptebene von S, die hier, der Einfachheit wegen, horizontal genommen werden mag, so werden die Ebenen der Curven XY, X'Y', X''Y'', welche nach §. 353 beziehlich rallel sind mit den zu den Geraden VO, V'O', V''O'', ... gehörigen conjugirten Diametralebenen, alle tikal sein, und mithin projiciren sich die Curven XY, X'Y', ... nach geraden Linien, welche alle durch denigen Punkt gehen, in welchem die Sehne $\lambda\mu$ sich projicirt; da ferner die um S beschriebenen Kegel selbst sich ch den Tangentenpaaren projiciren, die man aus ihren Spitzen V, V', ... an den Hauptschnitt gezogen hat, ergibt sich folgender bemerkenswerthe Lehrsatz der ebenen Geometrie:

Wenn die Spitze V eines veränderlichen Winkels XVY, dessen Schenkel stets Tangenten einer Curve vom zweiten Grade bleiben, sich auf einer Geraden AB bewegt, so gehen alle ehnen, welche die Berührungspunkte zweier zusammengehörigen Tangenten verbinden, durch nen Punkt, der auf dem mit der Geraden AB conjugirten Durchmesser liegt.

Dieser letztere Umstand rührt daher, weil die Sehne $\lambda\mu$ sich in der Ebene $x\lambda y$ befindet, welche selbst die t AB conjugirte Diametralebene ist (§. 381).

§. 400.

Die Auflösung der Aufgabe, von welcher dieses Kapitel handelt, erfordert also im Allgemeinen, daß man Spuren der Berührungscurven zweier Kegel, oder auch eines Kegels und eines Cylinders, die um S beschrieben sind, suche; in mehreren Fällen aber läßt sich dieses Verfahren durch besondere Betrachtungen abkürzen, e solches nun an verschiedenen Beispielen gezeigt werden soll.

§. 401.

Aufgabe. Es soll an eine Kugel eine Berührungsebene gelegt werden, die durch eine gebene Gerade gehe.

Man nehme an, die beiden Projectionsebenen gehen durch den Mittelpunkt der Kugel; alsdann werden, bei Fig. 87.
n aufgeklappten Zustande, in welchem diese Ebenen sich befinden, die durch sie erzeugten Durchschnitte, welche gleich die sichtbaren Umrisse der Kugel sind, einen einzigen aus O mit dem Kugelhalbmesser beschriebenen Kreis E'F'F bilden. Es sei ferner (AB, A'B') die gegebene Gerade; denkt man sich nun einen Kegel um die gel beschrieben, dessen Spitze in irgend einem Punkt jener Geraden liegt, so darf man nur an diesen Kegel e Berührungsebene legen, welche zugleich durch (AB, A'B') geht, um die gewünschte Auflösung zu erhalten; m weil diese Ebene eine Seite des umschriebenen Kegels und zugleich eine Tangente seiner Grundlinie enthält, lche beide Gerade Tangenten der Kugel sind, so ist sie selbst eine Berührungsebene an der Kugel.

Als Spitze des umschriebenen Kegels nehme man die horizontale Spur (A, A') der gegebenen Geraden; ht man nun aus diesem Punkte die Tangenten AE und AF an den größten horizontalen Kreis der Kugel, wird letztere von dem Kegel EAF in einem kleineren Kreise berührt werden (§. 353, Note), der senkrecht auf O steht; folglich wird die Ebene dieses kleinern Kreises vertikal sein, und sich in dessen Durchmesser EF jiciren. Da nun die vertikale Ebene EF die gegebene Gerade in dem Punkte (R, R') schneidet, so ist letzer der Punkt, aus welchem man Tangenten an die Grundlinie des Kegels ziehen muß (§. 123). Man klappe halb den vertikalen Kreis EF, indem man ihn um seinen Durchmesser EF sich drehen läßt, auf die Horintalebene auf, so wird er in die Lage ETF kommen; bei dieser Umdrehung aber wird der Punkt (R, R'),

dessen kürzeste Entfernung von der Umdrehungsaxe EF, die Vertikale (R, R'G) ist, stets in letzterer bleiben und sich daher in R'', d. h. in einer Entfernung RR'' = R'G von EF auf die Horizontalebene aufklappen. Nun erhält man aus den Tangenten R''S und R''T die Berührungspunkte S und T der gesuchten Berührungsebenen an Kegel und Kugel. Um aber die wahre Lage dieser Punkte zu erhalten, drehe man den Kreis ETF sammt seinen Tangenten wieder um EF, bis er in seine erste Lage kommt, und fälle auf EF die Senkrechten Sλ und Sμ, so erhält man die Horizontalprojectionen λ und μ der gesuchten Berührungspunkte. Um nun auch die Vertikalprojectionen derselben zu erhalten, bemerke man, daß die Punkte S und T im wieder aufgerichteten Zustande beziehlich die Höhen Sλ und Tμ über der Horizontalebene haben müssen; errichtet man daher aus λ und μ Senkrechte auf die Axe und nimmt auf letzteren die Entfernungen Iλ' = Sλ und Vμ' = Tμ, so erhält man endlich (λ, λ') und (μ, μ') als die Berührungspunkte der Kugel mit den durch (AB, A'B') gehenden Berührungsebenen.

§. 402.

Hat man einmal die Berührungspunkte der Ebenen gefunden, so erhält man leicht auch ihre Spuren AX und XB', AY und YB', da solche durch A und B' gehen und senkrecht auf den Projectionen derjenigen Halbmesser stehen müssen, welche man nach den Berührungspunkten gezogen hat. Sollte jedoch dieser letzteren Bedingung in der Anwendung nicht mit der nöthigen Präcision entsprochen werden können, so kann man auch eine Gerade anwenden, welche den Berührungspunkt mit einem beliebigen Punkt der Geraden (AB, A'B') verbindet, oder welche mit letzterer parallel ist.

§. 403.

Fig. 87. Zweite Auflösungsart. Außer dem schon um die Kugel beschriebenen Kegel EAF denke man sich noch einen zweiten umschrieben, dessen Spitze in (B', B) sich befinde. Letzterer wird die Kugel in einem kleinen Kreis berühren, der senkrecht auf B'O (§. 353, Note), und mithin auch senkrecht auf der vertikalen Projectionsebene steht, in welcher diese Linie liegt. Zieht man daher die Tangenten B'E' und B'F', so ergibt sich E'F' als Durchmesser und Vertikalprojection jenes kleineren Kreises. Nun müssen nach §. 395 die beiden Kreise EF und E'F' durch die Punkte gehen, in welchen die Kugel von den durch (AB, A'B') gelegten Ebenen berührt wird; diese Punkte aber werden offenbar die Endpunkte der Sehne sein, in welcher beide Kreise sich schneiden, und deren Horizontalprojection in der Geraden EF, die Vertikalprojection aber in E'F' liegt.

Man klappe daher diese Sehne mit einem der beiden Kreise, in welchen sie enthalten ist, z. B. mit dem vertikalen Kreise EF auf die Horizontalebene auf, wo er, indem man ihn um seinen horizontalen Durchmesser dreht, in die Lage ETF kömmt. Während dieser Umdrehung bleibt die horizontale Spur (K, K') der Sehne unbeweglich, weil sie in der Umdrehungsaxe EF liegt; dagegen wird ein zweiter Punkt dieser Sehne, z. B. ihre vertikale Spur (L, L') einen Kreisbogen beschreiben, dessen Halbmesser die von letzterem Punkte auf EF gefällte Vertikale L'L ist; trägt man also in einer auf EF senkrechten Richtung die Entfernung LL'' = LL' auf, so erhält man L'' als den Punkt, in dessen Lage (L, L') nach der Aufklappung der Sehne fallen wird. Letztere wird also in die Lage KL'' kommen und die Punkte S und T, in welchen sie den Kreis ETF schneidet, sind ihre beiden Endpunkte. Führt man nun diese durch die Senkrechten Sλ und Tμ wieder auf EF zurück und projicirt die Punkte λ und μ auf E'F' in λ' und μ', so erhält man abermals die gesuchten Berührungspunkte der Kugel mit den durch (AB, A'B') gehenden Berührungsebenen.

§. 404.

Fig. 87. Dritte Auflösungsart. Hat man nur einmal die Geraden EF und E'F' mittelst der aus A und B

die Kugel gezogenen Tangentenpaare gefunden und zugleich erkannt, daß jene Geraden die Projectionen der-
jen Sehne sind, welche die Berührungspunkte der Kugel und ihrer Berührungsebenen verbindet, so kann man
Beschreibung einer neuen Kreislinie dadurch entgehen, daß man die Punkte sucht, in welchen jene Sehne
', E'F') den größten Kreis, in welchem sie liegt, schneidet. Man drehe daher diesen größten Kreis um
horizontale Spur OK und klappe ihn auf die Horizontalebene auf, so wird er mit dem Umriß der Kugel
mmenfallen. Bei dieser Umdrehung wird der Punkt K der Sehne, welcher in der Umdrehungsaxe liegt, un-
eglich bleiben, während der Punkt (L, L') eben dieser Sehne einen Kreisbogen beschreibt, dessen Halb-
er die aus letzterem Punkt auf OK gefällte Senkrechte ist. Zieht man nun, um diese Senkrechte zu erhal-
LM rechtwinklich auf OK, so ist leicht einzusehen, daß der gesuchte Halbmesser in den Punkt M der Linie
treffen müsse und die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks sei, dessen Katheten LM und LL'; con-
rt man daher dieses Dreieck NLM und verlängert LM um Ml'' = MN, so ist l'' der Punkt, in dessen
: (L, L') nach der Aufklappung der Sehne fällt. Letztere wird daher die Lage Kl'' annehmen, und die
ikte P und Q, in welchen diese Gerade den Umriß der Kugel schneidet, sind die gesuchten Punkte, die man
durch Senkrechte, welche man auf OK fällt, in die Punkte λ und μ der Sehne EF zurückführt und von
aus auf E'F' in λ' und μ' projicirt.

§. 405.

Vierte Auflösungsart. Bei folgender Methode, welche man anwenden muß, wenn die beiden Spuren Fig. 88.
gegebenen Geraden in allzu weite Entfernung fallen, betrachtet man die beiden durch (AB, A'B') gehenden
ührungsebenen als schon construirt. Schneidet man sie nun durch die Ebene der beiden nach den Berüh-
gspunkten gezogenen Halbmesser, so erhält man als Durchschnittslinie zwei Tangenten des größten in
r Ebene enthaltenen Kreises, welche hinreichen, die gesuchten Berührungspunkte zu bestimmen. Es ist aber
t, diese Tangenten zu construiren, denn weil die schneidende Ebene durch zwei Halbmesser geht, welche be-
lich senkrecht auf den Berührungsebenen stehen, so steht sie selbst auch senkrecht auf letzteren Ebenen und mit-
auch auf deren Durchschnitt (AB, A'B'); ihre Spuren müssen daher die Geraden OC und OD sein, welche
winklig auf AB und A'B' stehen. Ferner schneidet die Ebene COD' die Gerade (AB, A'B') in einem
ikt (R, R'), der nach §. 30 construirt wird, und aus welchem man die gesuchten Tangenten an den größten
is,*) in welchem die Kugel von der Ebene COD' geschnitten wird, ziehen kann. Man klappe zu diesem
cke letztere Ebene um ihre horizontale Spur OC auf der Horizontalebene auf: hiebei wird jener größte
is mit dem Umriß der Kugel zusammenfallen, der Punkt (R, R') aber wird bei seiner Umdrehung um OC
n Kreisbogen beschreiben, dessen Halbmesser die auf OC senkrechte Gerade (RC, R'C') ist. Man construire
er die wahre Größe CH dieses Halbmessers und trage sie von C nach R'', so bezeichnet letzterer Punkt die
e, in welche (R, R') nach der Aufklappung kommt, und man erhält als aufgeklappte Tangenten die beiden
aden R''P und R''Q.

Nun suche man, welche Lage die Berührungspunkte P und Q bekommen werden, wenn man diese Tan-
ten wieder in die Ebene COD' zurückführt. Die erste Tangente R''P schneidet die Umdrehungsaxe OC in
m Punkte V, der unbeweglich bleibt; mithin muß RV die Horizontalprojection und folglich R'V' die Verti-
rojection jener Tangente sein. Führt man daher, durch eine Senkrechte auf OC, den Punkt P in λ auf RV
ück und projicirt λ in λ' auf R'V', so erhält man die wahre Lage des Berührungspunktes (λ, λ') der ersten
ührungsebene an der Kugel.

*) Dieser größte Kreis ist nichts anderes, als die Berührungscurve der Kugel mit einem umschriebenen und zu (AB, A'B') pa-
rallelen Cylinders, so daß also alle, den Punkten dieser Kreiscurve entsprechenden Berührungsebenen der Kugel mit der gege-
benen Geraden parallel sein müssen.

Die zweite aufgeklappte Tangente R″Q ſchneidet die Umdrehungsaxe OC in einer allzu beträchtlichen
fernung, als daß man von dieſem Durchſchnittspunkte Gebrauch machen könnte. Man bemerke aber, daß
in der Aufklappung die Sehne darſtellt, welche die Berührungspunkte beider Berührungsebenen verbindet; da
dieſe Sehne die Axe OC im Punkte (K, K′) ſchneidet, ſo müſſen Kλ und K′λ′ ihre Projectionen ſein. Be
man daher durch eine auf OC ſenkrechte Gerade den Punkt Q in μ auf Kλ, und projicirt μ in μ′ auf K
ſo erhält man den Berührungspunkt (μ, μ′) der zweiten Berührungsebene an der Kugel. Hiebei wird
auch die Bemerkung nicht unbenützt laſſen, daß die Sehne (λμ, λ′μ′) ſenkrecht auf der Ebene AOB′, w
durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die gegebene Gerade (AB, A′B′) geht, ſtehen muß.

§. 406.

Aufgabe. An eine Umdrehungsfläche von gegebenem Meridian ſoll eine Berührun
ebene gelegt werden, die durch eine gegebene Gerade gehe.

ig. 89. Es ſei (O, I′Z′) die Umdrehungsaxe, (X′C′Y′D′, CD) der Hauptmeridian der Umdrehungsfläche (AB, A′B′) die Gerade, durch welche die geſuchte Berührungsebene gehen ſoll. Um nun hier das allgem Verfahren der §§. 395 und 396 anzuwenden, ſuche man

1) die Berührungscurve (XKYRL, X′K′Y′R′L′) der gegebenen Fläche mit einem umſchriebenen K deſſen Scheitel (V, V′) willkürlich auf der Geraden (AB, A′B′) angenommen iſt; dieſe Curve wird auf die Art wie in der Aufgabe des §. 356 conſtruirt, und es wurden deshalb in Figur 89. die nämlichen Buchſt beibehalten wie in Fig. 84., ſo weit ſie ſich auf die Conſtruction der Berührungscurve beziehen: ſo daß Alles, was dort geſagt wurde, buchſtäblich auf die Fig. 89. angewendet werden kann;

2) die Berührungscurve (xtlyr, x′t′l′y′r′) der gegebenen Umdrehungsfläche mit einem umſchriebenen zu (AB, A′B′) parallelen Cylinder; dieſe Curve wird ganz ſo conſtruirt wie in der Aufgabe des §. 383 Fig. 86., daher denn auch die dortigen Bezeichnungen hier beibehalten wurden.

Hierauf unterſuche man, ob dieſe beiden Curven ſich irgendwo ſchneiden, wobei man ſich aber wo Acht zu nehmen hat, daß man nicht auf einer und derſelben Projectionsebene einen mit vollem Strich ge neten, alſo ſichtbaren Aſt der einen Curve mit einem punktirten oder unſichtbaren Aſt der andern Curve gleiche; denn da ſolche Aeſte ſich nicht auf einerlei Mantel der Fläche befinden, ſo können ſie ſich auch ſchneiden. Hier, in Fig. 89., ſchneiden beide Curven ſich in den Punkten (λ, λ′) und (μ, μ′), deren Lage ri beſtimmt iſt, wenn die Horizontal- und Vertikalprojection eines jeden derſelben in einer auf der Projection ſenkrechten Geraden liegen. Dieſe Punkte aber ſind nach §. 395 und §. 396 die Berührungspunkte der drehungsfläche mit den durch (AB, A′B′) gehenden Berührungsebenen. Aus dieſen Berührungspunkten l ſich nun leicht und auf verſchiedene Weiſe die Spuren dieſer Ebenen conſtruiren. Man bemerke nur, daß horizontalen Spuren durch den Fußpunkt A der Geraden gehen und ſenkrecht auf den Projectionen Oλ und der zu den Berührungspunkten gehörigen Normalen ſtehen müſſen.

§. 407.

Beſondere Fälle. Iſt die gegebene Gerade vertikal, ſo darf man nur durch ihren Fußpunkt zwei T genten an die Horizontalprojection des Aequators ziehen.

Iſt ſie aber horizontal, ſo beſtimme man ihren Durchſchnittspunkt mit einer ſenkrecht auf ihr ſtehe Meridianebene und ziehe aus dieſem Punkte zwei Tangenten an die in der Ebene enthaltene Meridiancurve, ſehr leicht auszuführen iſt, nachdem man jenen Punkt und den Meridian auf die Vertikalebene aufgeklappt wie es in §. 360 mit dem Punkt P″ der Fig. 84. geſchehen iſt.

§. 408.

te Auflösungsart. Ist die Umdrehungsfläche vom zweiten Grad, so kann man mit Vortheil, 195, zwei umschriebene Kegel anwenden, deren Scheitel man in den beiden Punkten annimmt, in gegebene Gerade die Ebenen des Aequators und des Hauptmeridians schneidet; denn alsdann wird, ehrsatze des §. 353, jede der Berührungscurven sich auf einer der beiden Grundebenen als eine rojiciren, so daß man nur Eine Curve in der ganzen Figur zeichnen darf, wie solches genau aus n und allgemeineren Aufgabe des §. 417 erhellen wird.

§. 409.

te Auflösungsart. Vorausgesetzt, die Umdrehungsfläche sei wieder vom zweiten Grade, so ufgabe auch vermittelst eines einzigen der beiden Kegel, von welchen im vorigen Paragraph die Rede öst werden. Denn da die Curve sich (nach §. 353) ganz in einer auf der Horizontal- (oder auch ibene senkrecht stehenden Ebene befindet, so darf man nur aus demjenigen Punkte, in welchem letztere gegebene Gerade*) schneidet, zwei Tangenten an die Curve ziehen. Es ist aber schon aus §. 374 e leicht diese Tangenten mit ihren Berührungspunkten construirt werden können, wenn man nur die urve vom zweiten Grade kennt, ohne daß man letztere selbst zu zeichnen brauchte. Die eine dieser erhält man unmittelbar, wenn man aus der Spitze des umschriebenen Kegels zwei Tangenten an or (oder auch an den Hauptmeridian) zieht, und die andere Axe läßt sich sehr leicht aus der ersten . 418).

Leser wird aufgefordert, dieses Verfahren auf ein Umdrehungsellipsoid anzuwenden; hier im Buche wird i der Mannichfaltigkeit der Beispiele willen, auf ein Umdrehungshyperboloid angewendet werden, das Erzeugende, nicht aber durch seinen Meridian bestimmt ist.

§. 410.

gabe. An die windschiefe Fläche eines Umdrehungshyperboloids soll eine Berührungs- egt werden, die zugleich durch eine gegebene Gerade gehe.

ei (O, O′O″) die Vertikalaxe und (ADB, A′D′A″) die bewegliche Gerade, welche durch ihre Um- Fig. 90.
i diese Axe das Hyperboloid erzeugt (§. 140), das durch zwei vom Kehlkreis gleich weit entfernte hnitte A′B′ und A″B″ begränzt angenommen wird. Die Darstellung der Umdrehungsfläche auf der ie unterbleibt hier, weil sonst die Meridianhyperbel, von der kein Gebrauch gemacht werden soll, erden müßte; auf der Horizontalebene hingegen wird jene Fläche als wirklich projicirt angenommen, auch diejenigen Theile der Hauptlinien, welche unter den oberen Theil des Mantels fallen, punktirt ssen.

§. 411.

ei ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) die Gerade, durch welche die Berührungsebene gehen soll; denkt man sich nur aus e (V, V′), in welchem jene Gerade die Horizontalebene des Kehlkreises schneidet, um das Hyper- n Kegel beschrieben, zu dessen Seiten offenbar auch die beiden Tangenten VX und VY gehören) wird solcher die Umdrehungsfläche in einer Curve berühren, welche ganz in der vertikalen Ebene und mithin eine Hyperbel sein wird, deren reelle Axe die Sehne XY ist. Zieht man daher an diese

* Verfahren ist ganz dem in §. 401 für die Kugel angewendeten ähnlich.

Curve aus dem Punkt (R, R'), in welchem ihre Ebene die Gerade ($\alpha V \beta$, $\alpha' V' \beta'$) schneidet, zwei Tan so erhält man die Berührungspunkte der gesuchten, das Hyperboloid berührenden Ebenen.

§. 412.

Um aber diese Tangenten wirklich construiren zu können, drehe man die vertikale Ebene XY um l (O, O'O''), bis sie in die Lage xy kommt, in welcher sie dem Hauptmeridian parallel ist, alsdann w Punkt (R, R') in (r, r') zu liegen kommen. In dieser Lage nun ist die in der Vertikalebene xy l Hyperbel dem Hauptmeridian der Umdrehungsfläche ähnlich, und hat also, wie dieser, die Geraden A' B'D' zu Projectionen ihrer Asymptoten; hieraus aber und mittels der reellen Axe x'y' findet man le beiden Brennpunkte φ und ψ. Um nun aus dem Punkte r' Tangenten an die Hyperbel zu ziehen,*) be man einen Kreisbogen mit dem Halbmesser r'φ und einen andern Bogen aus ψ mit dem Halbmesser hierauf ziehe man durch die Mitte des Bogens $\varphi\gamma$ die Gerade r'l', so erhält man eine der gesuchten Tan deren Berührungspunkt l' durch ihren Durchschnitt mit der Geraden $\psi\gamma$ bestimmt wird. Eben so erhäl für die andere Tangente die Gerade r'm', welche durch die Mitte des Bogens $\varphi\delta$ geht und deren Berüh punkt m' durch die Verlängerung der Linie $\psi\delta$ bestimmt wird.

Nun darf man nur diese Punkte l' und m' auf xy in l und m projiciren und hierauf diese Pun die Vertikalebene XY in (λ, λ') und (μ, μ') beziehen, so werden letztere die Berührungspunkte des Hyper mit den beiden durch ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) gehenden Berührungsebenen sein, deren Spuren $\alpha B_2 A_2$ und $\alpha A_2 B_2$ f leicht construiren lassen.

§. 413.

In dem windschiefen Hyperboloid enthält bekanntlich jede Berührungsebene zwei geradlinige Erzeu linien desselben, welche in dem Berührungspunkte sich schneiden; zieht man daher aus den Punkten λ vier Tangenten an den Kehlkreis, nämlich λA_2, λB_2, μA_2, μB_2, so werden die Durchschnitte derselben horizontalen Spur der Umdrehungsfläche vier Punkte liefern, welche den Spuren der Berührungsebenen hören. Von den beiden Erzeugenden λA_2 und μB_2 aber gehört die eine zum System (AD, A'D') andere zum System (BD, B'D'), daher sie sich (nach §. 144) in einem Punkte schneiden werden, der auf der Geraden ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) liegen muß; und dieser Punkt (s, s') wird genau derjenige sein, in welche Hyperboloid von jener Geraden geschnitten wird. Den andern Durchschnittspunkt erhält man a Erzeugenden λB_2 und μA_2, welche sich ebenfalls schneiden.

§. 414.

Bemerkung. Wenn der Punkt (V, V'), in welchem die gegebene Gerade ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) die Hor ebene des Kehlkreises schneidet, sich innerhalb dieses Kreises befindet, so kann man keine Tangenten VX mehr ziehen; und dieses zeigt an, daß die Berührungscurve des Hyperboloids mit dem umschriebenen Ke seinen Scheitel in (V, V') hat, ihre Lage ändert und eine Hyperbel wird, deren reelle Axe vertikal un Ebene stets senkrecht auf der Horizontalen VO ist. In diesem Falle nun muß man von (V, V') a Tangenten an die in der Ebene VO liegende Meridiancurve ziehen, alsdann wird die zwischen den beid rührungspunkten liegende Sehne die reelle Axe jener Hyperbel sein. Die übrigen Constructionen werd ähnliche Art ausgeführt, wie im ersten Falle.

---

*) Man sehe in den Lehrbüchern der Kegelschnitte die Methode, der sich die Alten bedienten, um Tangenten an solche zu ziehen.

§. 415.

Andere Auflösung. Die in §. 413 gemachten Bemerkungen führen noch auf ein anderes, sehr einfaches Fig. 90.
und auf alle Lagen der gegebenen Geraden anwendbares Verfahren. Hat man nämlich, nach der Methode des §. 284, die Durchschnittspunkte der Geraden $(a\beta,\ \alpha'\beta')$ mit dem Hyperboloid gefunden, so ziehe man aus einem derselben, z. B. aus $(s,\ s')$, Tangenten sA_2 und sB_2 an den Kehlkreis, so bestimmt jede dieser Erzeugenden in Verbindung mit $(a\beta,\ a'\beta')$ unmittelbar eine der gesuchten Berührungsebenen, als deren horizontale Spuren man aA_2 und aB_2 erhalten wird. Die Berührungspunkte selbst erhält man aus den beiden andern von B_2 und A_2 ausgehenden Erzeugenden. *)

§. 416.

Schneidet also die gegebene Gerade das Hyperboloid gar nicht, so kann auch keine Berührungsebene durch sie an die krumme Fläche gelegt werden; dieses erhellet schon daraus, daß jede Berührungsebene zwei Erzeugende enthalten muß, welche sich schneiden und von welchen also wenigstens eine, die ebenfalls in der Berührungsebene liegende Gerade $(a\beta,\ \alpha'\beta')$ schneiden muß. Nur in dem Falle wird letzterer Durchschnitt nicht stattfinden, oder in unendliche Entfernung fallen, wenn die beiden Erzeugenden und die Gerade $(a\beta,\ \alpha'\beta')$ alle drei parallel sind; alsdann aber ist die Lage der Berührungsebene nur um so leichter zu bezeichnen, weil sie in diesem Falle offenbar den asymptotischen Kegel berührt (§. 280).

§. 417.

Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an irgend eine Fläche vom zweiten Grade zu legen.

Die Fläche sei z. B. ein Ellipsoid, auf zwei Projectionsebenen bezogen, von denen jede mit einer seiner Fig. 91.
Hauptebenen parallel ist. Die sichtbaren Umrisse desselben sind die beiden Hauptellipsen (ABDE, A′D′) und (A′C′D′F, AD), von welchen jede zwei Axen mit dem Ellipsoid gemeinschaftlich hat. Es sei ferner (RS, R′S′) die gegebene Gerade. Nun können, nach §. 395, die Berührungspunkte der durch diese Gerade gehenden Berührungsebenen gefunden werden, wenn man die Durchschnitte der Berührungscurven zweier um das Ellipsoid beschriebenen Kegel sucht, deren Scheitel in beliebigen Punkten der gegebenen Geraden liegen; um jedoch die Construction dieser Curven zu vereinfachen, nehme man die Scheitel dieser Kegel in den Punkten (V, V′) und (v, v′), in welchen die Gerade (RS, R′S′) die Ebenen der beiden Hauptellipsen, welche mit den Projectionsebenen parallel sind, schneidet.

§. 418.

Zieht man nun die Tangenten $V'\alpha'$ und $V'\delta'$ an die Ellipse A′C′D′F′, so gehören die Punkte α' und δ' offenbar der Vertikalprojection derjenigen Curve an, in welcher der Kegel (V, V′) das Ellipsoid berührt; diese Curve aber ist eben (§. 353), und ihre Vertikalprojection ist die Gerade $\alpha'\delta'$ selbst. Denn da der Scheitel (V, V′) in einer Vertikalebene VAD liegt, welche das Ellipsoid in zwei genau symmetrische Theile theilt, so müssen die Punkte der Berührungscurve zu zwei und zwei in senkrecht auf jener Hauptebene stehenden Sehnen liegen; die Ebene der gesuchten Curve ist mithin ebenfalls senkrecht auf der Vertikalebene VAD und projicirt sich daher in der Geraden $\alpha'\delta'$, welche die beiden schon gefundenen Punkte verbindet.

*) Eine ähnliche Auflösung kann auch auf das Hyperboloid mit einem Mantel, das nicht durch Umdrehung erzeugt ist, angewendet werden (§. 476).

Aus eben dieſen Gründen iſt die Gerade ($\alpha\delta$, $\alpha'\delta'$) eine Axe der Curve im Raum, und bleibt es auch noch in der Horizontalprojection, wo ſie die beiden Scheitel α und δ beſtimmt. Die Richtung $\omega\beta$ der zweiten Axe erhält man nun leicht; um aber ihre Länge zu beſtimmen, bemerke man, daß beide Axen proportionirt ſind mit den Axen eines Schnittes, den eine, der Berührungscurve $\alpha'\delta'$ parallele, Diametralebene $O'a'$ mit dem Ellipſoid erzeugt. Projicirt man daher a' in a und zieht $\alpha\beta$ parallel mit aB, ſo erhält man die Länge $\omega\beta$ der zweiten geſuchten Axe. Nun iſt es leicht, die Ellipſe $\alpha X\beta\delta Y$ ſelbſt zu ziehen, welche durch die Punkte X und Y gehen muß, die man aus dem Schnitte X' erhält, und in welchen ſie den ſichtbaren Umriß des Ellipſoides auf der Horizontalebene berührt.

§. 419.

Der zweite umſchriebene Kegel, der ſeinen Scheitel in (v, v') hat, berührt das Ellipſoid in einer Curve, welche, aus ähnlichen Gründen wie vorhin, ſich horizontal in der Geraden xy projiciren wird. Die Vertikalprojection dieſer Curve würde man nun durch ein ähnliches Verfahren wie in §. 418 erhalten können; man hat aber dieſer Projection nicht nöthig, da die Durchſchnittspunkte λ und μ der beiden Berührungscurven ſich auf der Horizontalebene unmittelbar ergeben und man ſie daher nur noch auf $\alpha'\delta'$ in λ' und μ' projiciren darf. Man kennt alſo jetzt für jede der geſuchten Berührungsebenen ihren Berührungspunkt (λ, λ') oder (μ, μ') und eine Gerade (RS, R'S'), durch welche ſie gehen muß, ſo daß man leicht ihre Spuren finden kann.

§. 420.

z. 91. Andere Auflöſung. Man kann die nämliche Aufgabe auch mittelſt des einzigen umſchriebenen Kegels, der ſeinen Scheitel in (V, V') hat, auflöſen; denn jede Berührungsebene an dieſem Kegel, welche durch die Gerade (RV, R'V') geht, genügt der Aufgabe. Man ſuche daher den Punkt (R, R'), wo dieſe Gerade von der Ebene der Grundlinie $\alpha'\delta'$ geſchnitten wird; und ziehe hierauf aus R zwei Tangenten an dieſe Grundlinie $\alpha Y\delta X$. Es iſt aber unnöthig, die Ellipſe $\alpha Y\delta X$ wirklich zu zeichnen, da die beiden Halbaxen $\omega\alpha$ und $\omega\beta$ hinreichen zur Conſtruction der Berührungspunkte μ und λ der Tangenten $R\mu$ und $R\lambda$ (§. 374 und §. 412). Dieſe Punkte λ und μ aber ſind zugleich die Punkte, in welchen die durch (RV, R'V') gehenden Ebenen das Ellipſoid berühren. Man hat alſo hier beide Ebenen durch ein Verfahren beſtimmt, bei welchem man nur die gerade Linie und den Kreis anzuwenden braucht.

Viertes Kapitel.

Berührungsebenen, welche mit einer gegebenen Ebene parallel ſind.

§. 421.

Es ſei S die krumme Fläche, an welche eine mit einer gegebenen Ebene P parallele Berührungsebene gelegt werden ſoll. Man denke ſich in der Ebene P zwei beliebige gerade Linien A und B gezogen, und conſtruire hierauf nach den Methoden des zweiten Kapitels die Berührungscurven X und Y der krummen Fläche S mit zwei umſchriebenen Cylindern, von denen der eine mit A, der andere mit B parallel iſt. Nun iſt aus §. 378 bekannt, daß für alle Punkte der Curve X die Berührungsebenen parallel mit A ſind; eben ſo daß für alle Punkte der Curve Y die Berührungsebenen mit B parallel ſind; ſchneiden ſich daher die beiden Curven X und Y,

ſo liefert jeder ihrer Durchſchnitte einen Punkt, für welchen die an S gelegte Berührungsebene mit A und B zugleich und mithin auch mit der gegebenen Ebene ſelbſt parallel iſt.

§. 422.

Man bemerke, daß die vorige Aufgabe auch zur Auflöſung einer andern dient, nämlich: an eine Fläche S eine Normale zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden D parallel ſei. Denn conſtruirt man eine Ebene P ſenkrecht auf die Gerade D und ſucht eine mit P parallele Berührungsebene, ſo wird die dem Berührungspunkt entſprechende Normale parallel mit D ſein. Man bedient ſich dieſes Verfahrens, um den Lichtpunkt (point brillant) einer Fläche zu finden, die von den als parallel angenommenen Lichtſtrahlen beleuchtet wird.

§. 423.

Iſt die Fläche S entwickelbar, ſo iſt die Aufgabe im Allgemeinen unmöglich, weil die Berührungsebene einer ſolchen Fläche durch die Bedingung, daß ſie mit einer gegebenen Geraden parallel ſein ſolle, hinlänglich beſtimmt iſt (§. 379) und man alſo nicht fordern kann, daß ſie zwei Geraden, A und B zumal, d. h. der Ebene P, in welcher dieſe Geraden liegen, parallel ſei.

§. 424.

Das Verfahren des §. 421 iſt allgemein, führt aber häufig zu ſehr verwickelten Conſtructionen; daher muß man bei jeder Fläche unterſuchen, durch welche beſondern Eigenſchaften derſelben die Auflöſung vereinfacht werden kann, wie ſolches an einigen Beiſpielen gezeigt werden ſoll.

1) Iſt die Fläche durch Umdrehung erzeugt, in welchem Falle jede Berührungsebene ſenkrecht auf dem ihr entſprechenden Meridian iſt, ſo ſucht man zuerſt eine Meridianebene, welche auf der gegebenen Ebene P ſenkrecht ſteht und letztere in einer Geraden δ ſchneidet; hierauf zieht man an den auf dieſe Art erhaltenen Meridianſchnitt eine der δ parallele Tangente, ſo wird der Punkt, in welchem letztere den Meridian berührt, zugleich auch der Berührungspunkt einer mit P parallelen Ebene ſein. Dieſes Verfahren läßt ſich bei der Kugel, dem Ellipſoid, dem Wulſt ꝛc. anwenden.

2) Iſt die Fläche ein Umdrehungshyperboloid mit Einem Mantel, das, nach §. 146, zwei Syſteme geradliniger Erzeugenden zuläßt, die beziehlich mit den Seiten des aſymptotiſchen Kegels parallel ſind, ſo ſchneide man dieſen Kegel vermittelſt einer durch ſeine Spitze gehenden und mit P parallelen Ebene. Dadurch erhält man zwei mit P parallele Seiten α und α', aus welchen ſich leicht die vier entſprechenden Erzeugungslinien des Hyperboloids ergeben, nämlich A und B, welche mit α und A′ und B′, welche mit α' parallel ſind. Nun beſtimmen die Erzeugenden A und B′ eine mit P parallele Ebene, welche das Hyperboloid in dem Durchſchnittspunkte eben dieſer Erzeugenden berührt; eben ſo beſtimmen die Erzeugenden A′ und B eine zweite Berührungsebene am Hyperboloid.

Das nämliche Verfahren läßt ſich auch auf ein nicht durch Umdrehung erzeugtes Hyperboloid mit einem Mantel anwenden, da auch dieſe krumme Fläche zwei Syſteme geradliniger und mit den Seiten eines aſymptotiſchen Kegels paralleler Erzeugenden zuläßt, wie ſolches aus dem ſiebenten Abſchnitte erhellen wird.

Fünftes Kapitel.

Berührungsebenen an mehreren krummen Flächen zugleich.

§. 425.

Eine Ebene zu finden, welche zwei gegebene Flächen S und T zugleich berühre.

Um dieſe Aufgabe ganz allgemein zu löſen, die Projectionsebenen mögen ſein, welche ſie wollen, nehme man im Raume eine willkürliche Ebene P an; hierauf ſuche man die Berührungscurve X, welche die Fläche S mit einem umſchriebenen, auf P ſenkrechten Cylinder bildet. Das Verfahren hiebei iſt ganz daſſelbe wie in §. 377, weil die Seiten dieſes Cylinders mit einer gegebenen Geraden parallel ſein müſſen, nämlich mit einer auf P ſenkrechten Linie. Eine ähnliche Berührungscurve Y ſuche man auch für die Fläche T und conſtruire die Projectionen x und y dieſer Curve auf der Ebene P. Zieht man nun an die beiden Curven x und y eine gemeinſchaftliche Tangente, ſo wird ſolche die Spur einer Ebene π ſein, welche ſenkrecht auf P ſteht, und welche, da ſie offenbar die beiden Cylinder berührt, nothwendig auch die krummen Flächen S und T berühren muß. Auf dieſe Art erhält man alſo eine Ebene, welche der Aufgabe Genüge leiſtet; es gibt aber deren noch unendlich viele, π', π'', ... die man erhält, wenn man ähnliche Conſtructionen auch für andere Ebenen P', P'', ... von verſchiedener Richtung, vornimmt.

§. 426.

Man kann aber alle dieſe Auflöſungen unter ſich verbinden, wenn man die entwickelbare Fläche conſtruirt, welche um die beiden Flächen S und T zugleich beſchrieben iſt. Zu dieſem Zwecke denke man ſich die Punkte m und n, in welchen die Curven x und y von ihrer gemeinſchaftlichen Tangente auf der Ebene P berührt werden, auf die Curven X und Y in M und N projicirt; ſo ſind letztere die Punkte, in welchen die Ebene π die beiden Flächen S und T berührt; und conſtruirt man auf ähnliche Weiſe die Berührungspunkte M' und N', M'' und N'', ... der Ebenen π', π'', ... ſo bilden die Geraden MN, M'N', M''N'', ... eine Fläche Σ, welche die beiden Flächen S und T in den Curven MM'M'' ... und NN'N'' .... berührt. Dieſe Fläche Σ iſt zugleich entwickelbar; denn nimmt man die Punkte M und M' unendlich nahe bei einander, ſo liegen die beiden Linienelemente MM' und NN' in der Ebene π, daher denn auch die beiden Erzeugenden MN und M'N' in derſelben Ebene liegen müſſen; mithin iſt Σ eine entwickelbare Fläche (§. 179). Die unendlich nahen Linien MN, M'N', M''N'', ... kann man aber auch als die auf einander folgenden Durchſchnitte der Ebenen π, π', π'', ... betrachten (§. 182), ſo daß alſo Σ die Umhüllungsfläche aller Lagen einer Ebene π iſt, welche ſich ſo an den Flächen S und T hinbewegt, daß ſie immer beide zugleich berührt (§. 184).

Hat man nun die Fläche Σ einmal conſtruirt, ſo werden alle an dieſelbe gelegten Berührungsebenen die Flächen S und T zugleich berühren, ſo daß man alſo alle nur möglichen Auflöſungen der Aufgabe erhalten kann.

§. 427.

Die entwickelbare um S und T beſchriebene Fläche Σ iſt von Wichtigkeit in der Theorie der Schatten. Gewöhnlich hat ſie zwei von einander verſchiedene Mäntel, weil die Curven x und y des §. 425 meiſtens ſowohl eine äußere als auch eine innnere Tangente zulaſſen. Alles dieſes erhellet deutlich aus dem ſehr einfachen Beiſpiel des §. 437, wo zwei Kugeln betrachtet werden.

§. 428.

Wenn eine der beiden gegebenen Flächen, z. B. S selbst entwickelbar ist, so ist die Aufgabe: eine gemeinschaftliche Berührungsebene an beide zu legen, im Allgemeinen nicht unmöglich, aber nur läßt sie jetzt nicht mehr unendlich viele Auflösungen zu, wie man leicht einsehen wird, wenn man sich eine Ebene denkt, welche, indem sie S stets berührt, sich so lange fortbewegt, bis sie die Fläche T trifft. Auch wird bei der Annahme, daß S entwickelbar sei, die Curve X auf der Ebene P (§. 425) sich in eine oder mehrere Gerade verwandeln, an welche man keine mit der Curve y gemeinschaftliche Tangente ziehen kann, es müßte denn eine dieser Geraden selbst eine Tangente an jener Curve y sein, was aber nur für eine gewisse Zahl Ebenen P, P′, P″, . . . möglich ist. Die Aufgabe ist also in diesem Falle bestimmt und die Fläche Σ verwandelt sich in eine oder mehrere Ebenen. Ein Beispiel hievon kommt in §. 434 vor.

§. 429.

Sind beide gegebene Flächen S und T entwickelbar, so ist die Aufgabe im Allgemeinen unmöglich, weil die Curven x und y des §. 425 sich alsdann auf allen Ebenen P, P′, P″, . . . in gerade Linien verwandeln, an welche keine gemeinschaftliche Tangente gezogen werden kann.

§. 430.

Wenn die Flächen S und T nicht entwickelbar sind, so kann man die Aufgabe dadurch zu einer bestimmten machen, daß man die Bedingung beifügt, die Berührungsebene müsse durch einen außerhalb gegebenen Punkt V gehen: alsdann besteht die ganze Aufgabe darin, durch diesen Punkt V eine Berührungsebene an die entwickelbare, um S und T beschriebene Fläche Σ zu legen; nach den §§. 349 und 350 aber läßt diese Aufgabe immer nur eine bestimmte Zahl Auflösungen zu, und um diese zu erhalten, müßte man im Allgemeinen den Durchschnitt der Fläche Σ mit irgend einer durch V gehenden Ebene construiren und hierauf aus diesem Punkte Tangenten an den Durchschnitt ziehen; alsdann würde jede dieser Tangenten in Verbindung mit der geradlinigen Erzeugenden, welche durch ihren Berührungspunkt geht, eine Berührungsebene an Σ und mithin auch an den beiden Flächen S und T bestimmen. Ein Beispiel hievon findet sich in §. 437.

§. 431.

Aufgabe. Man soll eine Ebene finden, welche drei gegebene Flächen S, T und U zugleich berührt.

Das allgemeine Verfahren bei Auflösung dieser Aufgabe besteht darin, daß man sich eine um S und T beschriebene entwickelbare Fläche Σ und hierauf noch eine andere Fläche Σ_2 denkt, welche um S und U beschrieben ist. Hierauf construirt man nach §. 426 die Berührungscurven MM′ . . . und $M_2 M'_2$ . . . dieser beiden Flächen Σ und Σ_2 mit S, so wird jeder Punkt μ, wo diese Curven sich schneiden, ein solcher sein, in welchem die an S gelegte Berührungsebene zugleich auch die beiden Flächen Σ und Σ_2 und mithin auch die beiden Flächen T und U berührt. Somit wäre die Aufgabe gelöst; da aber die Constructionen gewöhnlich sehr verwickelt werden, so hat man sich begnügt, ein einziges Beispiel in §. 441 zu geben, wo die Constructionen sich sehr einfach ausführen lassen.

Oben, in §. 429, wurde gesagt, daß es im Allgemeinen unmöglich sei, an zwei entwickelbare Flächen eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen; hier aber war es darum möglich, weil die beiden Flächen Σ und Σ_2 in dem besondern Falle sich befinden, um eine und dieselbe Fläche S beschrieben zu sein.

§. 432.

Ist eine oder mehrere von den drei gegebenen Flächen *entwickelbar*, so ist die Aufgabe im Allgemeinen unmöglich. Ist z. B. S entwickelbar, so verwandeln sich die Flächen Σ und Σ_2 des vorigen Paragraphen in *Ebenen* (§. 428), an welche keine gemeinschaftliche Berührungsebene gelegt werden kann, wenn nicht, in ganz besondern Fällen, zwei dieser Ebenen ganz zusammenfallen.

§. 433.

Eine Ebene, welche vier Flächen S, T, U, V, oder noch mehrere zugleich berühre, gibt es im Allgemeinen nicht. Denn denkt man sich die drei entwickelbaren Flächen Σ, Σ_2, Σ_3 beziehlich um S und T, S und U, S und V beschrieben, so wird es im Allgemeinen nicht geschehen, daß die drei Curven, in welchen die Fläche S durch Σ, Σ_2, Σ_3 berührt wird, sich in einem und demselben Punkte μ schneiden, was doch der Fall sein müßte, wenn die Berührungsebene an dem Punkt μ der Fläche S zugleich auch die Flächen Σ, Σ_2, Σ_3, und mithin auch die andern gegebenen Flächen T, U, V berühren sollte.

§. 434.

Aufgabe. Eine Ebene zu construiren, welche eine Kugel und einen senkrechten Kegel zugleich berühre. *)

Fig. 92. Man lasse die beiden Projectionsebenen durch den Mittelpunkt O der gegebenen Kugel gehen, deren Halbmesser OA ist, und nehme die Horizontalebene so, daß sie senkrecht auf der Axe des Kegels stehe, dessen Spitze (S, S') und der Halbmesser seiner Grundlinie SB ist. Die Aufgabe, eine gemeinschaftliche Tangente an diese beiden Flächen zu ziehen, ist nach §. 428 eine bestimmte, weil eine der Flächen entwickelbar ist; um nun aber eine einfachere Auflösung zu erhalten, als das allgemeine Verfahren sie lehrt, nehme man an, PQR' sei die gesuchte Ebene. Sie berührt den Kegel nach einer Seite, welche in der senkrecht auf PQ stehenden Meridianebene SM liegt, so daß also der Abstand jener Berührungsebene vom Fußpunkte (S, I') der Axe eine der I'G gleiche Gerade ist, welche ebenfalls in der Meridianebene SM liegt; bringt man nun die Ebene PQR' sich selbst parallel in eine solche Lage, daß sie durch den Mittelpunkt O der Kugel geht, so wird sie sich dem Punkte (S, I') um den Kugelhalbmesser OA genähert haben, und sie kann jetzt als die Berührungsebene eines andern senkrechten Kegels betrachtet werden, dessen Erzeugende T'F' mit S'B' parallel ist, und von letzterer um OA entfernt liegt. Dieser zweite Kegel ist aber sehr leicht zu construiren, so wie auch seine durch O gehende Berührungsebene; folglich darf man jetzt nur noch eine der letzteren parallele Berührungsebene an den ersten Kegel legen.

Man nehme daher auf der Senkrechten I'G, das Stück GH = OA, und bestimme, indem man durch H die Gerade T'F' parallel mit S'B' zieht, den Kreis SF; an diesen aber ziehe man aus O die beiden Tangenten ON und OL. Zieht man nun auch an den Kreis SB zwei Tangenten, PQ und XY, parallel mit den vorhergehenden, so erhält man die horizontalen Spuren der beiden Ebenen PQR' und XYZ', welche die gegebenen Flächen *außerhalb* berühren und deren vertikale Spuren nun ebenfalls sehr leicht gefunden werden können.

§. 435.

Es gibt aber auch Ebenen, welche beide Flächen von *innen berühren*, nämlich so, daß die Flächen auf entgegengesetzten Seiten der Berührungsebene liegen. Um diese letzteren zu finden, verlängere man I'G um das

*) Diese Aufgabe ist aus der Géométrie descriptive des Hrn. Lefebure de Fourcy entlehnt.

stück $Gh = OA$ und ziehe hierauf parallel mit $S'B'$ die Gerade $t'k'$, welche den Kreis Sk bestimmen wird, n welchen man die Tangenten On und Ol ziehen muß. Wenn man hierauf, parallel mit diesen, zwei Tanenten pq und xy an den Kreis SB zieht, so erhält man die horizontalen Spuren der beiden innern Berühungsebenen.

§. 436.

Um den Berührungspunkt einer dieser vier Ebenen, z. B. der Ebene PQR', mit der Kugel zu finden, hneide man letztere durch eine auf PQ senkrechte Ebene; hierauf klappe man den Durchschnitt auf den größten orizontalkreis auf und ziehe die Tangente $D\theta$, deren Berührungspunkt θ, auf μ bezogen, die Horizontalprojecon desjenigen Punktes gibt, in welchem die Kugel von der Ebene PQR' berührt wird. Die Vertikalprojecon μ' dieses Punktes kann leicht gefunden werden.

§. 437.

Aufgabe. An zwei Kugeln eine Berührungsebene zu legen, welche durch einen gegeenen Punkt gehe.

Man nehme die Ebene, welche durch die beiden Mittelpunkte O und O' der Kugeln und durch den gege- Fig. 93.
enen Punkt A'' geht, zur Horizontalebene an. Hierauf kann man, ohne einer zweiten Projectionsebene nöthig a haben, an die beiden größten Horizontalkreise die gemeinschaftliche Tangente MNA ziehen, welche, wenn man e um $OO'A$ sich drehen läßt, eine um die beiden gegebenen Kugeln umschriebene conische Fläche erzeugt. Dieser umschriebene Kegel AMP ist hier die entwickelbare Fläche Σ des §. 426; denn er ist die Umhüllung ller Lagen, welche die vertikale Berührungsebene MNA beider Kugeln annehmen kann, indem sie sich berührend m letztere bewegt. Da also jede Berührungsebene an diesem Kegel auch die beiden Kugeln berühren wird, und a das Umgekehrte ebenfalls wahr ist, so reducirt die ursprüngliche Aufgabe sich darauf; **durch den gegebeen Punkt A'' eine Berührungsebene an den Kegel AMP zu legen.** Dieses geschieht bekanntlich, indem man aus dem Punkte, in welchem die Gerade AA'' die Ebene des Vertikalkreises MP schneidet, zwei Tangenten an letzteren zieht, zu welchem Zwecke man den Kreis MP, wie in §. 401, um seinen Durchmesser umklappen muß.

§. 438.

Noch leichter läßt sich die vorige Aufgabe auf diese reduciren; **durch die Gerade AA'' eine Berühungsebene an die Kugel O zu legen**; denn diese Ebene muß offenbar den Kegel AMP und mithin auch ie von ihm umschriebene Kugel O' berühren. Man darf daher nur (§. 403) einen zweiten Kegel $A''M''P''$ eichnen, der die Kugel O gleichfalls umschreibt, so liefert der Durchschnitt der beiden vertikalen Kreise MP und $M''P''$ die Horizontalprojection μ des Punktes, in welchem die Kugel und die gesuchte Ebene sich berühren. Die zweite Projection dieses Punktes auf einer nach Belieben genommenen Vertikalebene erhält man leicht, wenn man den Kreis MP um seinen Durchmesser aufklappt; dadurch aber ist sodann die Lage der Berührungsebene vollkommen bestimmt; es bleibt jedoch dem Leser überlassen, diese sehr einfachen Constructionen, welche zwei äußere Berührungsebenen liefern, auszuführen.

§. 439.

Man findet aber auch zwei innere Berührungsebenen, wenn man den Kegel amp betrachtet, der durch die Tangente man beschrieben wird, welche den beiden größten Horizontalkreisen O und O' gemeinschaftlich ist und zwischen ihnen liegt. Es zeigt sich alsdann, wie vorhin, daß man nur **durch A'' eine Berührungsebene**

an den Kegel amp, oder durch die Gerade aA″ eine Berührungsebene an die Kugel O legen dürfe; der Berührungspunkt λ ergibt sich sodann aus dem Durchschnitt der beiden Kreise M″P″ und mp.

§. 440.

Es ist wohl kaum nöthig, zu bemerken, daß diese vier Auflösungen sich auf zwei reduciren oder gar nicht stattfinden, je nach der Lage des gegebenen Punktes A″ in Beziehung auf beide Kugeln, oder auf die beiden innen und außen umschriebenen Kegel. Endlich wird einer dieser beiden Kegel, oder alle zwei verschwinden, wenn die gegebenen Kugeln sich schneiden, oder wenn die eine ganz innerhalb der andern liegt.

§. 441.

Aufgabe. Eine Ebene zu finden, welche drei gegebene Kugeln zugleich berühre.

§. 93. Man nehme diejenige Ebene, welche durch die Mittelpunkte O, O′, O″ der drei gegebenen Kugeln bestimmt wird, als Horizontalebene an und bemerke, daß die entwickelbaren Flächen Σ und Σ_1 (§. 431), welche um die Kugeln O und O′, ferner um O und O″ beschrieben werden müssen, hier die beiden Kegel AMP und A″M″P″ sind. Zeichnet man hierauf ihre Berührungscurven mit der Kugel O, welche hier als die vertikalen Kreise MP und M″P″ sich darstellen, so sind die beiden in μ projicirten Durchschnittspunkte dieser Kreise zugleich die Punkte, in welchen die Berührungsebenen der Kugel O den Kegel AMP sowohl als auch den Kegel A″M″P, und mithin auch die Kugeln O′ und O″, und zwar von außen, berühren.

§. 442.

Da es aber noch zwei andere, von innen um die Kugelpaare O und O′, O und O″ beschriebene Kegel gibt, welche auf eine ähnliche Art entweder unter sich oder mit den äußeren Kegeln combinirt werden können, so ergeben sich acht Auflösungen für die gegebene Aufgabe, nämlich:

zwei äußere Berührungsebenen, die man vermittelst der Kegel AMP und A″M″P″ erhält, und deren Berührungspunkte mit der Kugel O in μ projicirt sind;

zwei innere Berührungsebenen, die man aus den Kegeln AMP und a″m″p″ erhält, und deren Berührungspunkte mit der Kugel O in ν projicirt sind;

zwei innere Berührungsebenen, die man aus den Kegeln amp und A″M″P″ erhält und deren Berührungspunkte sich in λ projiciren;

zwei innere Berührungsebenen endlich, die man vermittelst der Kegel amp und a″m″p″ erhält, und deren Berührungspunkte in π projicirt sind.

§. 443.

Man bemerkt leicht, daß, wenn zwei der Kugeln sich schneiden, diese acht Berührungsebenen sich auf vier reduciren; ferner daß, wenn eine der Kugeln die beiden andern schneidet, höchstens zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen möglich sind, und endlich, daß gar keine möglich ist, wenn eine der drei Kugeln sich ganz innerhalb einer andern befindet. Außer diesem besondern Falle ist die Aufgabe auch dann allemal unmöglich, wenn die vier Berührungskreise MP, M″P″, mp, m″p″ sich nicht schneiden; und schneiden sie sich, so zeigt die Zahl der Durchschnittspunkte immer zugleich die Zahl der Auflösungen an, welche die Aufgabe zuläßt.

§. 444.

Noch unerwähnt blieben die Kegel N′A′Q′ und n′a′q′, von denen jeder um die beiden Kugeln O′ und O″ beschrieben ist. Es ist aber einleuchtend, daß jede den drei Kugeln gemeinschaftliche Berührungsebene zu-

gleich auch den Kegel A′ oder den Kegel a′ berühren muß, ſo daß man alſo das Syſtem dieſer beiden coniſchen Flächen auch mit dem Syſtem A und a oder mit dem Syſtem A″ und a″ hätte combiniren können, um die Aufgabe zu löſen. Da ferner jede Berührungsebene der drei Kugeln zugleich auch drei der umſchriebenen Kegel berührt, ſo muß ſie folglich durch deren Spitzen gehen, und weil alſo dieſe letzteren ſowohl einer Berührungsebene als auch der durch die drei Kugelmittelpunkte beſtimmten Ebene angehören, ſo kann man hieraus den Schluß ziehen, daß die Spitzen dreier von einerlei Ebene berührter Kegel ſtets in gerader Linie liegen müſſen.

Endlich erſieht man auch aus der Figur ſelbſt, daß die Spitzen der ſechs um die Kugeln beſchriebenen Kegel zu drei und drei auf den vier Geraden AA″A′, Aa′a″, A″a′a und A′a″a liegen, von denen die erſte die drei äußeren, und jede der andern eine äußere Spitze und zwei innere enthält.

§. 445.

Hieraus aber ergibt ſich, wenn man einzig diejenigen Erzeugungslinien der Kegel und diejenigen größten Kreiſe der Kugeln betrachtet, welche in der Ebene der Mittelpunkte O, O′ und O″ liegen, ein bemerkenswerther Lehrſatz der ebenen Geometrie. Da nämlich jede der Kegelſpitzen der Durchſchnitt eines, zweien größten Kreiſen gemeinſchaftlichen Tangentenpaares iſt, ſo folgt hieraus, daß, wenn man an drei beliebig in einer Ebene gezeichnete Kreiſe alle Tangenten zieht, welche je zwei von dieſen Kreiſen berühren können, alsdann die ſechs durch jene Tangentenpaare beſtimmten Durchſchnitte A und a, A′ und a′, A″ und a″, zu drei und drei auf vier Geraden liegen, von denen eine die drei äußeren und jede der andern einen äußern und zwei innere Durchſchnittspunkte enthält.

Sechster Abschnitt.

Verschiedene Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Von der Schraubenlinie und entwickelbaren Schraubenfläche.

§. 446.

Fig. 95. Die Schraubenlinie ist eine Curve, die wie AMNCD auf einem senkrechten Cylinder von beliebiger Grundlinie so gezeichnet ist, daß ihre Ordinaten (welche einerlei Richtung mit den Cylinderseiten haben) proportional mit den krummlinigen Absziſſen wachſen, welche von einem feſten Punkt der Grundlinie aus auf letzterer genommen werden, ſo daß man alſo hat:

$$\frac{MP}{AP} = \frac{NQ}{AQ} = \frac{CB}{AB} = \ldots = k \text{ oder } z = ks,$$

wenn s irgend einen beliebigen Bogen der Grundlinie, und z die zu ſeinem Endpunkt gehörige Absziſſe bezeichnet. *) Die Zahl k, welche das conſtante Verhältniß zwiſchen der Ordinate und ihrer Absziſſe für alle Punkte einer und derſelben Schraubenlinie ausdrückt, ändert ſich von einer Schraubenlinie zur andern, denn man kann auf einem und demſelben Cylinder eine unendliche Menge ſolcher Curven ziehen; jede derſelben aber iſt vollkommen beſtimmt, wenn der Quotient k und der Anfangspunkt A der Absziſſen gegeben iſt. Man ſieht übrigens leicht ein, daß die Schraubenlinie die Grundlinie des Cylinders in letzterem Punkte A ſchneiden muß, weil $z = o$ wird, wenn man in der Gleichung $z = ks$, die Größe $s = o$ ſetzt.

§. 447.

Iſt die Grundlinie des Cylinders eine geſchloſſene Curve APBA, ſo kann die veränderliche Absziſſe $AP = s$ dem Umfang p dieſer Grundlinie gleich werden. Alsdann erhält man einen Punkt D, in welchem die Schraubenlinie zum zweitenmale die Seite AF ſchneidet; und da ſolches immer wieder geſchehen wird für die Absziſſen $2p, 3p, \ldots$ ſo gibt es alſo auf der Seite AF unendlich viele Punkte, in welchen ſie von der Schraubenlinie geſchnitten wird, und welche beziehlich die Höhen

$$AD = h = pk,\ h' = 2pk,\ h'' = 3pk \ldots$$

haben; folglich ſind alle dieſe Punkte gleichweit von einander entfernt, und zwar um eine Größe h, welche der Gang der Schraubenlinie heißt. Iſt die Länge dieſes Ganges, ſo wie der Umfang der Grundlinie gegeben, ſo erhält man die Conſtante k unmittelbar, weil der Definition des §. 446 zufolge, dieſe Zahl k das Verhältniß

*) Im §. 163 wurde eine andere Definition von der Schraubenlinie gegeben, welche aber, wie man bald ſehen wird, mit der obigen in §. 446 ganz übereinſtimmt.

zwischen einer Ordinate h und der ihr zugehörigen Abszisse p ausdrückt. Wenn also z. B. die Grundlinie des Cylinders ein Kreis vom Halbmesser R ist, so erhält man

$$k = \frac{h}{2\pi R}$$

§. 248.

Tangente an einer Schraubenlinie. Da diese Curve hier nicht als Durchschnitt zweier krummen Flächen gegeben ist, so muß man, um ihre Tangente für einen beliebigen Punkt M zu erhalten, zu besondern Betrachtungen seine Zuflucht nehmen. Man denke sich, der Cylinder werde auf der Ebene, welche ihn längs der Seite PML berührt, entwickelt; diese Seite bleibt hiebei unbeweglich, und die Grundlinie APB wird eine auf PL senkrechte Gerade A′PB′, während die einzelnen Theile der andern Seiten ihre Längen behalten und parallel bleiben. Trägt man daher auf die Verwandelte der Grundlinie die Entfernungen Fig. 95.

$$PA' = PA,\ PQ' = PQ,\ PB' = PB \ldots.$$

und errichtet die Senkrechten

$$Q'N' = QN,\ B'C' = BC, \ldots.$$

so bilden die verschiedenen Punkte A′, M, N′, C′, ... die Verwandelte der Schraubenlinie auf der Entwicklung des Cylinders. Es ist aber leicht einzusehen, daß diese Verwandelte A′MN′C′ eine Gerade sein wird; denn weil die Ordinaten und die geradlinigen Abszissen dieser neuen Linie dieselbe absolute Länge haben wie die Ordinaten und die krummlinigen Abszissen der Schraubenlinie, so haben jene also auch wie diese letzteren ein constantes Verhältniß zu einander, was bekanntlich das Merkmal der geraden Linie ist.

Eben diese Gerade A′MC′ aber ist zugleich die Tangente am Punkte M der Schraubenlinie AMC; denn sie liegt erstlich in der Berührungsebene des Cylinders, welche das Flächenelement LPpl enthält; und da dieses Element während der Cylinderentwicklung unbeweglich blieb, so folgt hieraus, daß das Linienelement Mm der Curve AMC und der Geraden A′MC′ gemeinschaftlich ist; daher denn diese beiden Linien sich gegenseitig berühren.

§. 449.

Um also eine Tangente an die Schraubenlinie zu ziehen, darf man nur in der Berührungsebene des Cylinders ein rechtwinkliges Dreieck MPA′ construiren, das die Ordinate MP des Berührungspunktes zur Höhe und zur Grundlinie eine Gerade A′P hat, welche der rectificirten Abszisse AP gleich ist; alsdann wird die Hypotenuse dieses Dreiecks die verlangte Tangente sein. Man kann dieses Verfahren kurz so ausdrücken: die Subtangente A′P ist gleich der krummlinigen Abszisse AP des Berührungspunktes; aus dieser Regel ergibt sich leicht der Fußpunkt A′ der Tangente, und da der Berührungspunkt M bekannt ist, so ist also die Lage der Tangente vollkommen bestimmt.

Zugleich sieht man, daß die auf diese Art bestimmte Tangente A′M an Länge dem Bogen AM der Schraubenlinie gleich ist; denn nach dem vorigen Paragraphen ist die eine die Verwandelte der andern.

§. 450.

Der Winkel MA′P, den die Tangente mit der Ebene der Grundlinie des Cylinders bildet, ist durch die Formel

$$\text{tang. } A' = \frac{MP}{A'P} = \frac{MP}{AP} = k$$

gegeben, und da k für alle Punkte einer und derselben Schraubenlinie constant ist (§. 446), so folgt hieraus,

daß die verſchiedenen an dieſe Curve gezogenen Tangenten gleiche Neigung gegen die Ebene der Grundlinie des Cylinders haben. Es ſchneidet mithin auch jede dieſer Tangenten die Erzeugende des Cylinders unter einem conſtanten Winkel A'MP, woraus erhellet, daß die Definition des §. 163 mit der des §. 446 völlig übereinſtimmig iſt.

§. 451.

Fig. 94. Um nun die Projectionen einer Schraubenlinie zu conſtruiren, nehme man als Grundlinie des ſenkrechten Cylinders, auf welchem dieſe Curve gezeichnet werden ſolle, einen Kreis ABCD, deſſen Ebene als horizontale Grundebene dienen mag. Ferner ſei (A, A') der Anfangspunkt und A'A'' die Länge eines Schraubenganges. Nun theile man dieſe Länge A'A'' oder O'O'' in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile, z. B. in ſechszehn und die Kreislinie ABCD ebenfalls in ſechszehn gleiche Theile AL, LM, MN....; hierauf errichte man in dieſen Theilpunkten die vertikalen Ordinaten P'L', Q'M', R'N',... deren Höhen, beziehlich gleich $^1/_{16}$, $^2/_{16}$, $^3/_{16}$,... der Länge O'O'' ſeien; ſo erhält man verſchiedene Punkte der Vertikalprojection A'L'M'N'C'A''.... der geſuchten Schraubenlinie.*) Was die Horizontalprojection dieſer Curve betrifft, ſo iſt ſolche offenbar die Grundlinie ABCD des ſenkrechten Cylinders.

§. 452.

Die Tangente der Schraubenlinie für irgend einen Punkt (M, M') erhält man, wenn man auf der Tangente, die dem Punkt M der Grundlinie entſpricht, eine Länge MT nimmt, die der Länge des rectificirten Bogens MA gleich iſt (§. 449); alsdann iſt der Punkt (T, T') der Fußpunkt der geſuchten Tangente, und MT und MT' ihre Projectionen.

§. 453.

Conſtruirt man auf dieſe Art verſchiedene Tangenten an die Schraubenlinie, ſo werden alle Fußpunkte derſelben in einer Curve ATGH... liegen, für welche MT = MA, BG = BA, EH = EA.... iſt; mithin iſt dieſe Curve nichts anderes als die Evolvente des Kreiſes ABCD (§§. 199, 201) und zugleich iſt ſie auch die horizontale Spur einer Fläche, welche der geometriſche Ort aller Tangenten an der Schraubenlinie iſt.

---

*) Dieſe Projection iſt eine Sinusoide; denn bezieht man ſie auf die beiden Axen B'X und B'Z, deren Anfangspunkt B' ſei, und nimmt die krummlinigen Abſciſſen der Schraubenlinie auf dem Kreisſchnitte, den die horizontale Ebene B'X mit dem Cylinder bildet, ſo hat man für jeden Punkt (E, E') die Gleichungen

$$BF' = \text{sin. } BF, \quad \frac{E'F}{BE} = k,$$

oder, wenn man die Sinus für den Halbmeſſer 1 nimmt,

$$x = R \text{ sin. } \frac{s}{R}, \quad \frac{z}{s} = \frac{h}{2\pi R};$$

eliminirt man nun den Bogen s, ſo erhält man

$$x = R \text{ sin. } \left(2\pi \frac{z}{h}\right)$$

als Gleichung für die Projection der Schraubenlinie auf der Ebene der beiden Axen B'X und B'Z. Fügt man nun noch die Gleichung des Cylinders hinzu, nämlich

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

und combinirt ſie mit der vorhergehenden, ſo findet man

$$y = R \cos \left(2\pi \frac{z}{h}\right)$$

Man hat alſo jetzt die 3 Projectionen der Schraubenlinie auf den rechtwinkligen Coordinatebenen, deren Anfangspunkt (O, B') iſt.

Dieſe Fläche, von welcher gleich nachher die Rede ſein wird, heißt die entwickelbare Schraubenfläche (héliçoïde développable).

§. 454.

Es iſt eine Schraubenlinie (AMBCDA, A′M′C′A″C″..) gegeben; man ſoll eine Tangente an dieſe Curve ziehen, welche einer gegebenen Ebene U′VS parallel ſei. Man erinnere ſich zuerſt, daß alle Tangenten der Schraubenlinie einen conſtanten Winkel mit der Vertikalen bilden (§. 440), und daß ſie alſo beziehlich parallel ſein müſſen mit den Erzeugenden eines Umdrehungskegels, deſſen Axe vertikal iſt, und deſſen halber Mittelpunktswinkel (oder Winkel an der Spitze) der gemeinſchaftlichen Neigung der Tangenten gegen die Cylinderſeiten gleich iſt. Um aber dieſe Neigung zu finden, conſtruire man insbeſondere die Tangente an den Punkt (B, B′), weil dieſe mit der Vertikalebene parallel ſein und mithin den geſuchten Winkel in ſeiner wahren Größe darſtellen wird: zu dieſem Zwecke nehme man auf der an den Punkt B des Kreiſes ABCD gezogenen Tangente die Länge BG gleich dem rectificirten Bogen AB und projicire den Punkt G auf die Projectionsaxe in G′, ſo erhält man die zu (B, B′) gehörige Tangente. Zieht man hierauf mit dieſer durch den Punkt (O, B′) eine Parallele (Og, B′G′) und läßt letztere ſich um die Vertikale O drehen, ſo wird ſie den vorhin erwähnten Kegel beſchreiben, deſſen Grundlinie der mit Og beſchriebene Kreis iſt. Dieſen Kegel ſchneide man durch eine mit U′VS parallele und durch die Spitze (O, B′) gehende Ebene, und ſuche nach §. 23 ihre horizontale Spur $\alpha I \beta$, ſo erhält man $O\alpha$ und $O\beta$ als diejenigen Seiten des Kegels, in welchen er von jener Ebene geſchnitten wird. Dieſe Seiten aber müſſen parallel mit der Ebene SVU′ ſein, daher man alſo die Horizontalprojectionen der mit SVU′ parallelen Tangenten erhält, wenn man an den Kreis ABCD die Tangente MT parallel mit $O\alpha$ und die Tangente EH parallel mit $O\beta$ zieht. Um nun auch die Vertikalprojectionen dieſer Tangenten zu finden, mache man MT = MA und EH = EBA, ſo erhält man ihre Fußpunkte (T, T′) und (H, H′), und hieraus (MT, MT′) und (EH, EH′) als die Vertikalprojectionen der geſuchten Tangenten. Außer dieſen aber gibt es noch unendlich viele Tangenten, welche den ſo eben gefundenen parallel ſind, und welche den Punkten M″ und E″, M‴ und E‴, ... auf den verſchiedenen Windungen der in's Unendliche fortgehenden Schraubenlinie entſprechen. Fig. 94.

Man bemerke auch, daß man auf der Horizontalebene noch eine zweite mit $O\alpha$ parallele Tangente $\mu\theta$ hätte ziehen können; betrachtet man aber die Gerade $\mu\theta$ als die Horizontalprojection einer Tangente an der Schraubenlinie, ſo ergibt ſich (μ, μ') als der Berührungspunkt dieſer Tangente, deren Vertikalprojection offenbar nicht parallel ſein kann mit der Vertikalprojection der Erzeugenden $O\alpha$; daher denn $\mu\theta$ keine der Aufgabe entſprechende Tangente iſt. Eine ähnliche Zweideutigkeit ergibt ſich für die Erzeugende $O\beta$; ſie hebt ſich aber leicht durch die Bedingung, daß die Projectionen der Tangente und der Kegelſeite auf beiden Grundebenen zugleich parallel ſein müſſen.

§. 455.

Die Aufgabe: eine Tangente an die Schraubenlinie zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel ſei, iſt im Allgemeinen unmöglich, wenn nicht dieſe Gerade mit der Vertikalen einen Winkel bildet, welcher der gemeinſchaftlichen Neigung aller Tangenten an der Schraubenlinie gegen die Cylinderſeiten gleich iſt; iſt aber dieſe Bedingung wirklich erfüllt, ſo darf man nur an den Kreis ABCD eine mit der Horizontalprojection der gegebenen Geraden parallele Tangente ziehen, aus welcher man alsdann, wie vorhin, auch die Vertikalprojection der geſuchten Tangente erhält.

§. 456.

Die entwickelbare **Schraubenfläche** ist eine krumme Fläche, welche dadurch erzeugt wird, daß eine bewegliche Gerade von unbestimmter Länge an einer Schraubenlinie so fortgleitet, daß sie letztere stets berührt. Diese Schraubenfläche wird hier entwickelbar genannt, theils um sie von einer andern windschiefen Schraubenfläche zu unterscheiden, von welcher später die Rede sein wird, theils auch weil sie der Bedingung entwickelbarer Flächen, daß zwei unendlich nahe Erzeugungslinien sich stets in einer und derselben Ebene befinden müssen (§. 181), vollkommen entspricht.

§. 96. Um diese Fläche graphisch darzustellen, könnte man zuerst die Schraubenlinie ($A\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\pi A$, $A'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi' A''$) zeichnen, und hierauf ihre Tangenten in den verschiedenen Punkten (A, A'), (β, β'), (γ, γ') .... construiren; bequemer aber und genauer wird es sein, diese Geraden dadurch zu bestimmen, daß man unmittelbar ihre Spuren auf der horizontalen Projectionsebene und auf einer andern Horizontalebene $a'A''l'$ sucht, welche um die Länge des Ganges $A'A''$ der Schraubenlinie höher als erstere Ebene liegt; denn alsdann erhält man die Vertikalprojection dieser Schraubenlinie direct aus den Spuren jener verschiedenen Tangenten, wenn solche in hinlänglicher Anzahl gezeichnet werden. Nun liegen aber nach §. 453, die horizontalen Spuren dieser Erzeugenden auf der Kreisevolvente ABCDEF ...., welche man erhält, wenn man auf die Tangenten an der Grundlinie des Cylinders die Längen

$$\beta B = A\beta,\ \gamma C = A\gamma,\ \delta D = A\delta,\ \ldots$$

trägt. Um nun aber auch ihre Spuren auf der obern Horizontalebene $a'A''$ zu finden, erinnere man sich daß die Tangente der Schraubenlinie im Punkt (A, A') mit der Vertikalen einen durch die Gleichung

$$\text{tang. } A''A'a' = \frac{1}{k},\ \text{oder}\ \frac{A''a'}{A''A'} = \frac{2\pi R}{h}$$

bestimmten Winkel bilden muß (§. 450), und da hier $A''A' = h$, so folgt hieraus, daß die unbekannte Länge $A''a'$ oder Aa dem Umfang des mit OA beschriebenen Kreises gleich sein müsse: mithin kann die erste Erzeugende der Schraubenfläche unmittelbar construirt werden. Nun aber wird, bei den verschiedenen Lagen, in welche diese bewegliche Gerade kömmt, derjenige Theil derselben, welcher zwischen die beiden Horizontalebenen $L'A'$ und $a'A''$ fällt, eine unveränderte Länge behalten, weil er eine stets gleiche Neigung gegen diese parallelen Ebenen behält (§. 450); es werden also auch die horizontalen Projectionen dieser Stücke eine der Aa gleiche Länge behalten. Wenn man daher, von der untern Evolvente ABCDEF .. ausgehend, auf die Kreistangenten die Längen

$$Aa,\ Bb,\ Cc,\ Dd,\ Ee,\ Ff,\ \ldots.$$

trägt, welche alle der mit OA beschriebenen, rectificirten Kreislinie gleich sind, und hierauf die Punkte a, b, c, d, e, ... auf die obere Horizontalebene $a'A''$, die unteren Endpunkte A, B, C, D, E, ... aber auf die Projectionsaxe projicirt, so erhält man unmittelbar die Vertikalprojectionen

$$A'a',\ B'b',\ C'c',\ D'd',\ E'e',\ F'f',\ \ldots$$

der Erzeugungslinien der Schraubenfläche; die aufeinanderfolgenden Durchschnitte dieser Geraden aber bilden die Schraubenlinie $A'\beta'\eta'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi' A''$, an welcher jene Erzeugungslinien Tangenten sind.

§. 457.

§. 96. Die Curve abcdef . . , welche die Horizontalprojection des Durchschnittes ist, den die Schraubenfläche mit der obern Ebene bildet, muß nothwendig eine Evolvente des Kreises OA sein, die mit der ersteren ABCDE symmetrisch ist. Denn weil z. B. die Dδd der ganzen Kreislinie, und der Theil Dδ dem Bogen Aδ gleich ist, so muß auch der Rest δd dem Bogen $\delta\lambda\pi A$ gleich sein; es wird also diese in der obern Ebene $a'A''$ liegende

Spirale sich im Punkte (A, A″) endigen, wenn man, wie es hier in der Figur geschehen ist, nur eine einzige Umdrehung der beweglichen Erzeugenden in Betracht zieht.

§. 458.

Hieraus aber ergibt sich ein leichtes Mittel, die krumme Fläche, von der hier die Rede ist, wirklich im Raume zu construiren. Man nehme zwei ebene Tafeln, verzeichne auf diesen die beiden Spiralen ABCDEF... und abcdef...; und bringe sie hierauf vermittelst vertikaler Stäbe in eine parallele und symmetrische Lage gegen einander. Verbindet man nun durch ausgespannte Fäden, die einander ensprechenden Punkte A und a, B und b, C und c, D und d, . . ., so bilden alle diese Fäden zusammen die entwickelbare Schraubenfläche, deren Wendecurve (arête de rebroussement) die, durch die auf einander folgenden Durchschnitte jener Fäden gebildete Schraubenlinie sein wird. Schneidet man aus der oberen Tafel die mit OA beschriebene Kreisfläche wirklich aus, so wird man diese Schraubenlinie sehr deutlich wahrnehmen, und die Benennung, welche man in allen entwickelbaren Flächen der aus den Durchschnitten der Erzeugungslinie gebildeten Curve gibt, augenscheinlich gerechtfertigt finden. Die ganze krumme Fläche zeigt nämlich zwei von einander verschiedene Mäntel (nappes), welche aber längs jener Curve sich an einander anschließen, in einander übergehen.

§. 459.

Um diesen wichtigen Umstand des Uebergangs (rebroussement) der Mäntel in einander zu beweisen, con- Fig. 96.
struire man den Durchschnitt, den irgend eine Horizontalebene X′Y′ mit der Schraubenfläche erzeugt. Projicirt man auf die untere Ebene die Durchschnittspunkte der Ebene X′Y′ mit den Vertikalprojectionen der Erzeugenden, so erhält man eine aus zwei Aesten XWλ und λZY bestehende Spirale, von denen der eine auf dem oberen Mantel liegt, der durch die über ihren Berührungspunkten mit der Schraubenlinie befindlichen Theile der Erzeugenden gebildet wird; der andere Ast hingegen liegt auf dem unteren Mantel. Diese Spirale nun ist ebenfalls eine Evolvente des Kreises OA. Denn geht die Ebene X′Y′ z. B. durch die Mitte λ′ der Höhe A′A″, so schneidet sie alle Erzeugungslinien in zwei gleiche Theile; ihr Durchschnittspunkt mit der Geraden (Dd, D′d′) wird also so fallen, daß DW der halben Kreislinie OA gleich ist; weil aber der Theil Dδ = Aδ ist, so muß der Rest δW dem Bogen δλ gleich sein. Eben so findet man, daß AX = Aδλ, und Zϱ = ϱλ, ... Mithin ist der horizontale Durchschnitt eine Evolvente des Kreises OA, deren Anfangspunkt in λ ist; und die Form der Spirale in diesem Punkte zeigt deutlich, daß die beiden Mäntel der Schraubenfläche in einander übergehen, wenn sie sich der Schraubenlinie nähern.

§. 460.

Die Durchschnitte zu finden, welche in der Schraubenfläche durch einen Cylinder FWZp erzeugt werden, der mit demjenigen Cylinder, welcher die Schraubenlinie enthält, concentrisch ist. Man suche zuerst die Punkte F, α, θ, . . . in welchen der Kreis FWZp die untern Theile der Erzeugungslinie auf der Horizontalebene schneidet, und beziehe diese Punkte auf die Vertikalprojectionen der nämlichen Erzeugenden; hierauf thue man das Nämliche in Beziehung auf die Punkte ξ, η, W, ... in welchen die oberen Theile der Erzeugenden von dem gegebenen Cylinder geschnitten werden, so erhält man die beiden Curven

(Fαθ Zω, F′α′θ′Z′ω′) und (ξηW ςp, ξ′η′W′ς′p′)

von denen die eine auf dem unteren, die andere auf dem oberen Mantel der Schraubenfläche liegt, und welche gleichfalls Schraubenlinien sind von der nämlichen Ganglänge wie die Schraubenlinien (Aβγδ, A′β′γ′δ′); denn es sind die Theile (φF, φ′F′), (λα, λ′α′), (πθ, π′θ′) der Erzeugenden alle von gleicher Länge, weil ihre Horizontalprojectionen φF, λα, πθ, ... alle einander gleich sind, und weil alle jene Theile einerlei Neigung

gegen die Horizontalebene haben. Wenn also die begrenzte Gerade (φF, φ'F') die gegebene Schraubenl durchläuft, daß sie letztere stets mit dem beweglichen Endpunkte (φ, φ'), berührt, so wird ihr anderer En (F, F') sich um die Höhenunterschiede der Punkte (φ, φ'), (λ, λ'), (θ, θ'), ... erheben; diese Höhe schiede aber sind den Bögen $\varphi\lambda$, $\varphi\lambda\pi$, . . . proportional, welche ihrerseits wieder mit den Bögen Fα, einerlei Verhältniß haben; folglich stehen letztere selbst in Proportion mit den Ordinaten der Punkte (α (θ, θ'), ... und die Curve (F$\alpha\theta$, F'$\alpha'\theta'$) ist mithin eine Schraubenlinie von der nämlichen Gan wie die Curve (A$\beta\gamma$, A'$\beta'\gamma'$), weil am Ende einer Umdrehung die beiden Punkte (F, F') und (φ, φ um dieselbe Größe h erhoben haben.

Das nämliche kann auch für den Schnitt ($\xi\eta$W, $\xi'\eta'$W') auf dieselbe Art erwiesen werden.

§. 461.

96. Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar, daß, wenn eine bewegliche und unbegrenzte Gerade F'φ'f') so auf einer Schraubenlinie (A$\beta\gamma\delta$. ., A'$\beta'\gamma'\delta'$. .) hingleitet, daß sie letztere immer mit und demselben Punkte berührt, alsdann jeder andere Punkt (F, F') der beweglichen Geraden ebenfalls Schraubenlinie beschreiben werde (§. 460), von der nämlichen Ganglänge wie die erste. Bewe aber die Tangente, ohne zu gleiten, so über die Schraubenlinie hin, daß jedes Element der Geraden und nach mit einem Elemente der Curve zusammenfällt, so bleibt irgend ein Punkt (F, F') der beweglich raden stets in derselben Horizontalebene und beschreibt daselbst eine Evolvente (§. 453) desjenigen K welcher dem Cylinder der ersten Schraubenlinie als Grundlinie dient.

§. 462.

Die Berührungsebene an irgend einem Punkt (θ, θ') der Schraubenfläche ist dieselbe wie für andern Punkt der Erzeugenden (Pθp, P'θ'p'), wie solches in §. 177 für jede entwickelbare Fläche er worden; die gesuchte Ebene enthält mithin auch die an die Spirale ABCLP gezogene Tangente PV, die horizontale Spur der Berührungsebene sein wird. Diese Ebene ist somit also hinreichend bestimmt. D ferner die Tangente Pπ der Evolute A$\beta\lambda\pi$ zugleich eine Normale der Evolvente ABCLP ist (§. 197), s also die Spur PV der Berührungsebene senkrecht auf der Erzeugenden (Pπ, P'π'), und mithin enthäl Ebene den Halbmesser (Oπ, O'π') des Cylinders. Hieraus aber folgt, daß die Berührungsebene der S benfläche bestimmt wird, durch die Erzeugende, welche den gegebenen Berührungspunkt enthält und dur Cylinderhalbmesser, der nach demjenigen Punkte gezogen ist, in welchem jene Erzeugende und die Wend sich berühren.

§. 463.

Aus dem vorigen Paragraphen ergibt sich, daß alle Berührungsebenen der Schraubenfläche mit der zontalebene einen constanten Winkel bilden, welcher dem Neigungswinkel der an die ursprüngliche Schra linie gezogenen Tangente gleich ist. Da ferner jede dieser Ebenen zwei unendlich nahe, die Schraubenlin rührende Erzeugungslinien enthält, so ist sie nichts Anderes als die Krümmungsebene (plan osculateur) Curve (§. 167) und die Schraubenfläche ist also die Umhüllung aller Krümmungsebenen der Wendecurve dieses überhaupt bei allen entwickelbaren Flächen der Fall ist (§. 181).

§. 464.

Der sichtbare Umriß der Schraubenfläche auf der Vertikalebene wird von den Geraden (L1, L'1'), A'a'), (AU, A'U') gebildet, weil die denselben entsprechenden Berührungsebenen senkrecht auf der Vertikal

en; ein Theil der letzten beiden Geraden wird jedoch durch die erste verdeckt und ist daher unsichtbar. Den tbaren Umriß auf der Horizontalebene bildet erstlich die Schraubenlinie ($A\beta\gamma\delta\lambda$, $A'\beta'\gamma'\delta'\lambda'$), obgleich die den nkten dieser Curve entsprechenden Berührungsebenen der Schraubenfläche nicht vertikal sind, wie es doch allgemeine Regel des §. 106 erfordert, weil nämlich hier der besondere Fall eintritt, daß die sichtbaren Theile Fläche in der Wendecurve liegen; ferner gehören noch zu diesem Umriß die Spiralen ABCGQRS und clpqrA, welche den hier betrachteten Theil der krummen Fläche begrenzen, und von welchen die erste nur kweise angegeben ist, weil ein Theil derselben durch die zweite verdeckt wird. Aus diesen Bemerkungen wird nun dem Leser ein Leichtes sein, sich über die voll und punktirt gezeichneten Theile der Figur Rechenschaft ulegen.

§. 465.

Entwicklung der Schraubenfläche. Diese könnte wie bei jeder entwickelbaren Fläche ausgeführt Fig. 96.
den, wenn man eine ebene, der Fläche angehörige Curve ABCDGL in so kleine Bögen theilte, daß statt er auch ihre Sehnen genommen werden könnten; man erhielte auf diese Art die in $D\delta C$, $E\varepsilon D$, $F\varphi E$, ... ieirten elementaren Sectoren, die man als Dreiecke betrachten könnte, deren Seiten durch ihre Projectionen eben sind. Construirte man nun auf einer Ebene alle diese Dreiecke gehörig an einander, so würden sie zumen die Entwicklung der Schraubenfläche darstellen. Bei dieser Verfahrungsweise aber kann man einer Anfung von Fehlern nicht entgehen, und es wäre daher besser, wenn man zum Voraus wüßte, welche Form auf der Fläche gegebene Curve bei ihrer Verwandlung annimmt, wie solches bei den Cylindern und Kegeln mnt war (§§. 243 und 251).

§. 466.

Nun aber verwandeln sich bei der Entwicklung der bisher betrachteten (entwickelbaren) Schraubenfläche, e Schraubenlinien in concentrische Kreise. Denn stellt man sich die Wendecurve ($A\beta\gamma\delta$, ... $A'\beta'$ ...) in gleiche Elemente getheilt vor, die in $A\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, ... projicirt sind, so ist leicht einzusehen, daß dieser Linie von doppelter Krümmung alle Contingenzwinkel gleich sein müssen. Diese Winkel aber, che bei andern, auf irgend eine entwickelbare Fläche gezeichneten Curven ihre Größe bei Entwicklung der Fläche öhnlich ändern, bleiben hier unverändert, weil sie der Wendecurve angehören (§. 179); die Schraubenlinie $\beta\gamma\delta$, ... $A'\beta'\gamma'\delta'$ ...) verwandelt sich also in eine ebene Curve, die, weil sie durchaus gleiche Contingenzkel hat, von einförmiger Krümmung §. 198), d. h. ein Kreis sein muß.

Die Verwandelte einer andern auf der nämlichen Fläche liegenden Schraubenlinie ($F\alpha\theta Z\omega$, $F'\alpha'\theta'Z'\omega'$) ilt man, wenn man auf der Entwicklung Tangenten an den Kreis zieht, in welchen die Schraubenlinie $\beta\gamma$, ... $A'\beta'\gamma'$ ...) sich verwandelte, und hierauf diese Tangenten den Theilen (φF, $\varphi' F'$), ($\lambda\alpha$, $\lambda'\alpha'$), , $\pi'\theta'$) ... der Erzeugenden gleich macht. Da aber diese letzteren Theile alle gleiche Länge haben (§. 460), müssen ihre Endpunkte in einer Kreislinie liegen, welche mit ersterer concentrisch ist; mithin ꝛc.

§. 467.

Um nun diese Eigenschaft der Schraubenlinien für die Entwicklung der Schraubenfläche auf einer ihrer Fig. 96.
ihrungsebenen zu benützen, wähle man die Ebene $LL'\lambda'$, welche senkrecht auf der Vertikalebene steht, und beiden Geraden ($L\lambda$, $L'\lambda'$), ($\psi\alpha$, $L'\alpha'$) enthält, welche die in $A\beta\lambda$ und $F\alpha\theta$ projicirten Schraubenlinien hren. Da nun diese Geraden nach der Entwicklung wieder als Tangenten an den beiden Kreisen, in welche Schraubenlinien sich verwandeln, erscheinen müssen, so darf man nur die Ebene $LL'\lambda'$ um LL' auf die izontalebene aufklappen, um diese Tangenten $L\lambda''$ und $\psi\alpha''$ zu erhalten; und errichtet man nun auf letzteren

Geraden die Senkrechten $\lambda'' O''$ und $\alpha'' O''$, so erhält man aus ihrem Durchschnitt O'' den Mittelpunkt und die Halbmesser der beiden kreisförmigen Verwandelten.

g. 97. Nun beschreibe man mit den Halbmessern $O_2 \lambda_2 = O'' \lambda''$ und $O_2 \alpha_2 = O'' \alpha''$ zwei concentrische Kreise, und suche auf der innern Kreislinie Bögen von der nämlichen Länge wie die in $A\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, ... projicirten Bögen der Schraubenlinie. Da nun die halbe Schraubenlinie ($A\beta\gamma\lambda$, $A'\beta'\gamma'\lambda'$) an Länge ihrer Tangente ($L\lambda$, $L'\lambda'$) gleich ist (§. 449), so nehme man die Tangente $\lambda_2 L_2$ gleich $\lambda' L'$, theile diese Gerade $\lambda_2 L_2$ in acht gleiche Theile und trage diese auf der innern Kreislinie herum von λ_2 bis A_2 und A_3, so ist der Kreisbogen $A_2 \lambda_2 A_3$ die Verwandelte der Schraubenlinie ($A\beta\gamma A$, $A'\beta'\gamma' A''$). Hierauf ziehe man die Tangenten $\beta_2 B_2$, $\gamma_2 C_2$, $\delta_2 D_2$, ... und mache sie gleich 1, 2, 3, ... von den Theilen der $\lambda_2 L_2$, so erhält man die wahren Längen der Erzeugenden, welche zwischen der Wendecurve und der Horizontalebene enthalten sind. Der untere Mantel der Schraubenfläche zeigt sich also entwickelt unter der Form

$$A_2 \beta_2 \gamma_2 \lambda_2 A_3 U_2 T_2 L_2 C_2 B_2 A_2,$$

deren äußerer Umriß offenbar die Evolvente des Kreises $A_2 \lambda_2 A_3$ ist, während die andere Kreislinie $F_2 \alpha_2 \theta_2 \omega_2$ sich als Verwandelte der Schraubenlinie ($F\alpha\theta\omega$, $F'\alpha'\theta'\omega'$) darstellt. Die Entwicklung des obern Mantels der Schraubenfläche erhielte man, wenn man jede Erzeugende $F_2 \varphi_2$ so weit verlängerte, bis ihre ganze Länge $F_2 f_2$ der doppelten $L_2 \lambda_2$ gleich wäre.

§. 468.

Man hätte auch, ohne die zweite Schraubenlinie ($F\alpha\theta$, $F'\alpha'\theta'$) zu Hilfe zu nehmen, den Halbmesser $O_2 \lambda_2 = O'' \lambda''$ des Kreises finden können, in welchen sich die erste Schraubenlinie ($A\beta\gamma\lambda$, $A'\beta'\gamma'\lambda'$) verwandelt, indem dieser Halbmesser genau der Krümmungshalbmesser (§. 198) eben dieser Schraubenlinie sein muß. Denn aus §. 179, Anmerk. ist bekannt, daß bei der Entwicklung einer Fläche die Wendecurve ihre Contingenzwinkel und Bogenlängen beibehält; sie behält also ihre vorige Krümmung und verliert nur ihre Windung (torsion), wie später (§. 654) noch genauer erörtert werden wird. In §. 676 aber wird gezeigt werden, daß der Krümmungshalbmesser einer Schraubenlinie durch die Formel

$$\varrho = R\,(1 + \operatorname{tang.}^2 \omega)$$

gegeben ist, in welcher ω den Winkel bezeichnet, den die Tangente der Schraube mit der Ebene der orthogonalen Basis des Cylinders bildet, und R den Halbmesser desselben.*) Dieser Ausdruck aber läßt sich sehr leicht con-

*) Will man diese Formel direct finden, so kann es auf folgende, von Hr. Catalan, Repetenten an der polyt. Schule, mitgetheilte Art geschehen. Es seien MP und PQ (Fig. 98.) die Projectionen zweier gleicher Elemente der Curve, die dem Punkte (P, P') entsprechen, für welchen die Krümmungsebene den Halbmesser (PO, P') des Cylinders enthält (§. 463), und jene beiden Elemente auf die Gerade $M'P'Q'$ projicirt, welche mit der Cylinderbasis den Winkel ω macht. Läßt man nun die Krümmungsebene sich um die Gerade (PO, P') drehen, bis sie horizontal wird, so erscheinen beide Elemente in Pm und Pq aufgeklappt und errichtet man in ihren Mitten Senkrechte, so erhält man $P\omega$ oder $\frac{1}{2} PF$ als Krümmungshalbmesser. Nun ist offenbar

$$2\varrho = PF = \frac{(Pm)^2}{PH},\quad 2R = PG = \frac{(PM)^2}{PH},$$

hieraus aber folgt, da PM die Projection der Geraden $P'M' = Pm$ ist,

$$\frac{\varrho}{R} = \left(\frac{Pm}{MP}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\omega} = 1 + \operatorname{tang}^2\omega.$$

Man kann auch diese Methode mit der in §. 198 gefundenen allgemeinen Formel $\varrho = \frac{ds}{\varepsilon}$ verbinden, wobei man zu bemerken hat, daß hier der Contingenzwinkel ε seiner wahren Größe nach das Supplement von mPq ist; nun ist

$$\frac{PH}{Pm} = \cos\left(\frac{180^0 - \varepsilon}{2}\right) = \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ und } PH = \frac{PM^2}{2R} = \frac{ds^2\cos^2\omega}{2R}; \text{ woraus folgt:}$$

$$\varepsilon = \frac{ds\cos^2\omega}{R}, \text{ und } \varrho = \frac{R}{\cos^2\omega} = R\,(1 + \operatorname{tang}^2\omega).$$

iren; denn zieht man durch E', Fig. 96., und parallel mit der Tangente L'λ' die Gerade E'I' und errichtet
f dieſer die Senkrechte I'K', ſo ergibt ſich aus der Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke der Ausdruck

$$A'K' = A'E' \text{ tang.}^2 \omega = R \text{ tang.}^2 \omega;$$

raus aber ergibt ſich für den Krümmungshalbmeſſer der Schraubenlinie: $\varrho = E'K'$. Mit dieſer Länge nun,
liche gleich O"λ" ſein muß, beſchreibe man den Kreis der Fig. 97., und nehme die übrigen graphiſchen Ope-
ionen, wie oben geſchehen, vor.

Zweites Kapitel.

Von den Epicycloiden.

§. 469.

Eine bewegliche Curve xay rollt über eine feſte Curve XAY, wenn gleiche Elemente, wie ab = AB, Taf. 43.
= BC, cd = CD ... u. ſ. w. beziehungsweiſe ſo aufeinander zu liegen kommen, daß der Punkt b mit B, Fig. 1.
rauf c mit C, d mit D u. ſ. f. zuſammentrifft. Es kommt auf das Gleiche heraus, wenn man ſagt, der
rührungspunkt, der gegenwärtig in A und a iſt, durchlaufe in derſelben Zeit auf beiden Curven zumal gleiche
ume; während, wenn dieſe Räume ungleich wären und der Punkt b z. B. mit C zuſammenträfe, dieß ein
llen und Gleiten zugleich der einen Curve über die andere wäre. In ein einfaches Gleiten, ohne Rotation,
rde ſich endlich die Bewegung verwandeln, wenn ein und derſelbe Punkt a der beweglichen Curve xay nach
b nach mit den Punkten B, C, D ... zuſammenträfe. Dieſe Annahmen gelten für windſchiefe Curven ſo gut
e für ſolche, welche in einer oder in verſchiedenen Ebenen liegen, vorausgeſetzt, daß die bewegliche Curve ſtets
e gemeinſchaftliche Tangente mit der feſten habe.

§. 470.

Während der Rotation der Curve xay wird irgend ein feſter und mit ihr fortgenommener Punkt m der-
ben im Raume eine andere Curve mz beſchreiben, deren Conſtruction im Folgenden an verſchiedenen Beiſpielen
zeigt werden ſoll; in allen Fällen aber wird die, irgend einer Lage entſprechende Tangente mt ſtets ſenkrecht
in auf der Geraden Am, welche den erzeugenden oder graphiſchen Punkt mit dem jeweiligen Berührungs-
nkte verbindet. Denn wenn die beiden Curven xay und XaY ſich in A berühren, ſo haben ſie daſelbſt ein
meinſchaftliches Element AA'; während nun die beiden Elemente, welche in AA' in eines zuſammenfielen, ſich
nen, und bis die beiden nächſten Elemente ab und AB zuſammenfallen, bleibt der Scheitel A unbeweglich
d der graphiſche Punkt m beſchreibt einen unendlich kleinen Bogen mm', welcher offenbar auf der dem Halb-
ſſer Am entſprechenden Kugel liegt. Mithin wird die Tangente mt, welche die Verlängerung jenes Elementes
m' ſein muß, ſenkrecht auf der Geraden Am ſtehen, und dieſe iſt alſo eine Normale an der Curve mm'z.
) iſt leicht einzuſehen, wie dieſer Beweis ſich auch auf jeden Punkt n, der zwar nicht auf dem Umfang der
llenden Curve xy liegt, aber feſt mit ihr verbunden iſt, anwenden läßt: derſelbe beſchreibt eine andere Curve
n, an welcher wieder An die Normale iſt. Ueberhaupt alſo: die Gerade, welche den Berührungspunkt
r rollenden Curve mit dem graphiſchen Punkte verbindet, iſt eine Normale an der von
ßterem Punkte beſchriebenen Curve.

Will man dem vorhergehenden Beweise alle Strenge geben, deren er fähig ist, so muß man zuerst statt der beiden Curven zwei Polygone annehmen, mit beziehungsweise gleichen Seiten. Läßt man nun das eine über das andere hinrollen, so daß ihre Ebenen entweder einen constanten oder einen veränderlichen Winkel miteinander bilden, so wird der Punkt m eine gebrochene Linie m m′ m″ ... beschreiben, die aus sphärischen Bögen mit den aufeinander folgenden Mittelpunkten A, B, C, ... besteht, und es wird die Tangente m t an dem Punkte m senkrecht auf A m sein. Nun ist klar, daß letzterer Umstand fortbestehen muß, was auch die Größe der Seiten und der Winkel beider Polygone sein mag: je größer nun die Winkel und je kleiner die Seiten werden, desto mehr nimmt die Länge der Bögen m m′, m′ m″, ... ab; zwei zunächst aufeinander folgende Halbmesser nähern sich immer mehr der Gleichheit, und die Linie m m′ m″ ... nähert sich demnach einer stetigen Curve. Weil aber bei allen diesen Aenderungen der Winkel A m t beständig ein Rechter bleibt, so wird er es auch noch sein, wenn beide Polygone in irgend zwei Curven, z. B. in zwei Kreise übergegangen sind; es wird also in letzterem Falle die durch den Punkt m beschriebene stetige Curve zur Tangente an m eine auf A m senkrechte Gerade haben.

Ebene Epicycloiden.

§. 471.

43. **Erster Fall.** Es sei O′ ein beweglicher Kreis, der von außen über einen festen Kreis hinrollt, mit
3. welchem er stets in derselben Ebene bleibt; als ergänzender Punkt werde der gegenwärtige Berührungspunkt beider Kreislinien angenommen. Ist nun der Kreis O′ fortgerollt, bis er den andern in irgend einem Punkt A_1 berührt, so findet man den dieser Lage entsprechenden Ort M des erzeugenden oder graphischen Punktes D auf folgende Weise: man beschreibt aus O'_1 mit dem Halbmesser O′D eine Kreislinie und nimmt auf derselben einen Bogen $A_1 M$, von derselben absoluten Länge wie der Bogen $A_1 D$, zu welchem Ende man letzteren mit einer sehr kleinen Zirkelöffnung ausmessen muß. Noch schneller lassen sich diese Constructionen ausführen, wenn man zuerst die Peripherie des beweglichen Kreises in gleiche Theile theilt und diese auf die feste Kreislinie in $D A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... trägt; hierauf darf man nur noch zwei Kreisbögen beschreiben, den einen aus dem Mittelpunkt O'_1 mit einem Halbmesser $O'_1 M = O'D$, den andern aus dem Mittelpunkt A_1 mit einem Halbmesser $A_1 M$ gleich der Sehne D4 des beweglichen Kreises O′: der Durchschnitt dieser beiden Kreisbögen bestimmt alsdann den Ort M des graphischen Punktes D. Führt man ähnliche Constructionen für andere Berührungspunkte A_2, A_3 ... aus, so erhält man genug verschiedene Lagen des erzeugenden Punktes, um nun aus freier Hand die Zeichnung der Curve D M G F vornehmen zu können. Diese heißt die äußere **Epicycloide** und besteht aus einer unendlichen Menge identischer Aeste, welche sich in Wendepunkten wie D und F aneinander anschließen.

§. 472.

Die Tangente am Punkt M dieser Curve ist die Gerade M T, d. h. die Supplementärchorde von $M A_1$, weil, nach §. 471, diese letztere eine Normale an der Epicycloide ist. Hieraus aber ergibt sich ein neues, einfacheres und für den Gebrauch bei Räderwerken hinreichend genaues Verfahren Epicycloiden zu zeichnen. Beschreibt man nämlich aus den Mittelpunkten A_1, A_2, A_3, ... mit den Sehnen D1, D2, D3, ... des Kreises O′. als Halbmessern, verschiedene Kreisbögen und zeichnet um letztere eine Umhüllungscurve, so erhält man die Epicycloide D M G F; denn jene Sehnen sind (§. 471) die Längen der Normalen, welche, wie $M A_1$, durch die aufeinander folgenden Berührungspunkte A_1, A_2, A_3, ... des beweglichen Kreises gehen. Dieses Verfahren hat Poncelet vorgeschlagen.

§. 473.

Man könnte auch einen graphiſchen Punkt D′ annehmen, der außerhalb des beweglichen Kreiſes läge, mit dieſem aber in unveränderlicher Verbindung ſtände. Dieſer Punkt D′ würde alsdann eine Knotencurve D′M′G′... beſchreiben, welche man die verlängerte Epicycloide nennt, und die man conſtruirt, wenn man jeden, wie in §. 471 beſtimmten Halbmeſſer O'_1M noch um eine Weite $MM' = DD'$ verlängert. Die Gerade A_1M' iſt (§. 470) wieder eine Normale und die auf ihr Senkrechte $M'T'$ eine Tangente an der Curve.

Wird der graphiſche Punkt D″ innerhalb des beweglichen Kreiſes genommen, ſo beſchreibt er die verkürzte Epicycloide D″M″G″ mit Inflexionspunkten ſtatt der Knoten. Man erhält einen Punkt M″ dieſer Curve, wenn man auf dem, wie in §. 471 beſtimmten Halbmeſſer O'_1M die Weite $MM'' = DD''$ abſchneidet; und da die Gerade A_1M'' ebenfalls wieder eine Normale dieſer Epicycloide iſt, ſo iſt die auf ihr Senkrechte M″T″ eine Tangente derſelben.

§. 474.

Zweiter Fall. Wenn der bewegliche Kreis O′ über die concave Seite des feſten Kreiſes O hinrollt Fig. 4.
und der Halbmeſſer R′ des erſteren kleiner iſt als $\frac{1}{2}R$, ſo beſchreibt der erzeugende Punkt D eine innere Epicycloide (die ſogenannte Hypocycloide) von der Form DGF, welche ganz auf die vorhin angegebene Art conſtruirt wird. Nimmt man $R' = \frac{1}{4}R$, wie in Fig. 5., ſo erhält man eine Curve, die an Form und Gleichung ganz der Evolute einer Ellipſe (Fig. 76.) ähnlich iſt, mit dem einzigen Unterſchied, daß die vier Wendepunkte hier gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben. (S. die Anmerkung zu §. 492).

§. 475.

Geradlinige Epicycloide. Dieſer beſondere und für die Räderwerke ſehr nützliche Fall kommt vor, Fig. 4.
wenn man den Halbmeſſer R″ des beweglichen Kreiſes gleich $\frac{1}{2}R$ nimmt; denn alsdann fällt die durch einen Punkt des Kreiſes O″ beſchriebene Epicycloide mit dem Durchmeſſer D″OD zuſammen, welcher durch die anfängliche Lage D″ des erzeugenden Kreiſes geht. Betrachtet man nämlich den beweglichen Kreis in irgend einem Zeitpunkt ſeiner Rotation, wo er den Kreis O in A berührt und den Durchmeſſer D″O in M ſchneidet, ſo darf man nur beweiſen, daß die Bögen AM und AD″ an abſoluter Größe gleich ſind, weil hieraus dann weiter hervorgeht, daß der erzeugende Punkt, welcher anfänglich in D″ geweſen, nun in die Lage M auf dem Durchmeſſer D″O gekommen iſt. Dieſer Beweis iſt aber leicht zu führen; denn der Winkel AO″M iſt offenbar doppelt ſo groß als AOD″, mithin enthält der Bogen AM doppelt ſo viel Grade als der Bogen AD″; der erſte dieſer Bögen aber gehört einer Kreislinie an, die nur halb ſo groß iſt als die Kreislinie des andern Bogens; folglich hat der Bogen AM die gleiche abſolute Länge wie der Bogen AD″.

§. 476.

Dritter Fall. Nimmt man ferner an, der bewegliche Kreis O′, welcher auf der concaven Seite des Fig. 6.
feſten Kreiſes rollt, habe einen Halbmeſſer $R' > \frac{1}{2}R$, ſo wird die durch den graphiſchen Punkt D beſchriebene Epicycloide mit derjenigen zuſammenfallen, welche ein dritter Kreis beſchreiben würde, deſſen Halbmeſſer $R'' = R - R'$ wäre und welcher in entgegengeſetzter Richtung von O′ rollte. Um dieß zu beweiſen, nehme man an, der bewegliche Kreis O′ ſei in irgend eine Lage O'_2 gekommen, in welcher M der Ort des erzeugenden Punktes ſei, ſo daß alſo Bogen AM = AD ſein muß. Man ziehe die Gerade MO'_2 und ihre Parallele OB, und vollende das Parallelogramm OO'_2MO'', ſo hat man $O''B = O''M = R - R'$; endlich beſchreibe man den Kreis O″. Nun darf man nur noch beweiſen, daß die Bögen BM und BD gleiche abſolute Länge haben,

welches auf folgende Art geschieht. Die drei Bögen BA, AM und MB, welche offenbar gleichen Winkeln angehören, müssen ihren Halbmessern proportionirt sein, d. h.

$$\frac{BA}{R} = \frac{AM}{R'} = \frac{BM}{R''};$$

da man nun $R'' + R' = R$ angenommen hat, so folgt, daß $BM + AM = BA$; es ist aber schon bekannt, daß Bogen $AM = AD$, mithin auch $BM = BD$.

§. 477.

Fig. 7. **Vierter Fall.** Nimmt man endlich an, der bewegliche Kreis O′ habe einen Halbmesser $R' > R$, und umhülle also den festen Kreis, so wird die von dem graphischen Punkt D beschriebene Epicycloide sich außerhalb befinden, und jeder Zweig DGF derselben wird auf dem festen Kreis einen Bogen DEF einschließen, der gleich ist dem Ueberschuß der Kreislinie O′ über O. Man kann ferner wie in §. 476 beweisen, daß die Epicycloide DGF mit derjenigen zusammenfällt, die ein beweglicher, den Kreis O von außen berührender Kreis O″ beschreiben würde, dessen Halbmesser $R'' = R' - R$ wäre.

§. 478.

Fig. 8. Nimmt man den Halbmesser R des festen Kreises als unendlich groß an, so verwandelt sich dieser Kreis in eine Gerade DAF, über welche der bewegliche Kreis O′ wegrollt, und ein Punkt M auf der Peripherie des letzteren Kreises beschreibt alsdann die Cycloide DMGF, deren Normale wieder AM und deren Tangente MT ist. Die Construction dieser Curve läßt sich leicht nach den Vorschriften des §. 471 ausführen. Sie heißt verlängert oder verkürzt, wie in §. 473, je nachdem der erzeugende Punkt außerhalb oder innerhalb des beweglichen Kreises genommen wird.

§. 479.

Fig. 9. Wird im Gegentheil der Halbmesser des beweglichen Kreises als unendlich groß angenommen, so verwandelt dieser sich in eine unbegrenzte Gerade DX, und indem diese über die Peripherie O hinrollt, beschreibt jeder ihrer Punkte D eine Spirale $DM'M''M'''\ldots$, welche nichts anderes ist als die Evolvente des Kreises O (§. 197). Die Normalen $M'A'$, $M''A''$, ... sind genau die Krümmungshalbmesser dieser Spirale (§. 198); beschreibt man daher aus den Punkten A′, A″, A‴ mit den Halbmessern Da′, Da″, Da‴, ... Kreisbögen, so fallen diese in einer ziemlich beträchtlichen Ausdehnung mit der Spirale selbst zusammen und bieten daher ein sehr genaues und bequemes Mittel zur Construction dieser Curve dar.

Sphärische Epicycloiden.

§. 480.

Taf. 43. bis Fig. 99. Man betrachte nun zwei Kreise OA und CA, von denen der zweite mit seiner Peripherie über die des ersten unter fortwährender Berührung hinrollt, so aber daß ihre Ebenen einen constanten Winkel $CAX = \omega$ miteinander bilden. Während dieser Rotation wird irgend ein fest auf dem Umfang des beweglichen Kreises liegender und mit diesem fortgenommener Punkt M im Raume eine Curve DM .... beschreiben, welche man eine sphärische **Epicycloide** nennt, weil sie ganz auf der Oberfläche einer constanten Kugel liegt. Errichtet man nämlich aus den Mittelpunkten der beiden Kreise auf ihre Ebenen die Senkrechten OS und CS, so müssen diese beiden Axen in jeder Lage des beweglichen Kreises sich schneiden; denn weil für jeden Berührungspunkt A

Ebenen AOS und ACS senkrecht auf der gemeinschaftlichen Tangente stehen, so fallen sie also in Eine zu-
men. Da nun ferner der Winkel OAC das Supplement des Winkels CAX = ω ist, welcher während
Rotation unbeweglich bleibt, so hat also das Viereck OACS zwei Seiten und drei Winkel von unverän-
cher Größe; es müssen folglich auch die beiden Seiten OS und CS und mithin auch ihr Durchschnitt S
eränderlich bleiben; hieraus aber folgt, daß die Entfernung dieses Punktes S von dem beweglichen
kt M stets gleich SA ist, und daß mithin die Epicycloide ganz auf der Oberfläche der Kugel liegt, welche
zum Halbmesser hat.

§. 481.

Denkt man sich ferner zwei Kegel, welche den Punkt S zur gemeinschaftlichen Spitze und die Kreise OA
CA zu Grundflächen haben, so ist klar, daß diese Kegel eine gemeinschaftliche Berührungsebene SAV haben,
man kann folglich die Erzeugung der Epicycloide auch auf folgende Art ausdrücken: wenn von zwei
geln, die eine gemeinschaftliche Spitze und gleich lange Erzeugende haben, der zweite auf
n ersten, ohne zu gleiten aber bei fortwährender Berührung längs einer veränderlichen Erzeugenden, fort-
lt, so beschreibt ein auf der Grundfläche des beweglichen Kegels fest angenommener Punkt
jenige Curve, welche man sphärische Epicycloide nennt. Man erkennt leicht, daß bei diesem Ver-
en die Peripherien beider Grundflächen in steter Berührung bleiben und daß ihre Ebenen eine constante
igung gegen einander behalten. Es bietet somit auch das bequemste Mittel zur mechanischen Ausführung
beiden Bedingungen dar, unter welchen ein beweglicher Kreis auf einem festen rollen soll.

§. 482.

Es soll nun die Projection dieser Epicycloide auf der Ebene der Grundfläche des festen Kegels, welche Fig. 100.
n als Horizontalebene annimmt, construirt werden. Als Vertikalebene nehme man diejenige an, welche durch
Axe S'O dieses Kegels und durch den Berührungspunkt A der beiden Grundflächen in ihrer gegenwärtigen
e geht. Unter diesen Voraussetzungen werden beide Kegel sich vertikal als die beiden gleichschenkligen Dreiecke
AE und S'AB' projiciren, und die Gerade AB' wird die Vertikalprojection des beweglichen Kreises darstellen,
cher, um die gemeinschaftliche Tangente AV aufgeklappt, als Kreis Amb erscheint. — Es sei D der Anfang
Epicycloide, d. h. diejenige Lage, welche der graphische Punkt hatte, als er den festen Kreis berührte. Da
der bewegliche Kreis bis zu seiner gegenwärtigen Lage den Bogen DA durchlaufen hat, so muß der gra-
che Punkt M in der Aufklappung sich in einer Bogendistanz Am befinden, welche an absoluter Länge dem
gen AD gleich ist.*) Erhebt man nun den Kreis Amb um AV wieder, so wird der Punkt (m, m') einen
gen m'M' beschreiben, der, weil seine Ebene senkrecht auf AV ist, sich horizontal auf die mit der Projections-
parallele Gerade mM projiciren wird, so daß man also (M, M') als einen Punkt der gesuchten Epicy-
oe erhält.

*) Um diese Construction auszuführen, ist es am besten, wenn man zuerst den beweglichen Kreis in gleiche Theile theilt, hierauf einen dieser Theile durch kleine Chorden mißt, und letztere auf den festen Kreis überträgt, wodurch man auf diesem einen Bogen erhält, welcher einem der Theile des beweglichen Kreises gleich ist. Diesen Bogen trägt man so oft auf dem festen Kreise herum, als der bewegliche Kreis Theile hat, so erhält man hiedurch die Weite DAF, welche einem Zweig der Epicycloide auf dem festen Kreise entspricht. Im Falle das Verhältniß der Halbmesser OA und C'A sich durch einen einfachen Bruch ausdrücken läßt, ist es noch genauer, die Peripherie des festen Kreises in so viele gleiche Theile zu theilen, als der Nenner des Bruches $\frac{C'A}{OA}$ angibt, und so viele von diesen Theilen zu nehmen als der Zähler desselben Bruches ausspricht. Dadurch erhält man auf dem festen Kreis einen Bogen DAF, welcher der Peripherie des beweglichen Kreises an absoluter Länge gleich ist. Diesen Bogen muß man nun in so viele gleiche Theile theilen, als der bewegliche Kreis deren enthält.

§. 483.

Um einen zweiten Punkt zu erhalten, nehme man an, der bewegliche Kreis sei auf dem festen bis zu dem Berührungspunkte A_6 z. B. fortgerollt. Nun könnte man in Beziehung auf die Vertikalebene OA_6 dieselben Operationen vornehmen, welche man auf der Vertikalebene OA ausgeführt hat; es ist aber viel einfacher alle Operationen auf dieser letzteren auszuführen. Zu diesem Ende denke man sich die beiden Kegel, welche sich gegenwärtig längs der Erzeugenden, die ihren Fußpunkt in A_6 hat, berühren, gleichzeitig und ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Lage um die Vertikale OS' gedreht, bis der Halbmesser OA_6 mit der Projectionsaxe OAX zusammenfalle. Nun wird der graphische Punkt in der Aufklappung des beweglichen Kreises nicht mehr in m, sondern in einer Bogendistanz An liegen, welche dem Bogen DA_6 gleich ist. Man construire also, wie oben, die Projectionen N und N' des aufgeklappten Punktes n, führe OA in die Lage OA_6 zurück, und suche endlich einen Punkt N'', welcher gegen OA_6 dieselbe Lage hat, wie N gegen OA. Dieß aber geschieht mittels eines mit ON beschriebenen Kreisbogens, auf welchem man I''N'' gleich IN nimmt.

§. 484.

Man verfährt auf dieselbe Art für jede andere Lage des Berührungspunktes der beiden Kreise; und ist man bis in die Mitte K des Bogens DKF gekommen, welcher dem Umfang des beweglichen Kreises gleich ist, so sieht man leicht, daß die Aufklappung des graphischen Punktes in b sein müsse; diese aber projicirt sich in B' und B; fährt man daher diesen letzteren Punkt mittelst eines Kreisbogens BG auf OK zurück, so erhält man den Scheitel G, wo die horizontale Projection der Epicycloide sich am weitesten von dem festen Kreise entfernt.

Trägt man endlich die Punkte D, M, N'' mittelst Kreisbögen symmetrisch auf die andere Seite von OG, so erhält man die Punkte F, M''', N''', welche ebenfalls der Epicycloide angehören. Diese Curve hat OG zur Axe und läßt unendlich viele, mit DGF identische Aeste zu.

§. 485.

Aus den vorhergehenden Constructionen ergibt sich auch das Mittel, die vertikale Projection der Epicycloide zu zeichnen; der Punkt M' gehört dieser Projection an, und man hätte für den Punkt (N, N'), der, ohne seine Höhe zu ändern, nach N'' übertragen wurde, ganz leicht die vertikale Projection finden können. Es wurde aber unterlassen, weil man keine Verwirrung in die Figur bringen wollte und besonders auch deßhalb, weil die Vertikalebene hier nur als Mittel zur Ausführung der graphischen Operationen und nicht als wirklich vorhanden betrachtet wird; denn in letzterem Falle würden viele Linien der Figur unsichtbar werden. Endlich ist auch die Epicycloide hinreichend bestimmt durch den Durchschnitt des vertikalen Cylinders DMGF mit der Kugel vom Halbmesser S'A, welche sich auf der Horizontalebene leicht darstellen läßt.

§. 486.

100. Tangente an der Epicycloide. Da diese Curve ganz auf der Oberfläche der Kugel liegt (§. 480), welche S' zum Mittelpunkt und S'A zum Halbmesser hat, so wird also die Berührungsebene dieser Kugel in (M, M') die gesuchte Tangente enthalten. Da ferner bewiesen wurde (§. 470), daß die Gerade (AM, AM'), welche den erzeugenden Punkt mit dem entsprechenden Berührungspunkte A verbindet, eine Normale der Epicycloide ist, so folgt, daß die gesuchte Tangente auch in der auf jener Normale senkrechten Ebene liegen muß; diese Ebene aber kann man betrachten als die Berührungsebene einer Kugel, die in A ihren Mittelpunkt und (AM, AM') zum Halbmesser hat. Nur ändert diese zweite Kugel ihre Lage und Größe von einem Punkt der Epicycloide zum andern, und verhält sich blos berührend zu dieser Curve, mit welcher sie nur ein Linienelement gemein

hat. Die Aufgabe wäre also: den Durchschnitt der Berührungsebene an der festen Kugel und der Berührungsebene an der veränderlichen Kugel zu construiren.

§. 487.

Man schneide beide Kugeln durch die Ebene B′AV, welche die Grundlinie des beweglichen Kegels enthält. Der Durchschnitt mit der Kugel S′A gibt offenbar den Kreis AB′ selbst: klappt man diesen in Amb auf und zieht die Tangente mP, so wird diese bei der Wiederaufrichtung die Horizontalebene in dem Punkte P auf der Spur AV treffen. Dieser Punkt P gehört also der horizontalen Spur der Berührungsebene an der Kugel S′A an, und man findet sonach diese Spur, wenn man aus P die Gerade PT senkrecht auf die Projection OM des nach (M, M′) gezogenen Halbmessers zieht.

Die veränderliche Kugel, deren Halbmesser (AM, AM′) ist, wird durch die Ebene B′AV in einem größten Kreise geschnitten, der, um AV auf die Horizontalebene aufgeklappt, als ein aus A mit Am beschriebener Kreis erscheint. Zieht man an diesen die Tangente mQ (welche durch b gehen muß), so erhält man bei Wiederaufrichtung dieser Geraden mit ihrem Kreise, ihren horizontalen Durchgang Q auf AV. Dieser Punkt Q gehört also der horizontalen Spur der Berührungsebene an der veränderlichen Kugel an, und man erhält somit diese Spur, wenn man QX senkrecht auf die Projection AM des entsprechenden Halbmessers zieht. Da nun die beiden Spuren QX und PT der beiden Berührungsebenen sich in T schneiden, so ist also TM die Horizontalprojection der gesuchten Tangente; die Vertikalprojection T′M′ erhält man, wenn man den Punkt T auf die Projectionsaxe bezieht.

§. 488.

Andere Methode. Man kann diese Tangente auf eine weit einfachere Art erhalten, wenn man die Normalebene (§. 214) in Anwendung bringt. Denn hier kennt man unmittelbar zwei Normalen der Epicycloide: die eine ist der Halbmesser der constanten Kugel, den man von S′ nach (M, M′) zieht; die andere ist die Gerade (MA, M′A) nach §. 470. Legt man daher eine Ebene durch diese beiden Normalen, so wird die gesuchte Tangente auf ihr senkrecht sein müssen, und man kann sonach ihre Projectionen bestimmen. Nun schneidet die erste dieser Normalen die Vertikalebene offenbar in dem Punkte S′ und die andere in A; folglich ist S′A die vertikale Spur der Normalebene. Um die horizontale zu finden, denke man sich in der Normalebene eine Hilfslinie parallel mit S′A gezogen, deren Projectionen M′R′ und MR den Punkt R als ihren Durchgang durch die Horizontalebene liefern; mithin ist AR die horizontale Spur der Normalebene. Man erhält also die Tangente der Epicycloide, wenn man MT senkrecht auf AR und M′T′ senkrecht auf AS′ zieht. Fig. 100.

§. 489.

Man bemerke, daß in den Wendepunkten D und F die Horizontalprojection der Epicycloide zu Tangenten die Halbmesser OD und OF hat. Denn die veränderliche Gerade (AM, AM′), auf welcher die Tangente im Raum stets senkrecht ist, wird, wenn man sie unbestimmt verlängert, zu einer Sekante des beweglichen Kreises, wie man an ihrer Aufklappung Am sehen kann. Ist nun der Berührungspunkt A in D angelangt, so fallen die beiden Durchschnittspunkte A und m jener Sekante zusammen, und sie wird alsdann eine Tangente des beweglichen Kreises an dem Punkte m, und folglich auch eine Tangente des festen Kreises, welcher in diesem Augenblicke der Bewegung den andern in D berührt. Mithin ist also in diesem Falle die Tangente an dem Punkte D des festen Kreises DA genau die horizontale Spur der Normalebene, und die Tangente der Epicycloide wird sich also horizontal auf den Halbmesser ODX′ projiciren.

Um die Vertikalprojection dieser Tangente zu finden, darf man nur ihren Fußpunkt D in D′ auf die Axe

OAX projiciren, und von letzterem Punkte eine Senkrechte auf die vertikale Spur der dem Punkt D entsprechenden Normalebene fällen. Diese Spur aber erhält man leicht, weil sie durch den Punkt S′ und durch denjenigen Punkt der Axe OAX geht, wo diese von der zweiten Normale, d. h. also hier von der Tangente an DA getroffen wird.

Ganz auf dieselbe Weise findet man die Projectionen der Tangente am andern Wendepunkte F der Epicycloide. Man bemerke hier, daß jede dieser Tangenten an D oder an F genau mit der Tangente des durch diesen Punkt gehenden größten Vertikalkreises der constanten Kugel, deren Halbmesser S′A ist, zusammenfällt.

§. 490.

Im Scheitel dieser Curve, dessen Projection G ist, muß die Tangente horizontal und senkrecht auf der Vertikalebene OKG sein; denn diese Ebene enthält offenbar die beiden Normalen des §. 488, wenn der erzeugende Punkt bei dem obern Endpunkt B′ des Durchmessers angelangt ist, welchen man durch den Berührungspunkt des beweglichen Kreises gezogen hat.

§. 491.

Fig. 100. Als die Spur QX der Berührungsebene an der veränderlichen Kugel gesucht wurde (§. 487), ging man von der Voraussetzung aus, jene Ebene müsse die in Qmb aufgeklappte Tangente enthalten. Bringt man nun diese in die Ebene B′AV des beweglichen Kreises zurück, so schneidet sie die Vertikalebene in B′; mithin ist BX die vertikale Spur der Berührungsebene an der veränderlichen Kugel; diese Spur aber muß senkrecht auf B′A stehen, weil letztere Gerade zugleich die Projection des Halbmessers (AM, AM′) ist, den man nach dem Berührungspunkte jener Berührungsebene gezogen hat.

§. 492.

Man bemerke ferner, daß, bei den verschiedenen Lagen A, A_6, ... welche der Berührungspunkt des beweglichen Kreises annimmt, die Projection AB′ dieses Kreises auf den entsprechenden Vertikalebenen OA, OA_6, ... stets die nämliche Größe und Neigung behält; so daß, für alle diese Ebenen, das rechtwinklige Dreieck AB′X unverändert dasselbe bleiben wird, und daher die Spuren XB′ der verschiedenen Berührungsebenen an den veränderlichen Kugeln alle durch den Punkt Z′ der Vertikalen OS′ gehen müssen. Hieraus aber folgt, daß ein Kegel, dessen Spitze Z′ und dessen Grundlinie die sphärische Epicycloide wäre, alle Ebenen, wie Z′XQ zu Berührungsebenen hätte, weil jede derselben die Spitze Z′ und eine Tangente an der Basis enthielte. Es müssen also auch alle diese Berührungsebenen nach und nach die feste Gerade Z′X passiren, wenn man den epicycloidischen Kegel sich so um OZ′ drehen ließe, daß die verschiedenen Punkte N″, G, N‴, ... sich gegen M hin bewegten. Diese Eigenschaft findet bei conischen Rädern ihre Anwendung.*)

---

*) Um die Gleichungen für die sphärische Epicycloide (Fig. 100.) zu finden, beziehe man diese Curve auf drei rechtwinklige Axen OX′, OY′, OZ′, deren erstere durch den Wendepunkt D gehe. Setzt man

$$OS' = h,\quad OA = R,\quad C'A = R',\quad \text{Winkel } B'Ab = \omega,$$

so hat man offenbar

$$1)\quad x'^2 + y^2 + z^2 - 2zh = R^2$$

als Gleichung für die constante Kugel, auf welcher die Epicycloide mit allen ihren Punkten sich befindet; diese Curve wird also vollkommen bestimmt sein, wenn man mit vorstehender Gleichung (1) noch die ihrer Horizontalprojection DMGF verbindet. Setzt man nun Winkel $DOA = \alpha$, so hat man

$$R.\alpha = AD = Am;\quad \text{also Winkel } Acm = \frac{R\alpha}{R'}$$

und man erhält als Coordinatenwerthe des auf die Axen OX und OY bezogenen Punktes M

§. 493.

Die ſphäriſche Evolvente. Wenn der Winkel A S B (Fig. 99.) an der Spitze des beweglichen Kegels Fig. 101.
ch 180° wird, ſo verwandelt dieſer Kegel ſich in einen Kreis, deſſen Halbmeſſer gleich der Erzeugenden S A
feſten Kegels, und deſſen Ebene tangirend an letzterem Kegel iſt. In dieſem beſondern Falle nun erhält die
h einen Punkt M des beweglichen Kreiſes beſchriebene Epicycloide den Namen der **ſphäriſchen Evolvente**,
es ſich nun einfach darum handelt, um einen feſten Kegel S′ A O eine ſeiner Berührungsebenen S′ A V rollen
laſſen, ähnlich wie in Fig. 9., Taf. 43., wo man eine **Kreisevolvente** erhielt, indem man um die Kreis-
pherie eine ihrer Tangenten rollen ließ.

§. 494.

Da die fragliche Curve ſich ganz auf der Kugel befindet, deren Halbmeſſer S′ A iſt, ſo iſt es hinreichend, Fig. 101.
Horizontalprojection zu conſtruiren. Man klappe deßhalb den beweglichen Kreis, deſſen Mittelpunkt in (S′, O)
um die Tangente A V, welche ſie mit dem feſten Kreis gemeinſchaftlich hat, in die Horizontalebene auf; nehme
ann einen Bogen A m gleich dem Bogen A D, indem man D als den Urſprung der Evolvente betrachtet, d. h.
den Ort, den der graphiſche Punkt einnahm, als er den feſten Kegel berührte. Somit iſt alſo m die Aufklappung

---

$$x = OA + AH = R + (R' - \cos\frac{R\alpha}{R'}\cos.\ \omega);$$

$$y = -MH = -R'\sin\frac{R\alpha}{R'}$$

Um aber dieſes Coordinatenſyſtem, das mit dem Berührungspunkt A ſich ändert, auf die feſten Axen O X′ und O Y′ zu beziehen, bedient man ſich der bekannten Formeln:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,\quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

und ſubſtituirt man hier die vorhin erhaltenen Werthe von x und y, ſo erhält man:

$$2)\ x' = (R + R'\cos\omega)\cos\alpha - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\cos\alpha + R'\sin\frac{R\alpha}{R'}\sin\alpha$$

$$3)\ y' = (R + R'\cos\omega)\sin\alpha - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\sin\alpha - R'\sin\frac{R\alpha}{R'}\cos\alpha,$$

Nun müßte man noch den Bogen α aus dieſen beiden Gleichungen eliminiren, um die Gleichung für die Curve D M G F auf der Horizontalebene zu erhalten; dieſe Elimination aber läßt ſich nur dann ausführen, wenn das Verhältniß der beiden Halbmeſſer R und R′ beſtimmt und commenſurabel iſt. Uebrigens genügen die Gleichungen (2) und (3) vollkommen, um die Coordinaten x′, y′ der verſchiedenen Punkte der Curve zu berechnen, indem man dem Bogen α nach einander verſchiedene Werthe gibt.

Um nun die Gleichungen für die ebene Epicycloide zu erhalten, darf man nur $\cos\omega = \pm 1$ ſetzen, je nachdem der bewegliche Kreis außerhalb oder innerhalb des feſten Kreiſes herum rollen ſoll; nimmt man nun letzteren Fall an und ſetzt noch überdieß $R = {}^1/_4\,R$, wie in Fig. 5., ſo verwandeln ſich die Gleichungen (2) und (3) in folgende:

$$(4)\ x' = {}^3/_4\,R\cos\alpha + {}^1/_4\,R\cos\alpha\cos 4\alpha + {}^1/_4\,R\sin\alpha\sin 4\alpha$$

$$(5)\ y' = {}^3/_4\,R\sin\alpha + {}^1/_4\,R\sin\alpha\cos 4\alpha - {}^1/_4\,R\cos\alpha\sin 4\alpha;$$

und ſubſtituirt man in dieſe die bekannten Werthe:

$$\cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\quad \sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

ſo erhält man, indem man die jetzt überflüſſig gewordenen Accente von x und y wegläßt:

$$x = R\cos^3\alpha,\quad y = R\sin^3\alpha.$$

Um nun α zu eliminiren, erhebe man beide Gleichungen auf die $^2/_3$ Potenz und addire ſie hierauf, wodurch man für die Epicycloide der Fig. 5. folgende Gleichung erhält:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

Sie iſt alſo ein beſonderer Fall von der Evolute der Ellipſe, deren Gleichung bekanntlich

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{B}\right)^{2/3} = 1$$

iſt, und dieſe beiden Curven gehören ſomit zur Familie derjenigen Curven (storoides), welche allgemein durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{A}\right)^m + \left(\frac{y}{B}\right)^m = 1$$

dargeſtellt werden.

dieſes graphiſchen Punktes, wenn der Berührungspunkt in A angelangt iſt, und man erhält ſeine veränderliche Lage (M, M') leicht, wenn man den Kreis S'' um die Tangente AV in die Berührungsebene S'AV wieder zurückführt.

Iſt der Berührungspunkt des beweglichen Kreiſes mit dem feſten in A_s angekommen, ſo denke man ſich das ganze Syſtem gleichzeitig, ohne zu rollen, um die Vertikale S'O gedreht, bis der Halbmeſſer OA_s in die Projectionsaxe OA zu liegen kommt; nimmt man nun den Bogen $An = DA_s$, ſo iſt n die Aufklappung und N, N' ſind die Projectionen des graphiſchen Punktes. Um hierauf den beweglichen Kreis wieder in ſeine wahre Lage zurückzubringen, beſchreibe man mit dem Halbmeſſer ON einen Kreis, auf welchem man den Bogen $NN_s = ll_s$ nimmt. Auf dieſe Art erhält man die Curve $DMN_s \ldots$ als Horizontalprojection der ſphäriſchen Evolvente.

§. 495.

Die Tangente an einem beliebigen Punkte (M, M') muß ſenkrecht ſein auf der Ebene der beiden Normalen, von welchen in §. 488 die Rede war, und die man erhält, wenn man aus dem Mittelpunkt (O, S') und aus dem Berührungspunkte A nach dem graphiſchen Punkte (M, M') gerade Linien zieht. Dieſe Normalebene aber fällt offenbar mit der tangirenden Ebene S'AV, in welcher der bewegliche Kreis liegt, zuſammen; folglich darf man nur MT ſenkrecht auf AV und M'T' ſenkrecht auf S'A ziehen.

§. 496.

Man bemerke, daß der Curvenaſt DMPGQE, welcher durch eine völlige Umdrehung des beweglichen Kreiſes beſchrieben wird, auf der Baſis des Kegels einen Bogen DAGF umfaßt, welcher dem Ueberſchuß des Kreisumfangs S'' über den Kreisumfang O gleich iſt; ferner iſt wohl zu bemerken, daß dieſer Aſt aus zwei Theilen beſteht, welche durch einen Wendepunkt G in der Mitte von DGF zuſammenhängen. Dieſer Wendepunkt aber iſt die Projection der höchſten Lage des graphiſchen Punktes. Um ſich dieſes klar zu machen, ſtelle man ſich für's Erſte den oberen Mantel des Kegels S'AE ſo weit verlängert vor, bis der horizontale Durchſchnitt einen Kreis gibt, deſſen Halbmeſſer gleich OA iſt; nun bemerke man ferner, daß der bewegliche Kreis S'' ſich in einer veränderlichen Ebene befindet, welche beide Kegelmäntel zugleich berührt, und zwar längs einer Erzeugenden, welche dem Durchmeſſer dieſes Kreiſes S'' gleich iſt; hieraus aber folgt, daß, während ein gewiſſer Bogen Am des beweglichen Kreiſes über die untere Baſis des Kegels, der diametral entgegengeſetzte Bogen p in gleicher Zeit über die obere Baſis des Kegels hinrollt; wenn folglich der graphiſche Punkt m in der Mitte ſeines Laufes angekommen iſt, ſo befindet er ſich in Berührung mit dieſer oberen Baſis und erzeugt alſo daſelbſt einen Wendepunkt, der ganz identiſch iſt mit dem Urſprung D auf der unteren Kegelbaſis.

Drittes Kapitel.

Ueber Kugeln und Pyramiden.

§. 497.

Aufgabe 1. Den Durchſchnitt dreier gegebenen Kugeln zu finden.

102. Als Horizontalebene nehme man diejenige an, welche durch die drei Mittelpunkte A, B und C der gegebenen Kugeln beſtimmt wird, und beſchreibe die größten Kreiſe, welche die horizontalen Spuren dieſer Kugeln darſtellen. Nun iſt der in DE projicirte Vertikalkreis offenbar der Durchſchnitt der beiden Kugeln A und B, während die Kugeln A und C ſich in dem Vertikalkreis FG ſchneiden; dieſe beiden Vertikalkreiſe ſchneiden ſich aber in den beiden horizontal in M projicirten Punkten, und eben dieſe Punkte ſind die einzigen, welche die drei

gegebenen Kugeln gemein haben. Um aber die Lage dieſer Punkte im Raume zu beſtimmen, projicire man ſie auf irgend eine Vertikalebene XY. Klappt man nun den Kreis DE um ſeinen horizontalen Durchmeſſer auf und zieht die Ordinate Mm, ſo zeigt dieſe genau die Höhe eines der geſuchten Punkte über der Horizontalebene an, und nimmt man daher über und unter XY die Stücke IM′ und IM″ gleich Mm, ſo erhält man die Projectionen (M, M′) und (M, M″) der beiden geſuchten Punkte.

§. 498.

Hätte man den Durchſchnitt der beiden Kugeln B und C geſucht, ſo würde man einen Vertikalkreis erhalten haben, deſſen Projection HK ebenfalls durch den Punkt M hätte gehen müſſen; hieraus aber ergibt ſich folgender Lehrſatz der ebenen Geometrie: Wenn drei in einerlei Ebene verzeichnete Kreislinien ſich zu zwei und zwei ſchneiden, ſo liegen die zuſammengehörigen Durchſchnittspunkte auf Sehnen, welche alle drei durch einen und denſelben Punkt der Ebene gehen.

§. 499.

Aufgabe 2. Eine dreiſeitige Pyramide zu conſtruiren, deren ſechs Seitenkanten ihrer Größe nach gegeben ſind. Fig. 10

Man verzeichne zuerſt auf der Horizontalebene eine der drei Seitenebenen ABC der Pyramide mittels der drei gegebenen Kanten, welche dieſe Seitenebene einſchließen. Hierauf beſtimme man die vierte Spitze (M, M′), indem man, wie in der vorigen Aufgabe, den Durchſchnitt dreier Kugeln ſucht, welche die Punkte A, B und C zu Mittelpunkten und zu Halbmeſſern die drei andern gegebenen Kanten haben. Dadurch erhält man zwei ſymmetriſche Pyramiden, indem die geſuchte vierte Spitze ſowohl in (M, M′) als auch in (M, M″) genommen werden kann. Die ebenen und Flächenwinkel, und was man ſonſt noch von der Pyramide zu wiſſen braucht, findet man durch die Methoden des erſten Abſchnittes.

§. 500.

Aufgabe 3. Um eine gegebene dreiſeitige Pyramide eine Kugel zu beſchreiben. Fig. 10

Es ſeien (A, A′), (B, B′), (C, C′), (S, S′) die Projectionen der vier Ecken auf zwei rechtwinklig auf einander ſtehenden Ebenen, deren eine die Seitenfläche ABC der Pyramide enthalte. Wären die Projectionen nicht unmittelbar gegeben, ſo könnten ſie ganz ſo wie in der vorigen Aufgabe beſtimmt werden. Da nun der Mittelpunkt der geſuchten Kugel von jenen vier Ecken gleichweit entfernt ſein ſoll, ſo muß er in den beiden Vertikalebenen FO und GO, welche auf den Mitten der Kanten AB und AC ſenkrecht ſtehen, zugleich enthalten ſein; er wird alſo in irgend einem Punkt der Vertikalen (O, I′O′), in welcher jene Ebenen ſich ſchneiden, liegen müſſen. Eben ſo muß er auch in der auf der Mitte einer andern Kante, wie (SA, S′A′), ſenkrecht ſtehenden Ebene enthalten ſein. Wollte man ſich alſo die Mühe nehmen, die Spuren dieſer Ebene und den Punkt zu conſtruiren, in welchem ſie die Vertikale (O, I′O′) ſchneidet, ſo erhielte man den Mittelpunkt der geſuchten Kugel. Da aber letztere Operation etwas weitläufig ausfallen würde, beſonders wenn die Kante (SA, S′A′) nicht parallel mit der Vertikalebene wäre, ſo wendet man lieber folgende Conſtruction an:

Mit dem Halbmeſſer OB beſchreibe man um das Dreieck ABC eine Kreislinie, ſo wird ſolche der geſuchten Kugel angehören und von der mit der Projectionsaxe parallelen Vertikalebene SD in einem Punkte (D, D′) geſchnitten werden. Mithin muß die Gerade (SD, S′D′) eine mit der Vertikalebene parallele Sehne der Kugel ſein, und der Mittelpunkt dieſer letzteren muß daher in der ſenkrecht auf der Mitte dieſer Sehne errichteten Ebene KL′ liegen. Die Vertikalprojection dieſes Mittelpunkts iſt folglich in O′, und ſeine Horizontalprojection in O iſt bereits bekannt.

Um nun die wahre Länge des Kugelhalbmessers (OB, O′B′) zu finden, drehe man ihn so um die Vertikale O, bei unveränderter Neigung gegen dieselbe, bis er parallel mit der Vertikalebene wird, so erhält man für diese Lage desselben die Projectionen Ob und Ob′, deren letztere die wahre Länge des Halbmessers angibt. Mit dieser beschreibe man aus O und O′ zwei Kreise, so erhält man die sichtbaren Umrisse der gesuchten Kugel, welche nun ihrer Größe und Lage nach vollkommen bestimmt ist.

§. 501.

Fig. 104. Aufgabe 4. In eine gegebene dreiseitige Pyramide eine Kugel einzuschreiben.

Man nehme abermals die Ebene einer der Seitenflächen ABC zur Horizontalebene und (S, S′) sei die über dieser Ebene liegende Spitze oder Ecke der Pyramide. Denkt man sich nun durch die Kante AB eine Ebene gelegt, welche den durch die Seitenflächen SAB und CAB gebildeten Flächenwinkel in zwei gleiche Theile theilte, so würde diese mittlere Ebene offenbar alle diejenigen Punkte des Raumes enthalten, welche gleichweit von jenen beiden Seitenflächen entfernt sind; mithin muß die gesuchte Kugel, welche jede dieser Flächen berühren soll, ihren Mittelpunkt nothwendig in dieser mittleren Ebene haben. Eben so müssen zwei andere mittlere Ebenen, die man so durch die Kanten AC und BC sich gelegt denkt, daß sie die diesen letzteren entsprechenden Flächenwinkel halbiren, ebenfalls den Kugelmittelpunkt enthalten; dieser wird also im Durchschnitte jener drei mittleren Ebenen, d. h. in der Spitze der von ihnen gebildeten inneren Pyramide liegen. Die Aufgabe ist also jetzt: die Spitze dieser neuen Pyramide, oder auch die drei Kanten, welche durch diese Spitze gehen, zu finden.

Zu diesem Zwecke suche man zuerst die Größe des Flächenwinkels SABC, indem man denselben durch eine senkrecht auf AB stehende Vertikalebene SD schneidet und letztere auf die vertikale Projectionsebene aufklappt, wodurch man als Durchschnitt den Winkel S′D″H erhält; eben so construire man die Winkel S′E″H und S′F″H als Maße der Flächenwinkel AC und AB, und theile hierauf jeden dieser ebenen Winkel durch die Geraden D″I, E″L, F″K in zwei gleiche Theile, so werden diese drei Geraden, wenn man sie in die Vertikalebenen SD, SE und SF zurückführt, den Seitenflächen der inneren Pyramide, deren Grundfläche ebenfalls ABC ist, angehören. Schneidet man nun diese Geraden durch irgend eine Horizontalebene X′Y′, so erhält man drei Punkte δ″, ε″, φ″, welche, in δ, ε, φ zurückgeführt, dem triangulären Schnitt abc, den die Ebene X′Y′ mit der innern Pyramide macht, angehören werden, und man kann nun dieses Dreieck abc, dessen drei Seiten parallel mit denen des Dreiecks ABC sein müssen, leicht construiren. Zieht man hierauf endlich die Geraden Aa, Bb, Cc, so sind diese die Seitenkanten der inneren Pyramide und müssen sich in einem einzigen Punkt O schneiden, welcher die Horizontalprojection des Mittelpunktes der gesuchten Kugel ist.

Die Vertikalprojection O′ dieses nämlichen Mittelpunktes erhält man, indem man O auf die Kante C′c′ der innern Pyramide projicirt; der Halbmesser der Kugel aber ist die aus dem Mittelpunkte O′ auf die untere Seitenfläche gefällte Senkrechte O′R′. Zieht man daher mit dieser Geraden O′R′ aus den Mittelpunkten O und O′ zwei Kreise, so erhält man die Projectionen der gesuchten Kugel.

§. 502.

Will man die Berührungspunkte dieser Kugel mit den Seitenflächen haben, so kann man leicht die Spuren der unbestimmten Ebene, welche z. B. die Seitenfläche SAC enthält, construiren, und hierauf aus dem Punkte (O, O′) eine Senkrechte auf diese Ebene fällen, nach §. 35. Noch leichter aber geschieht es, wenn man bedenkt, daß eine durch den Punkt O und senkrecht auf AC gelegte Ebene die Kugel und die Seitenfläche SAC in einem größten Kreise und einer Geraden, die diesen Kreis berührte, schneiden würde. Denkt man sich nun diese Gerade so um (O, O′R′) gedreht, bis sie mit der Vertikalebene parallel geworden, so müßte in dieser Lage ihre Vertikalprojection offenbar mit S′E″ parallel sein. Fällt man daher, ohne diese Parallele zu ziehen,

m Punkt O′ einen senkrechten Halbmesser auf S′E″, so muß dieser den vertikalen Umriß der Kugel in Punkte schneiden, der die Aufklappung des gesuchten Berührungspunktes ist, den man nun leicht in seine Lage zurückführen kann.

§. 503.

Die Betrachtungen in §. 491 dienen auch zur Auflösung der allgemeinen Aufgabe: eine Kugel zu fin- Fig. 104.
welche vier gegebene Ebenen zumal berühre. Denn die vier Seitenflächen der Pyramide SABC , wenn man sie unbestimmt verlängert, an den Kanten AB, AC, BC Flächenwinkel, welche die schon be- zu zwei Rechten ergänzen. Diese neuen Flächenwinkel aber werden durch die ebenen Winkel S′D″B′, C′, S′F″C′ gemessen. Theilt man daher jeden dieser letzteren in zwei gleiche Theile, durch gerade Linien, die Ebene X′Y′ in Punkten schneiden, die den Punkten δ″, ε″, φ″ analog sind, so kann man diese ver- nen Punkte zu drei und drei combiniren, um mehrere Dreiecke, wie abc, und aus diesen verschiedene punkte, wie (O, O′) zu erhalten. Man nehme z. B. die Linie D″d″, welche den Winkel S′D″B′ halbirt e Ebene X′Y′ in dem Punkte d″ schneidet, der, auf die Horizontalebene bezogen, d gibt; die beiden Punkte ε und φ aber behalte man bei; so erhält man das Dreieck ca″b″, dessen Spitzen, mit A, B verbunden, den Punkt (O″, O‴) als Mittelpunkt einer Kugel geben, welche die Seitenfläche SAB halb der ersten Pyramide, die drei andern verlängerten Seitenflächen aber rechts von SAB berührt. Auf Art erhält man überhaupt acht Kugeln, welche die vier unbestimmten Ebenen, in welchen die Seitenflächen ramide SABC liegen, berühren; denn bezeichnet man durch α, α′, α″ die drei spitzigen, und durch ω, ω′, ω″ i stumpfen Flächenwinkel, welche zu den Kanten AB, AC und BC gehören, so kann man offenbar als punkt der gesuchten Kugel den Durchschnittspunkt der drei mittleren Ebenen annehmen, welche die nwinkel einer jeden der folgenden Combinationen halbiren:

α, α′, α″	α, α′, ω″	α, ω′, ω″	ω, ω′, ω″.
	α, α″, ω′	α′, ω, ω″	
	α, α″, ω	α″, ω, ω′	

Man begreift leicht, warum hier jede Combination ausgeschlossen ist, die zwei an der nämlichen Kante e Winkel, wie α und α, enthielte. Für gewisse Lagen der Ebenen gegen einander kann die Zahl der ungen auch geringer werden. — Diese Aufgabe ist analog mit der aus der ebenen Geometrie, in welcher reis gesucht wird, der drei gegebene Gerade berühre.

§. 504.

Aufgabe 5. Es soll ein Punkt gefunden werden, dessen Entfernungen von drei gegebenen ten oder von drei gegebenen Ebenen, oder endlich von drei gegebenen Geraden bekannt sind.

1) Die gegebenen Punkte seien durch A, B, C und ihre Entfernungen von dem gesuchten Punkt x be- durch α, β, γ bezeichnet. Denkt man sich nun eine Kugel, die ihren Mittelpunkt in A, und zum Halb- die Entfernung α hat, so muß der Punkt x offenbar irgendwo auf der Oberfläche dieser Kugel liegen; eben ß er sich aber auch auf den Oberflächen zweier andern Kugeln befinden, deren Mittelpunkte in B und C und welche die Längen β und γ zu Halbmessern haben; die Aufgabe reduzirt sich also darauf, den Durch- t dreier gegebenen Kugeln zu finden, was nach §. 497 geschehen kann.

2) Man bezeichne nun ferner durch P, P′, P″ die gegebenen Ebenen, und durch δ, δ′, δ″ ihre Entfer- n von dem gesuchten Punkte x, so muß dieser in jeder der drei Ebenen p, p′, p″ liegen, die beziehlich el mit P, P′, P″ und um δ, δ′, δ″ von letzteren entfernt sind. Construirt man daher, nach Anleitung des Abschnittes, die Ebenen p, p′, p″, so darf man nur noch den Durchschnitt derselben finden, was für den Leser

keine Schwierigkeit haben wird. Man bemerke nur, daß, weil z. B. die Ebene p ober- oder unterhalb P in der Entfernung δ genommen werden kann, die Aufgabe acht Auflösungen für die Lage des gesuchten Punktes zuläßt.

3) Es seien endlich A, B, C die drei gegebenen Geraden, von denen der gesuchte Punkt x beziehlich um α, β, γ entfernt sei. Denkt man sich nun einen Umdrehungscylinder, dessen Axe die Linie A, und dessen senkrechter Durchschnitt ein Kreis von dem Halbmesser α ist, so wird diese Cylinderfläche den gesuchten Punkt x enthalten müssen. Eben so muß dieser Punkt auch auf zwei andern Umdrehungscylindern liegen, deren Axen und Halbmesser B und β, C und γ sind. Die Aufgabe reduzirt sich also darauf, alle Punkte zu finden, welche diese drei Cylinderflächen gemeinschaftlich haben. Vorausgesetzt nun, die horizontalen Spuren dieser drei Flächen seien nach dem weiter unten beschriebenen Verfahren construirt, so darf man nur noch, nach §. 288, die Durchschnittscurve der Cylinder A und B, und hierauf die der Cylinder A und C suchen; so erhält man aus den Durchschnitten dieser beiden Curven (welche sich in acht Punkten schneiden können, weil die drei Cylinderflächen vom zweiten Grade sind) die verschiedenen Lagen, welche der gesuchte Punkt x haben kann. Um jedoch die wahren Durchschnittspunkte beider Curven im Raume zu erhalten, darf man von den Durchschnitten der beiden Horizontalprojectionen nur diejenigen nehmen, welche den Durchschnitten auf der Vertikalebene entsprechen, d. h. welche mit letzteren durch Gerade verbunden werden können, welche senkrecht auf der Projectionsaxe stehen. Zur Probe kann man auch noch die Durchschnittscurve der Cylinder B und C construiren, welche ebenfalls durch die gemeinschaftlichen Punkte der beiden ersten Curven gehen muß.

§. 505.

105. Um die Horizontalprojection eines jeden der drei Cylinder zu finden, sei auf beiden Projectionsebenen die Axe des einen durch (AF, A′F′) dargestellt. Läßt man nun diese Gerade sich so um die Vertikale A drehen, bis sie parallel mit der Vertikalebene wird, so erhält man (Af, A′f′) als die Projectionen dieser neuen Lage; und der Kreisschnitt des Cylinders wird sich nun in der Geraden G′H′, welche gleich 2α und senkrecht auf A′f′ ist, projiciren. Den sichtbaren Umriß des Cylinders aber bilden die beiden mit A′f′ parallelen Geraden G′K′ und H′L′, und die horizontale Spur der Cylinderfläche wird, bei der gegenwärtigen Lage, eine Ellipse sein, die zur großen Axe offenbar die Entfernung L′K′ hat. Führt man daher die Punkte K′ und L′ in a und d zurück, so werden die Gerade ad und die auf ihr Senkrechte $bAc = 2\alpha$ die Axen der Ellipse sein, in welcher der anfängliche Cylinder die Horizontalebene schneidet, und aus denen nun leicht die Ellipse selbst construirt werden kann.

§. 506.*)

„Ein Ingenieur, der ein Gebirgsland durchwandert, ist mit einer topographischen Charte versehen, auf welcher genau die Projectionen der verschiedenen Terrainpunkte angemerkt und Zahlen beigefügt sind, welche die Höhe dieser Punkte über einem und demselben Niveau angeben. Er gelangt zu einem ausgezeichneten Punkte, den er auf der Charte nicht angemerkt findet. Da er nun kein anderes Instrument, um Winkel zu messen, bei sich hat, als ein mit einem Bleiloth versehenes Graphometer, so fragt man, wie der Ingenieur, ohne seinen Standpunkt zu verlassen, diesen auf seine Charte eintragen und zugleich die Höhe dieses Punktes über dem erwähnten Niveau finden könne?

„Unter den genau auf der Charte angegebenen Terrainpunkten wird der Ingenieur drei der nächsten auswählen, von denen wenigstens zwei nicht dieselbe Höhe haben wie er; hierauf wird er die Winkel suchen, welche

*) Dieser und der folgende Paragraph sind der Géométrie descriptive von Monge entnommen.

die Vertikale mit den nach jenen drei Punkten gerichteten Gesichtsstrahlen macht; dadurch aber wird er sich nun in den Stand gesetzt sehen, die Aufgabe zu lösen.

„Es seien A, B, C die drei erwählten Punkte, deren Horizontalprojectionen auf der Charte angegeben sind, und deren Vertikalprojectionen aus den ebenfalls angemerkten Höhenmaßen construirt werden können. Da nun der Ingenieur den Winkel kennt, den die Vertikale mit dem nach A gerichteten Sehstrahl bildet, so kennt er auch den Winkel, den der nämliche Strahl mit der in A errichteten Vertikalen bildet; denn bringt man die Krümmung der Erde nicht in Anschlag, was hier ohne Fehler geschehen kann, so sind beide Winkel als Wechselwinkel einander gleich. Denkt er sich nun ferner eine conische Fläche mit kreisförmiger Grundlinie, deren Spitze in A, und deren Axe vertikal ist und mit der Erzeugenden einen Winkel bildet, der dem beobachteten Winkel gleich ist, so wird diese hiedurch vollkommen bestimmte Fläche durch den nach A gerichteten Sehstrahl, und mithin auch durch den Standpunkt des Ingenieurs gehen; er hat somit also eine erste krumme Fläche vollkommen bestimmt, auf welcher der gesuchte Punkt sich befindet. Wendet er nun das nämliche Verfahren und dieselben Schlüsse auch auf die Punkte B und C an, so findet er den gesuchten Punkt noch auf zwei andern conischen Flächen mit kreisförmigen Grundlinien liegen, deren Spitzen in B und C, und deren Axen vertikal sind und mit den Erzeugenden die nämlichen Winkel bilden, wie die Vertikalen mit den entsprechenden Sehstrahlen. Der gesuchte Punkt wird daher auf dreien ihrer Form und Lage nach bestimmten conischen Flächen zugleich und mithin in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte liegen. Der Ingenieur darf daher nur aus den durch die Aufgabe gegebenen Stücken die horizontalen und vertikalen Projectionen der Durchschnitte dieser drei Flächen construiren, indem er immer zwei und zwei derselben zusammennimmt;*) die Durchschnitte dieser Projectionen geben alsdann die horizontale und vertikale Projection des gesuchten Punktes und mithin die Lage dieses Punktes auf der Charte und seine Höhe über und unter den beobachteten Punkten, wodurch denn auch sein Höhenmaß über dem allgemeinen Niveau bestimmt wird.

„Diese Auflösungsart liefert im Allgemeinen acht Punkte, welche der Aufgabe Genüge leisten; es wird aber dem Beobachter leicht sein, unter diesen acht Punkten denjenigen herauszufinden, der dem gesuchten Standpunkte entspricht. Fürs Erste wird er sich immer davon überzeugen können, ob der Standpunkt über oder unter der Ebene liegt, welche durch die drei beobachteten Punkte geht; angenommen, er liege über derselben, so dürfen alle Aeste der Durchschnittscurven der conischen Flächen, welche unter dieser Ebene liegen, außer Acht gelassen werden, wodurch die Zahl der möglichen Punkte sich auf vier reduzirt; eben so wäre es, wenn der Standpunkt unter die Ebene fiele. Unter diesen vier Punkten aber, wenn sie anders alle existiren, kann er leicht denjenigen unterscheiden, der, in Beziehung auf die drei Kegelspitzen, die nämliche Lage hat, wie der Standpunkt in Beziehung auf die beobachteten Punkte."

§. 507.

„Die Umstände seien die nämlichen wie die in der vorhergehenden Aufgabe, mit diesem einzigen Unterschiede, daß der Winkelmesser mit keinem Bleilothe versehen ist, so daß also die mit der Vertikale gebildeten Winkel nicht gemessen werden können; man fragt, wie gleichwohl der Ingenieur, ohne seinen Standpunkt zu verlassen, auf der Charte die Lage des Punktes, wo er sich befindet und dessen Höhenmaß über der Niveaufläche, auf welche alle Punkte der Charte bezogen sind, finden könne?

„Hat der Ingenieur drei Terrainpunkte ausgewählt, die genau auf seiner Charte angegeben sind, und mit

*) Den Durchschnitt zweier dieser Kegelflächen construirt man nach der Methode des §. 297, oder noch besser, indem man diese Flächen durch verschiedene Horizontalebenen schneidet; denn man erhält alsdann lauter Kreise zu Durchschnitten, deren Mittelpunkte sich im nämlichen Punkte projiciren, wie die Spitze, und deren Radien auf der Vertikalebene angegeben sind.

welchen sein Standpunkt nicht in einerlei Ebene liegt, so wird er die drei Winkel messen, welche die nach jenen drei Punkten gerichteten Gesichtslinien unter sich bilden, und nach dieser einzigen Messung wird er im Stande sein, die vorliegende Aufgabe zu lösen.

„Es seien nämlich A, B und C die drei beobachteten Punkte, und denkt man sich diese durch die drei Geraden AB, BC, CA verbunden, so hat der Ingenieur zugleich die Horizontalprojectionen dieser Geraden auf seiner Charte. Und da ferner auch die Höhenmaße der drei Punkte angegeben sind, so kennt er also auch die Höhenunterschiede der Endpunkte jener Geraden und kann mithin die Größe einer jeden derselben finden."

Fig. 106. „Man denke sich nun in einer durch AB gelegten Ebene ein rechtwinkliges Dreieck BAD über AB als einer Kathete errichtet, und zwar so, daß der Winkel an B das Complement von dem Winkel sei, unter welchem die Seite AB beobachtet worden, so wird der Winkel an D diesem beobachteten Winkel gleich sein, und bekanntlich hat die um A, B und D beschriebene Kreislinie die Eigenschaft, daß jede zwei Gerade, die man von irgend einem Punkt des Bogens ABD aus nach A und B zieht, einen Winkel bilden, der jenem beobachteten Winkel gleich ist. Denkt man sich nun die Kreisebene um AB als um eine Axe gedreht, so erzeugt der Bogen ADB eine Umdrehungsfläche, deren Punkte alle die nämliche Eigenschaft haben, d. h. wenn man von irgend einem Punkt dieser Fläche zwei Gerade nach A und B zieht, so bilden diese unter sich einen Winkel, der dem beobachteten Winkel gleich ist. Offenbar aber sind die Punkte dieser Umdrehungsfläche die einzigen, welche diese Eigenschaft haben; mithin muß die Fläche durch den Standpunkt des Ingenieurs gehen. Schließt man eben so in Beziehung auf die beiden andern Geraden BC und CA, so erhält man zwei andere Umdrehungsflächen, auf deren jeder sich der gesuchte Standpunkt befindet. Da also dieser Punkt sich zugleich auf drei verschiedenen, ihrer Form und Lage nach bestimmten Umdrehungsflächen befindet, so muß er ein Punkt ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes sein. Construirt man daher die horizontalen und vertikalen Durchschnitte dieser drei Flächen, indem man sie zu zwei und zwei vornimmt, so werden die Punkte, in welchen die drei Projectionen selbst sich schneiden, die Projectionen des gesuchten Punktes sein."

§. 508.

Nimmt man, um diese Constructionen nach der Methode des §. 333 wirklich ausführen zu können, die Ebene des Dreiecks ABC als Horizontalebene und eine auf irgend einer der drei Seiten, z. B. auf AB senkrecht stehende Ebene als Vertikalebene an, so erhält man zwar nur die Projection des gesuchten Punktes auf der Ebene ABC und seine Höhe über oder unter dieser Ebene; da aber die Lage der letzteren, in Beziehung auf die Niveaufläche, auf welche alle Punkte der Charte bezogen sind, bekannt ist, so kann leicht auch die Lage des Standpunktes auf der Ebene der Charte, und seine Höhe über dieser Ebene gefunden werden.

§. 509.

Wollte man diese Aufgabe analytisch lösen, indem man die Gleichungen der drei durch die Bogen ADB, BEC, CFA beschriebenen Umdrehungsflächen combinirte, so würde man viele Auflösungen erhalten, die der Aufgabe fremd wären; denn die Analysis unterscheidet die von dem Bogen ADB beschriebene krumme Fläche nicht von der, welche der Bogen AdB beschreibt; für diese beiden Flächen findet eine und dieselbe Gleichung statt. Da aber hier die zwischen den Gesichtslinien enthaltenen Winkel durch Beobachtung gegeben sind, so ist leicht einzusehen, daß es nicht gleichgültig ist, ob man den Winkel ADB oder sein Supplement AdB nimmt. Man muß also bei der graphischen Auflösung diejenigen Curvenäste und Punkte, welche die supplementären, von den drei Bogen AdB, BeC und AfC erzeugten Flächenstücke liefern, ganz außer Acht lassen.

Siebenter Abſchnitt.

Von den windſchiefen Flächen.

Erſtes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen über windſchiefe Flächen.

§. 510.

Alle Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können, heißen im Allgemeinen gelflächen (surfaces réglées), weil man ſie über einem feſten Körper mittels einer Regel oder eines :als ausführen kann, wie es ſehr häufig in techniſchen Künſten geſchieht; aber man muß ſie in zwei wohl rſchiedene Klaſſen theilen, je nachdem das Geſetz, von dem die Bewegung der geradlinigen Erzeugenden abgt, der Bedingung entſpricht oder nicht, daß zwei auf einander folgende Lagen der beweglichen Geraden in rlei Ebene ſeien. Entſpricht es dieſer Bedingung, ſo iſt die Regelfläche entwickelbar und wird von einer derſelben Ebene nach der ganzen Länge einer Erzeugenden berührt, wie ſolches in den §§. 175 und 177 ieſen wurde. Da nun Alles, was die Beſtimmung der Berührungsebene, die Conſtruction der Erzeugenden die Entwicklung einer ſolchen Fläche betrifft, in den vorhergehenden Abſchnitten genugſam erklärt worden iſt, nders durch das allgemeine Beiſpiel des §. 465, ſo wird hier nicht wieder darauf zurückgegangen; und es delt dieſer Abſchnitt einzig von den windſchiefen Flächen, d. h. von ſolchen Flächen, welche erzeugt rden durch eine Gerade, die ſich ſo bewegt, daß keine zwei nächſt auf einander folgende endlich nahe) Lagen derſelben in einerlei Ebene ſich befinden.

§. 511.

Wie dieſe Bedingung ſich verwirklichen laſſe, wird gleich nachher gezeigt werden; vorerſt aber bemerke Fig. 107.
ı, daß ihr zufolge jedes Flächen-Element von unbeſtimmter Länge, das zwiſchen zwei unendlich nahen eugenden G und G′ ſich befindet, ſelbſt windſchief ſein muß; denn zieht man noch ſo viele Curven A, B, ... auf der krummen Fläche, ſo können nie die Linien-Elemente LL′, MM′, NN′, ... (welche Gerade ', von denen eine jede zwei Punkte mit G und G′ gemeinſchaftlich hat) in einerlei Ebene liegen, weil die den Erzeugenden G und G′ ſelbſt ſich nicht in einerlei Ebene befinden. Und da alſo die Tangenten LL′T, M′U, NN′V, ... welche die Verlängerung jener Linien-Elemente ſind, in verſchiedenen Ebenen liegen, ſo ſen die Berührungsebenen GLT, GMU, GNV, ... welche zu den Punkten L, M, N, ... er und derſelben Erzeugenden gehören, gänzlich von einander verſchieden ſein, obgleich alle Erzeugende GLMN enthalten.

§. 512.

Hieraus folgt auch, daß eine Ebene wie GLT, welche eine windſchiefe Fläche in einem Punkte L wirk berührt (d. h. die Tangenten aller durch dieſen Punkt auf der Fläche gezogenen Curven enthält), eben dieſe

läche in allen andern Punkten, welche sie noch mit ihr gemein hat, schneidet; und ihr Durchschnitt besteht stlich aus der Erzeugenden GLM selbst, und hernach noch aus einem zweiten Aste, der durch L geht und erad- oder krummlinig sein kann, je nach der Form der windschiefen Fläche.

§. 513.

Es soll nun gezeigt werden, auf welche Art die Bedingung des §. 510, welche die windschiefen Flächen haracterisirt, sich verwirklichen läßt. Nimmt man an, die bewegliche Gerade gleite nur auf einer oder auch uf zwei ihrer Gestalt und Lage nach unveränderlichen Leitcurven A und B hin, so ist die Bewegung dieser eraden nicht vollständig bestimmt; denn für jeden willkürlich auf A angenommenen Punkt L kann die gerad- nige Erzeugende eine unendliche Menge von Lagen haben, deren Ort die Kegelfläche ist, die B zur Grundlinie nd den Punkt L zur Spitze hat. Zwei Curven reichen also noch nicht hin, das Bewegungsgesetz für eine eradlinige Erzeugende zu bestimmen, den Fall ausgenommen, da die erzeugende Fläche entwickelbar werden olle, wie in §. 180; aber gerade dieser Fall wird hier als ausgeschlossen betrachtet.

Man nehme daher an, die bewegliche Gerade gleite beständig über drei Leitcurven A, B, C in, so wird man sehen, daß durch diese Bedingung das Bewegungsgesetz der Erzeugenden vollkommen bestimmt ird. Denn stellt man sich zwei Kegel vor, welche den willkürlich auf A genommenen Punkt L zum gemeinhaftlichen Scheitel und zu Grundlinien, der eine die Leitlinie B, der andere die C haben; so kann man leicht ie Spuren dieser conischen Flächen auf einer der Projectionsebenen zeichnen; und verbindet man nun die Durchhnittspunkte dieser beiden Spuren mit der gemeinschaftlichen Spitze L, so erhält man eine oder mehrere Gerade, ber in endlicher Zahl, welche, wie GLMN, offenbar auf den drei Curven A, B, C aufliegen, weil sie die Durchschnitte zweier Kegel sind, welche durch B und durch C gehen. Diese Geraden sind mithin die bestimmten agen, welche die bewegliche Erzeugende annehmen muß, wenn sie, über A hingleitend, im Punkte L ankömmt; ir andere Punkte L', L'', ... werden die Lagen dieser Erzeugenden auf ähnliche Art construirt.

Statt zwei conische Flächen anzuwenden, deren Spuren man suchen muß, ist es oft bequemer, den Durchhnitt des ersten Kegels LBM mit dem vertikalen Cylinder zu suchen, der die Leitcurve C auf die Horizontalbene projicirt. Dadurch erhält man eine Hilfscurve, deren Durchschnitt mit der Vertikalprojection von C den unkt gibt, den man mit L verbinden muß, um eine Lage der Erzeugenden zu erhalten.

§. 514.

Eine so erzeugte Fläche wird im Allgemeinen windschief sein; denn, indem die bewegliche Gerade von ner Lage GLMN zu einer andern, unendlich nahen, G'L'M'N' übergeht, kann man annehmen, sie gleite auf en drei Tangenten LT, MU, NV hin, welche mit den Leitcurven die Elemente LL', MM', NN' gemein aben; liegen daher diese Tangenten nicht alle drei in einer und derselben Ebene, so können die beiden Erzeugenden G und G' auch nicht in einer solchen liegen. Wenn nun aber gefordert würde, jene Tangenten sollten ch in einer Ebene befinden, und zwar für jede drei der zusammen gehörigen und in gerader Linie liegenden unkte (L, M, N), (L', M', N'), (L'', M'', N''), ... so müßte man die Leitlinien A, B, C ganz besonders ählen, sowohl in Hinsicht ihrer Form als ihrer Lage; folglich wird im Allgemeinen durch eine bewegliche erade, welche bei ihrer Bewegung sich stets an drei fest bestimmte Curven anlegt, eine windhiefe Fläche erzeugt.

Eine solche Fläche aber kann längs einer besondern Linie ein ebenes Flächen-Element von unbestimmter Länge haben, und zwar in dem Falle, wenn für einen gewissen Punkt L, die Spuren der beiden egel, von denen im vorigen Paragraphen die Rede war, sich berühren. Alsdann nämlich konnte die aus L ach diesem Berührungspunkt gezogene Erzeugende, ohne den Punkt L zu verlassen, auf der, beiden Spuren

meinschaftlichen, Tangente fortgleiten und dadurch ein besonderes, ebenes Flächen-Element erzeugen. Dieser ll läuft auf Eins hinaus mit der Annahme, daß die beiden Tangenten MU und NV in einerlei Ebene liegen; ıb er würde um so mehr noch stattfinden, wenn die drei Tangenten in L, M und N einer einzigen Ebene anhörten.

§. 515.

Man kann auch annehmen, die bewegliche Gerade G gleite beständig über zwei feste Curven Fig. 108.
und B hin und bleibe dabei einer gegebenen Ebene B (man nennt sie Richtebene) stets parallel. n für diese Annahme die Lagen der Erzeugenden zu construiren, darf man nur die Curven A und B durch rschiedene mit P parallele Ebenen schneiden (§. 233), und die beiden Durchschnittspunkte jeder Ebene durch eine erade verbinden, so erhält man die Geraden GLM, G′L′M′, ... welche offenbar den Bedingungen einer Erıgenden entsprechen. Die Fläche, welche der Ort aller jener Geraden ist, wird ebenfalls, im Allgemeinen, ndschief sein, weil die Tangenten LL′T, MM′U, über welche die Gerade G hingleitet, wenn sie zu der unılich nahen Lage G′ übergeht, sich gewöhnlich nicht in einer und derselben Ebene befinden.

Diese Art windschiefer Flächen fällt übrigens mit der vorigen zusammen, wenn man sich die dritte Leitrve C unendlich entfernt und in der Ebene P liegend denkt.

§. 516.

In allen Regelflächen kann man statt der Leitcurven Richtflächen nehmen, an welchen die bewegliche erade stets Tangente bleibt. Soll z. B. die Erzeugende beständig über eine Curve A und eine Fläche S hineiten und dabei stets mit einer Ebene P parallel bleiben, so lege man durch jeden auf A genommenen Punkt eine mit P parallele Ebene, welche die Fläche S in einer Curve schneiden wird, an die man von L aus angenten zieht; diese werden alsdann eben so viele Lagen der gesuchten Erzeugenden sein, und die auf solche rt erhaltene Regelfläche ist, im Allgemeinen, windschief. Ueberdieß berührt sie auch die Fläche S längs der rve, welche durch die Berührungspunkte $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ der vorerwähnten Tangenten gebildet wird; denn für die ndschiefe Fläche sowohl, als auch für die Fläche S enthält die Berührungsebene erstlich die geradlinige Erzeunde und hernach auch die Tangente an der Curve $\alpha\beta\gamma$, welche beiden Flächen gemeinschaftlich ist.

Wären zwei Flächen S und S′ sammt einer Richtebene P gegeben, so würde man die Flächen durch verıiedene mit P parallele Ebenen schneiden und hierauf eine gemeinschaftliche Tangente an die zwei durch jede nneidende Ebene gebildeten Durchschnitte ziehen.

§. 517.

Wenn die Regelfläche keine Richtebene zuläßt, so kann man auch eine oder mehrere der drei Leitcurven , B, C durch Flächen ersetzen, an welchen die Erzeugende stets Tangente sein muß. Es seien z. B., um die ewegung dieser Geraden zu leiten, die Curven A und B sammt der Fläche S gegeben; nun construire man für den auf A genommenen Punkt L zwei Kegel mit dem gemeinschaftlichen Scheitel L, von denen aber der eine die rve B zur Grundlinie hat, während der andere um die Fläche S beschrieben ist (§. 347), alsdann werden die, thwendig geradlinigen, Durchschnitte dieser beiden Kegel die Lagen der Erzeugungslinie bestimmen, wenn sie rch den Punkt L geht. Ist die Fläche S entwickelbar, so ist es kürzer, eine Berührungsebene an dieselbe zu gen, und die Punkte, in welchen diese Ebene die zwei Curven A und B schneidet, durch eine Gerade zu verıden, welche alsdann eine Lage der Erzeugenden sein wird.

Ist nur eine Curve A sammt zwei Richtflächen S und S′ gegeben, so combinire man zwei Kegel mit

einander, von denen der eine um S, der andere um S′ beschrieben ist, und welche ihren gemeinschaftlichen Schnitt in einem Punkte L der Linie A haben.

§. 518.

Sind drei Flächen S, S′, S″ gegeben, an welchen die bewegliche Gerade beständig Tangente bleiben soll, so ist die Construction der verschiedenen Lagen dieser Erzeugenden bei Weitem mühsamer, und die Aufgabe muß auf einen der vorhergehenden Fälle zurückgeführt werden. Denn wäre eine Gerade G bekannt, welche die Fläche S in einem gewissen Punkt α, S′ in α', und S″ in α'' berührte, und man ließe diese Gerade $G\alpha\alpha'\alpha''$ auf den beiden Flächen S und S′ hingleiten, daß sie immer mit einer Richtebene P parallel bliebe, so erhielte man durch die Methode des §. 516 eine Hilfsfläche Σ, welche die S″ in einer gewissen durch α'' gehenden Curve schnitte, die von der Geraden G in eben diesem Punkte α'' berührt würde; denn G befindet sich sowohl in der Berührungsebene von S″, als auch in derjenigen, welche die windschiefe Fläche Σ in α'' berührt. Man construirt also zuerst die Hilfsfläche Σ, welche die Flächen S, S′ und die Ebene P zu Richtflächen hat; hierauf suche man ihren Durchschnitt $\alpha''\beta''\gamma''$ mit der Fläche S″, so darf man jetzt nur noch an die Curve $\alpha''\beta''\gamma''$ eine Tangente ziehen, welche parallel mit der Ebene P ist, so wird diese Tangente die Lage einer Erzeugenden G der gesuchten Fläche sein, deren Richtflächen S, S′ und S″ sind. Um andere Lagen dieser Erzeugenden zu erhalten, muß man die Richtung der Ebene P ändern.

§. 519.

Man kann die Bewegung der Geraden, welche eine Regelfläche erzeugen soll, auch dadurch bestimmen, daß man als Leitlinien zwei Curven A und B annimmt, mit der Bedingung, daß die Erzeugende eine derselben beständig unter einem gegebenen Winkel schneide; oder auch, daß derjenige Theil dieser Erzeugenden, der zwischen A und B enthalten ist, stets eine bestimmte Länge behalte. Man kann auch die bewegliche Gerade längs einer einzigen auf einer gegebenen Fläche gezeichneten Curve A so hingleiten lassen, daß sie stets Normale auf der Fläche bleibt ꝛc. Aber alle diese verschiedenen Arten von Regelflächen, für deren jede man sich leicht eine den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Constructionsart ausdenken kann, sind nicht so wichtig, daß es sich der Mühe lohnte, jede besonders zu betrachten; und überdieß sind sie im Grunde keine wahrhaft von einander unterschiedenen Arten, sondern lassen sich stets auf die Arten des §. 513 zurückführen, wenn man als Leitlinien der beweglichen Geraden drei willkürlich in der Fläche gemachte Durchschnitte annimmt.

§. 520.

Zu Ergänzung dieser allgemeinen Bemerkungen fügen wir noch bei, daß man diejenigen windschiefen Flächen, welche eine Richtebene P sammt zwei Leitlinien, deren eine geradlinig ist, zulassen, den besondern Namen Conoide gibt; die andere Leitlinie kann eine Curve oder eine krumme Fläche sein. Das Conoid heißt senkrecht, wenn die geradlinige Leitlinie senkrecht auf der Ebene P steht (s. §. 584).

Sind beide Leitlinien Gerade, so erhält das Conoid den Namen hyperbolisches Paraboloid oder Conoid vom zweiten Grade, weil es das einzige ist, dessen Gleichung nicht über den zweiten Grad hinausgeht.

Wenn endlich eine Regelfläche, welche keine Richtebene zuläßt, zu Leitlinien drei beliebige Gerade hat, so heißt sie Hyperboloid mit einem Mantel: dieses Hyperboloid und das vorerwähnte Paraboloid werden also unter dem gemeinsamen Namen windschiefe Flächen vom zweiten Grade begriffen, weil die Analysis beweist, daß sie die einzigen Flächen dieser Art sind, deren Gleichung nicht über den zweiten Grad hinausgeht. Wir betrachten zuerst diese beiden besondern Arten, deren merkwürdige Eigenschaften man kennen muß, ehe man an die Untersuchung anderer windschiefer Flächen geht.

Zweites Kapitel.

Von dem Hyperboloid mit einem Mantel.

§. 521.

Hyperboloid mit einem Mantel heißt die besondere krumme Fläche, welche erzeugt wird durch Fig. 109.
beständige Fortgleitung einer beweglichen Geraden A, auf drei festen Geraden B, B′, B″,
che nicht einer einzigen Ebene parallel sind, und von denen je zwei nicht in einerlei Ebene
en; denn es wird später (§. 535) bewiesen werden, daß eine solche Fläche identisch ist mit derjenigen, welche
§. 83 mit eben diesem Namen bezeichnet wurde. Die Construction der Erzeugenden geschieht nach dem allge-
en Verfahren des §. 513, und ist hier äußerst einfach, weil die conischen Hilfsflächen sich auf Ebenen redu-
. Hat man auf der Leitlinie B einen beliebigen Punkt L angenommen, so lege man durch diesen Punkt
Ebenen, deren eine durch B′ und die andere durch B″ geht; sucht man hierauf den Durchschnitt dieser beiden
ien, so erhält man eine Gerade ALMN, die offenbar auf den drei gegebenen Leitlinien aufliegt. Man
te auch den Durchschnitt der Leitlinie B″ mit einer einzigen durch L und die Gerade B′ gelegten Ebene con-
ren, und diesen Durchschnittspunkt mit L durch eine Gerade verbinden. — Wendet man nun dieses Ver-
en nach und nach auf andere Punkte L′, L″, ... der Geraden B an, so erhält man die verschiedenen
ugenden A, A′, A″, . . . des gesuchten Hyperboloids, und da jede derselben offenbar nur eine einzige Lage
ehmen kann, indem sie durch einen gegebenen Punkt L oder L′ geht, so ist also die Bewegung der Geraden
vollkommen bestimmt durch die Bedingung, daß sie stets auf den drei gegebenen Leitlinien aufliegen soll.

§. 522.

Eine so erzeugte Fläche ist offenbar windschief; denn irgend zwei Erzeugende A und A′ könnten nur dann
einerlei Ebene sich befinden, wenn die Geraden B, B′, B″, von denen jede zwei Punkte mit A und A′ gemein
selbst in einer einzigen Ebene lägen, was aber den in der Definition des §. 510 ausgesprochenen Bedin-
gen zuwider wäre. Und da dieser Schluß hier auch dann noch gilt, wenn die Geraden A und A′ nicht un-
ich nahe genommen werden, wie der §. 500 für windschiefe Flächen im Allgemeinen es voraussetzt, so
t, daß bei dem Hyperboloid keine zwei, beliebig genommene, Erzeugungslinien desselben in
erlei Ebene liegen.

§. 523.

Wenn unter den drei Leitlinien B, B′, B″, die nach der Voraussetzung nicht einer einzigen Ebene parallel Fig. 110.
dürfen, zwei sich befänden, welche in einer und derselben Ebene B′CB″ lägen, so könnte die beweg-
e Gerade A den festgesetzten Bedingungen nur auf folgende zwei Arten Genüge leisten: 1) indem sie, während
auf B fortglettete, beständig durch den Durchschnittspunkt C ginge, wodurch sie alsdann die Ebene CBD be-
eben würde; 2) indem sie, während sie in der Ebene B′CB″ bliebe, sich beständig um den Punkt D drehte,
welchem jene Ebene von der Geraden B geschnitten wird: die auf solche Art beschriebene Fläche würde alsdann
zwei sich schneidenden Ebenen bestehen. Da aber diese Abart eines Hyperboloids, welche analog ist mit
einer auf ihre Asymptoten reducirten Hyperbel, der Untersuchung nichts Neues bietet, so wird künftig die
Voraussetzung, daß zwei Leitlinien in einer Ebene liegen, gänzlich ausgeschlossen bleiben.

§. 524.

Fig. 109. Das Hyperboloid mit einem Mantel hat eine sehr merkwürdige Eigenschaft, die besonders für die Construction von Berührungsebenen an windschiefe Flächen überhaupt sehr wichtig ist: dasselbe läßt nämlich noch eine zweite Erzeugungsart durch eine gerade Linie zu, wobei die zuvor angewendeten Erzeugungslinien zu Leitlinien werden, und umgekehrt. Läßt man nämlich eine bewegliche Gerade über irgend drei der Geraden A, A′, A″, A‴, ... welche man vorhin construirt hat, hingleiten, so wird diese neue Erzeugende, welche offenbar in dreien ihrer Lagen mit B, B′ und B″ zusammenfällt, eine dem ersteren Hyperboloide identische Fläche beschreiben, sowohl was die Form, als auch was die Lage betrifft. Ehe jedoch diese schöne Eigenschaft bewiesen werden kann, müssen zwei aus der Theorie der Transversalen bekannte Sätze vorausgeschickt werden.

§. 525.

Fig. 111. Lehnsatz 1. Wenn man in einem Dreieck ABC irgend eine Transversale PQR zieht, welche, indem sie die drei Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen schneidet, sechs Abschnitte bildet, so ist das Product aus drei nicht aneinander stoßenden Abschnitten dem Producte der drei andern Abschnitte gleich; d. h. es ist:

$$AP \,.\, CR \,.\, BQ = AQ \,.\, BR \,.\, CP \;.\;.\;.\;.\;. \text{ (x)}$$

Zieht man nämlich die Gerade BH parallel mit PQR, so erhält man die Proportionen:

$$AQ : QB = AP : PH$$

und

$$CR : BR = CP : PH;$$

aus den ersten dieser Proportionen erhält man

$$PH = \frac{AP \,.\, QB}{AQ}$$

und aus der zweiten

$$PH = \frac{CP \,.\, BR}{CR}.$$

Setzt man nun diese beiden Werthe von PH einander gleich, so erhält man die Formel (x).

§. 526.

Fig. 112. u. 113. Lehnsatz 2. Wenn man in einem windschiefen Viereck ABCD zwei Gerade MN und PQ zieht, welche, indem jede derselben mit zwei Gegenseiten des Vierecks oder ihren Verlängerungen zusammenstößt, sich selbst in einem gewissen Punkte O schneiden, so ist das Product aus vier nicht zusammenstoßenden Abschnitten immer dem Producte aus den vier andern Abschnitten gleich; d. h. es ist:

$$AP \,.\, BN \,.\, CQ \,.\, DM = AM \,.\, DQ \,.\, CN \,.\, BP. \text{ (y)}$$

Man bemerke zuerst, daß, wenn die zwei Transversalen MN und PQ sich wirklich schneiden, sie alsdann in einer Ebene liegen müssen, welche auch die Geraden PN und MQ enthalten wird, die folglich sich in einem gewissen Punkte R schneiden werden; da aber von diesen Geraden PN und MQ die eine in der Ebene des Dreiecks ABC, und die andere in der Ebene des Dreiecks ADC liegt, welche beide Ebenen sich in der Diagonale AC schneiden, so muß der Durchschnittspunkt R der Linien PN und MQ genau auf dieser Diagonale liegen. Daraus aber folgt, daß man, um in einem windschiefen Viereck zwei entgegengesetzte Transversalen, die sich wirklich schneiden, zu erhalten, die eine MN derselben und einen Punkt P der zweiten willkürlich annehmen kann;

man aber hierauf die Geraden PNR und RM ziehen müſſe, durch welche letztere die Lage des Punktes Q, man mit P verbinden muß, beſtimmt wird.

Dieſes vorausgeſetzt, geben die Dreiecke ABC und ADC, welche von den Transverſalen PNR und MQR hnitten werden, nach dem vorigen Lehrſatz:

$$AP \cdot BN \cdot CR = AR \cdot CN \cdot BP,$$

$$CQ \cdot DM \cdot AR = CR \cdot DQ \cdot AM;$$

tiplicirt man nun dieſe Gleichungen Glied für Glied mit einander und läßt auf beiden Seiten die gleichen toren weg, ſo erhält man die Gleichung

$$AP \cdot BN \cdot CQ \cdot DM = AM \cdot DQ \cdot CN \cdot BP; \quad (y)$$

he auch ſo geſchrieben werden kann:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QD} = \frac{AM}{MD} \cdot \frac{CN}{NB}. \quad (z).$$

§. 527.

Umgekehrt: wenn zwei Gerade PQ und MN die Gegenſeiten eines windſchiefen Vierecks ABCD ſo iden, daß die Formel (y) ſtattfindet, ſo liegen dieſe beiden Transverſalen in einer und derſelben Ebene. n wäre dieſes nicht der Fall, ſo könnte man durch den Punkt P eine Gerade PQ′ ziehen, welche MN ſchnitte, man hätte alsdann:

$$AP \cdot BN \cdot CQ' \cdot DM = AM \cdot DQ' \cdot CN \cdot BP,$$

he Gleichung mit der als richtig anerkannten Formel (y) unvereinbar iſt, weil, im Falle CQ′ größer iſt als , nothwendig DQ′ kleiner als DQ ſein muß.

§. 528.

Was nun die in §. 524 erwähnte doppelte Beſchreibungsart des Hyperboloids mit einem Mantel betrifft, Fig. 109.
kann bewieſen werden, daß jede Gerade B‴DD′D‴, welche auf irgend drei Erzeugungslinien A′, A‴, der erſten Art aufliegt, auch alle übrigen Erzeugenden dieſes Syſtems ſchneiden ſſe; daß ſie alſo z. B. auch die Gerade A″ in einem gewiſſen Punkte D″ treffen werde. Hieraus aber folgt nn offenbar, daß alle Punkte dieſer Linie B‴ auf dem erſten mittels der drei Erzeugenden B, B′, B″ con- rten Hyperboloid liegen müſſen, und daß alſo jede dieſer letzteren Geraden die nämliche krumme Fläche be- iben würde, wenn ſie über drei Gerade des Syſtems A hingeleitete.

Da nun nach der erſten Erzeugungsart die drei Geraden B, B′, B″ von den Geraden A, A′, A″ ge- itten werden, ſo erhält man aus dem Viereck LNN‴L‴ nach der Formel (z) die Gleichung

$$\frac{LL'}{L'L'''} \cdot \frac{N'''N'}{N'N} = \frac{LM}{MN} \cdot \frac{N'''M'''}{M'''L'''}; \quad (1)$$

aber die Gerade A″ die drei Geraden B, B′, B″, und die Gerade B″ die drei Geraden A, A′, A‴ ſchneidet, rhält man aus dem nämlichen Viereck, nach der Formel (z), die beiden folgenden Gleichungen

$$\frac{LL''}{L''L'''} \cdot \frac{N'''N''}{N''N} = \frac{LM}{MN} \cdot \frac{N'''M'''}{M'''L'''}, \quad (2)$$

$$\frac{LD}{DN} \cdot \frac{N''D'''}{D'''L'''} = \frac{LL'}{L'L'''} \cdot \frac{N'''N'}{N'N}; \quad (3)$$

nun in dieſen beiden Gleichungen die Glieder rechts vom Gleichheitszeichen einander gleich ſind, nach (1), ſo t, daß auch

$$\frac{LD}{DN} \cdot \frac{N'''D'''}{D'''L'''} = \frac{LL''}{L''L'''} \cdot \frac{N'''N''}{N''N}, \qquad (4)$$

woraus nach §. 527 hervorgeht, daß die beiden Geraden A'' und B''' sich wirklich in einem Punkte D'' schneiden.

§. 529.

Man bemerke hier, daß das den beiden Gleichungen (1) und (2) gemeinschaftliche Glied, rechts vom Gleichheitszeichen, eine constante Größe k ist, welche unverändert bleibt, sobald die Lage der fünf Geraden B, B', B'', A, A''' einmal bestimmt ist; daraus aber folgt, daß für irgend eine neue Gerade A', welche auf den drei ersteren aufliegt, man immer wieder erhält

$$\frac{LL'}{L'L'''} = k \frac{NN'}{N'N'''} \qquad (5)$$

Sind nun die drei Geraden B, B', B'' einer und derselben Ebene parallel, so schneiden sie bekanntlich die beiden A und A''' in proportionale Theile, so daß alsdann $k = 1$ ist,*) und die Gleichung

$$\frac{LL'}{L'L'''} = \frac{NN'}{N'N'''}$$

in welche sich alsdann der Ausdruck (5) verwandelt, beweist, daß in diesem Falle die drei Geraden A, A', A''' ebenfalls einer einzigen, aber von der ersteren verschiedenen, Ebene parallel sind. Dieses ist, wie später (§. 553) gezeigt werden wird, beim hyperbolischen Paraboloid der Fall.

§. 530.

Fig. 109. Berührungsebene. Weil durch jeden Punkt des Hyperboloids zwei Gerade gehen (§. 528), die eine vom System A, die andere vom System B, und weil diese Geraden ihre eigenen Tangenten sind, so müssen sie also beide in derjenigen Berührungsebene liegen, die zu dem Punkte, in welchem sie sich schneiden, gehört; es kann mithin durch jene beiden Geraden die Berührungsebene sammt ihren Spuren vollkommen bestimmt werden. Ist also ein Hyperboloid durch die drei Leitlinien B, B', B'' gegeben und der Berührungspunkt D auf einer ebenfalls gegebenen Erzeugenden A bestimmt, so muß man wenigstens noch zwei andere Lagen A' und A'' dieser Erzeugenden construiren (§. 510), und hierauf, indem man diese Linien A, A' und A'' als Leitlinien annimmt, eine Gerade DD'D'' suchen, welche auf ihnen aufliegt und durch den Punkt D geht (§. 510). Diese Gerade DD'D'' wird alsdann in der Fläche des Hyperboloids liegen, und wenn man durch die beiden Linien AD und DD'D'' eine Ebene legt, so wird diese die zum Punkt D gehörige Berührungsebene sein. Da diese Auflösung so höchst einfach ist, so bleibt sie dem Leser überlassen.

§. 531.

Sind die zur Construction eines Hyperboloids nöthigen Stücke auf beiden Projectionsebenen gegeben, und kennt man von dem Punkte D auf der Fläche, durch welchen die Berührungsebene gehen soll, nur seine Ho-

*) Dieses erhellet aus dem siebenzehnten Satz des elften Buches der Elemente Euklids. Nach diesem verhält sich nämlich

$$LM : MN = L'''M''' : N'''M''';$$

mithin ist

$$\frac{LM}{MN} = \frac{L'''M'''}{N'''M'''}$$

und folglich

$$\frac{LM}{NM} \cdot \frac{N'''M'''}{L'''M'''} = k = 1$$

Anmerk. d. Uebersetzers.

izontalprojection, ſo kann die Erzeugende AD nicht eher gezogen werden, als bis man auch die Vertikal-rojection des Punktes D gefunden hat. Zu dieſem Zwecke muß man, im Allgemeinen, irgend eine Vertikalebene urch dieſen Punkt legen, und hierauf den Durchſchnitt ſuchen, den ſie mit der krummen Fläche macht, indem an die Durchſchnittspunkte jener ſchneidenden Ebene mit den verſchiedenen Erzeugenden conſtruirt, welche auf den gebenen Linien B, B′, B″ aufliegen; auf dieſen Durchſchnitt endlich muß man den auf der Horizontalebene ge-benen Punkt D projiciren. Nun kennt man die beiden Projectionen des Berührungspunktes, und kann alſo e Projectionen der Erzeugungslinie A, welche durch dieſen Punkt geht, conſtruiren, wodurch dieſer Fall auf den s vorigen Paragraphen zurückgeführt wird.

§. 532.

Mittelpunkt des Hyperboloids. Dieſe krumme Fläche hat einen Mittelpunkt, d. h. es gibt einen Fig. 114.
unkt, der alle durch ihn gezogenen Sehnen derſelben halbirt. Um dieſes zu beweiſen, ſeien B, ′, B″ drei urſprüngliche Leitlinien, die den Bedingungen des §. 521 genügen; nun kann man durch die Ge-den B′ und B″ zwei von einander verſchiedene Ebenen B′DC und B″CD legen, von denen jede der Leitlinie parallel iſt, und welche ſich in einer, offenbar mit B parallelen Geraden ACD ſchneiden; dieſe Linie ACD er wird eine Erzeugende des gegebenen Hyperboloides ſein, weil ſie auf B′ und B″ aufliegt, und die dritte B unendlicher Entfernung ſchneidet. Legt man eben ſo durch B″ und B zwei mit B′ paralle Ebenen B″GH nd BHG, ſo ſchneiden dieſe ſich in einer Geraden A′GH, welche ebenfalls eine Erzeugende des Hyperboloides in wird; und ſo findet man endlich auch vermittels der beiden mit B″ parallelen Ebenen BHF und B′DI, e man durch B und B′ gelegt hat, eine dritte Erzeugende A″KE. Hieraus aber folgt erſtlich, daß jede rzeugende eines Syſtemes ihre Parallele im entgegengeſetzten Syſteme habe; denn was in Be-ehung auf B geſagt wurde, gilt eben ſo gut auch für jede andere Erzeugende B‴, B⁗, ... die ſtatt B als itlinie genommen werden kann (§. 528). Fürs Zweite bilden die ſechs auf die eben angegebene Art con-ruirten Ebenen ein Parallelepipedum, deſſen entgegengeſetzte Kanten die ſechs Geraden B, B′, B″, und A, A′, ″ ſind; und es kann nun erwieſen werden, daß der Mittelpunkt O dieſes Parallelepipeds auch der Mittel-unkt des Hyperboloids iſt.

Man ziehe, um dieſen Beweis zu führen, durch einen willkürlich auf der Leitlinie B genommenen Punkt ne Gerade M′MM″, welche die beiden andern Leitlinien in M′ und M″ ſchneidet und daher eine Erzeugende s Syſtemes A ſein wird; hierauf vergleiche man ſie mit einer Erzeugenden des Syſtemes B, welche auf A, A′ nd A″ aufliegt und mit MM′M″ parallel iſt. Um aber dieſe neue Erzeugende zu erhalten, mache man

$$DN = HM,\quad GN' = EM',\quad EN'' = GM'',$$

werden die drei hiedurch beſtimmten Punkte N, N′ und N″ in einer geraden Linie liegen. Denn zieht man ie Linien OM und ON, ſo ſind die Dreiecke OMH und OND einander congruent und mithin die Seiten OM nd ON gleich und in gerader Linie; das Nämliche gilt auch für die Linien OM′ und ON′, OM″ und ON″ benfalls wegen der Congruenz gewiſſer Dreiecke, die in der Figur leicht aufgefunden werden können. Hieraus lber folgt ferner die Congruenz der Dreiecke MOM′ und NON′, und aus dieſer der Parallelismus der Seiten IM′ und NN′; und endlich folgt aus der Congruenz der Dreiecke MOM″ und NON″, daß auch MM″ und N″, parallel ſind. Die beiden Stücke N′N und NN″ bilden alſo eine einzige Gerade, und zwar eine Erzeu-ende des Syſtemes B, welche der nach Belieben genommenen Erzeugenden M′MM″ vom Syſtem A parallel iſt; rner erſieht man, daß zwei parallele Erzeugende ſich immer in einer durch den Punkt O gehen-en Ebene befinden und gleichweit von dieſem Punkte entfernt ſind.

Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt P der Geraden M′MM″ eine Sehne POQ, die durch en Punkt O geht, ſo muß ſolche nothwendig das Hyperboloid in einem auf N′NN″ gelegenen Punkte Q

ſchneiden, und es iſt nun nach dem Vorhergehenden $OP = OQ$; da aber dieſer Schluß richtig bleibt für jeden auf dem Hyperboloid genommenen Punkt, ſo iſt ſomit bewieſen, daß O der Mittelpunkt dieſer krummen Fläche iſt. *)

§. 533.

Man bemerke, daß, wenn es ſich blos um die Conſtruction dieſes Mittelpunktes handelt, man dieſen erhalten kann, ohne vorher das Parallelepipedum zu zeichnen, von dem ſo eben die Rede war. Man darf nämlich nur den Durchſchnitt der drei Ebenen ſuchen, die man durch die gegebene Gerade B und ihre Parallele A, durch B′ und ihre Parallele A′, durch B″ und ihre Parallele A″ gelegt hat; denn jede dieſer Diagonalebenen geht offenbar durch den Mittelpunkt des Parallelepipedes, der auch der Mittelpunkt des Hyperboloids iſt. Aus Gründen, die im §. 546 entwickelt werden, heißen dieſe Ebenen die drei aſymptotiſchen Ebenen der krummen Fläche.

§. 534.

Nimmt man die vorhergehenden Sätze zuſammen, ſo erſieht man daraus, daß es in jedem Hyperboloid mit einem Mantel

1) zwei Syſteme geradliniger Erzeugenden

$$A, A', A'', A''' \ldots\ldots \text{ und } B, B', B'', B''' \ldots.$$

gibt, deren jede alle Geraden des entgegengeſetzten Syſtems ſchneidet (§. 528); doch hat jede Erzeugende A′ ihre Parallele im Syſtem B (§. 532) und umgekehrt; ſo daß alſo für ſolche zu zwei und zwei genommene Geraden der Durchſchnitt erſt in unendlicher Entfernung ſtattfindet.

2) Zwei Erzeugende des Syſtemes A befinden ſich nie in einer einzigen Ebene (§. 522); eben ſo auch nicht die Erzeugenden des Syſtemes B, weil dieſe letzteren auf drei Geraden vom Syſteme A, welche in verſchiedenen Ebenen ſich befinden, aufliegen (§. 528).

3) Irgend drei Geraden vom Syſtem A ſind nie einer und derſelben Ebene parallel; denn wäre dieſes der Fall, ſo würde nach §. 529 daraus folgen, daß die Leitlinien B, B′, B″, auf welchen alle Erzeugenden der erſten Art aufliegenden, alle drei ebenfalls einer und derſelben Ebene parallel wären, was gegen die Definition des §. 521 iſt. Umgekehrt ſind auch irgend drei Erzegungslinien vom Syſtem B niemals einer und derſelben Ebene parallel; denn es würde daraus, nach §. 529, eine ähnliche Beſchränkung für die Geraden vom Syſtem A folgen, auf welchen alle jene Erzeugenden der zweiten Art aufliegen.

---

*) Herr J. Binet hat gezeigt (Journal de l'Ecole polytechnique, 16. cahier), welche unter den mit dem Hyperboloid concentriſchen Parallelepipeden durch irgend drei Erzeugende eines Syſtems ſammt ihren Parallelen im entgegengeſetzten Syſteme auf obige Art gebildet werden können. Dieſer gelehrte Geometer hat viele intereſſante Folgerungen daraus gezogen, unter denen wir aber hier nur folgende herausheben: 1) daß jedes dieſer Parallelepipede um das Hyperboloid beſchrieben iſt, weil jede Seitenfläche deſſelben zwei Erzeugende enthält und in dem Punkte, wo dieſe ſich ſchneiden, zur Berührungsebene wird; 2) daß dieſe Parallelepipede für die Auffindung des Mittelpunktes der durch drei geradlinige Erzeugungslinien beſtimmten windſchiefen Fläche eine ſehr elegante graphiſche Conſtructionsart gewähren; 3) daß ſie auch in analytiſcher Hinſicht von großem Nutzen ſind, weil, wenn man dieſen Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Ordinatenaxen nimmt, die man parallel mit den drei gegebenen Richtungslinien gewählt hat, alsdann die Gleichung der krummen Fläche ſich unter folgender ſehr einfacher Form darſtellen läßt:

$$\frac{xy}{\alpha\beta} + \frac{yz}{\beta\gamma} + \frac{xz}{\alpha\gamma} + 1 = 0;$$

denn da die wirklichen Axen offenbar drei Seiten des aſymptotiſchen Kegels ſind, ſo muß die Coordinatenebene die krumme Fläche in einer Hyperbel ſchneiden, welche die beiden in dieſer Ebene enthaltenen Axen zu Aſymptoten hat.

4) Der Mittelpunkt des Hyperboloids liegt in der Mitte des Parallelepipeds, das aus irgend drei Geraden des Systemes A sammt dreien Erzeugenden vom System B, welche jenen ersten drei Geraden parallel sind, gebildet wird (§. 532); oder einfacher: er ist gegeben durch den Durchschnitt dreier asymptotischen Ebenen (§. 533).

5) Irgend eine Gerade D kann das Hyperboloid in nicht mehr als zwei Punkten schneiden; denn hätte sie drei Punkte mit demselben gemein, so würde sie auf dreien Erzeugenden des einen oder des andern Systemes aufliegen, und also ganz mit dem Hyperboloid zusammenfallen. Um aber diese Durchschnittspunkte zu finden, muß man, wie in §. 531, den Durchnitt construiren, den eine durch die Gerade D gelegte Vertikal- oder Horizontalebene mit dem Hyperboloide macht.

§. 535.

Die windschiefe Fläche, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die bei ihrer Bewegung stets auf drei andern festbestimmten und nicht mit derselben Ebene parallelen Geraden aufliegt, ist identisch mit dem Hyperboloid mit einem Mantel, das in §. 83 beschrieben wurde. — Denn diese windschiefe Fläche ist erstlich vom zweiten Grade, weil man, auch ohne Calcul, leicht sehen kann, daß die Bedingungen, nach welchen die bewegliche Gerade einen Punkt mit jeder Leitlinie gemein haben soll, nur auf eine Gleichung vom zweiten Grade führen können. Fürs Zweite hat diese windschiefe Fläche einen Mittelpunkt (§. 532); da sie nun offenbar weder ein Kegel noch ein Cylinder sein kann, welche beide entwickelbare Flächen sind, so muß sie ein Ellipsoid oder eines der beiden Hyperboloide sein. Nun ist aber das Ellipsoid eine nach allen Seiten hin begrenzte Fläche (§. 81), die also zur Erzeugenden keine unbestimmte Gerade haben kann, andererseits hat das Hyperboloid des §. 85 zwei durch einen imaginären Raum von einander gesonderte Mäntel, so daß also eine unbestimmte und stetige Gerade nicht mit allen ihren Punkten in dieser krummen Fläche liegen kann; mithin kann die windschiefe Fläche, von der es sich hier handelt, nichts anderes sein, als das Hyperboloid des §. 83.

§. 536.

Um diese Identität, die im ersten Augenblick den Leser etwas befremden mag, noch deutlicher zu zeigen, Fig. 119.
will hier synthetisch bewiesen werden, daß das in §. 83 beschriebene Hyperboloid wirklich zwei Systeme geradliniger Erzeugungslinien zulasse. Nach der Definition dieser krummen Fläche sind alle auf ihrer imaginären Axe senkrechten Schnitte ähnliche Ellipsen; schneidet man sie daher durch drei Horizontalebenen e′a′, X′, V″X″, von denen die erste durch den Mittelpunkt geht, und die beiden andern sich ober- und unterhalb und in gleicher Entfernung von diesem Punkte befinden, so erhält man die Kehlellipse (abef, a′e′) und zwei andere gleiche Ellipsen, welche zu ihrer gemeinschaftlichen Horizontalprojection die Ellipse VUXY haben, deren Axen mit denen von abef parallel und proportionirt sind. Zieht man nun an letztere irgend eine Tangente DB, so sind bekanntlich die Theile AD und DB derselben einander gleich;*) und verbindet man hierauf den Punkt (D, D′) mit (A, A′) und (B, β), so erhält man zwei Geraden (AD, A′D′) und (DB, D′β′), von denen die eine die Verlängerung der andern ist, weil sie die Hypotenusen der beiden rechtwinkligen und offenbar kongruenten Dreiecke sind, die sich in D′I′A′ und D′I″β′ projicirt finden. Hieraus folgt aber, daß die ganze Gerade (ADB, A′D′β′) drei Punkte mit dem Hyperboloid gemeinschaftlich hat, und mithin ganz in dieser Fläche liegt, welche vom zweiten Grade ist.

Projicirt man nun den Punkt A auf die obere Ellipse in α′ und den Punkt B auf die untere Ellipse in

*) Dieses erhellet ganz leicht aus der rein geometrischen Definition der conjugirten Durchmesser und der ähnlichen Curven.

B′ und verbindet dieſe zwei Punkte im Raume mit dem Punkt (D, D′), ſo erhält man noch zwei Geraden (BD, B′D′) und (DA, D′α′), von denen man ebenfalls beweiſen kann, daß ſie eine einzige Gerade bilden; ſo daß alſo die ganze Gerade (BDA, B′D′α′) drei Punkte mit dem Hyperboloid gemeinſchaftlich hat, und mithin ganz auf dieſer Fläche vom zweiten Grade liegt.

§. 537.

119. Hieraus aber folgt, daß jede Vertikalebene ADB, welche die Kehlellipſe berührt, das Hyperboloid in zwei beſtimmten Geraden ſchneidet, welche ſich im Punkte (D, D′) dieſer Kehlellipſe kreuzen, und in Beziehung auf die Vertikale D eine ſymmetriſche Lage haben. Man kann alſo annehmen, die krumme Fläche ſei durch die Gerade (AD, A′D′), oder durch die Gerade (BD, B′D′), welche ſich ſo bewegen mußte, daß ſie ſtets auf den drei ähnlichen Ellipſen

(XYVU, X′Y′), (abef, a′e′), (XYVU, X″Y″)

auflag, erzeugt worden; denn aus §. 513 iſt bekannt, daß ſolche Bedingungen die Bewegung einer gerade Linie vollkommen beſtimmen. Die verſchiedenen Lagen dieſer beiden Erzeugenden bilden daher zwei Syſteme unbegrenzter Geraden, welche alle auf dem Hyperboloid liegen, nämlich:

[A] (AD, A′D′), (A_2E, A'_2E′), (A_3F, A'_3F′), ...

[B] (BD, B′D′), (B_2E, B'_2E′), (B_3F, B'_3F′), ...

und deren Vertikalprojectionen alle Tangenten an der in der Vertikalebene XV enthaltenen Hyperbel (X″a′X′, V″e′V′) ſind. Denn in dem Punkte (N, N′), in welchem eine jener Erzeugenden die Ebene VX ſchneidet, iſt die Berührungsebene der krummen Fläche ſenkrecht auf der Vertikalebene, indem ſie die Tangente an der horizontalen Ellipſe, die ihren Scheitel in (N, N′) hat, enthält; mithin fällt die Vertikalprojection der Erzeugenden (BND, B′N′D′) mit der Tangente der Hyperbel (X″a′X′, aX), welche ebenfalls in jener Berührungsebene liegt, zuſammen. Der nämliche Umſtand findet ſtatt in Beziehung auf die Gerade (ADN, A′D′N′), welche dieſe Hyperbel im Punkte (N, N′) berührt; und die Aſymptoten dieſer Curve werden von den Erzeugenden (bK, O′K′) und (fB_2, $O'B'_2$) gebildet, welche, da ſie mit der Vertikalbene VX parallel ſind, die Hyperbel erſt in unendlicher Entfernung berühren.

§. 538.

119. Irgend zwei Erzeugende vom Syſtem A ſind nie in derſelben Ebene, und die krumme Fläche iſt windſchief. Man betrachte z. B. die beiden Geraden (AD, A′D′) und (A_2G, A'_2G′); wenn ſie ſich ſchnitten, ſo würde ihr Durchſchnittspunkt ſich horizontal in M projiciren; da aber, für die erſte dieſer Geraden, der Punkt M über den auf der Kehlellipſe liegenden Punkt D hinausfällt, ſo muß er auf dem obern Mantel, in M″, liegen; während, für die Gerade (A_2G, A'_2G′), der Punkt M dieſſeits von G fällt und alſo auf dem unteren Mantel liegen und ſeine Projection in M′ haben muß. Die beiden betrachteten Geraden ſchneiden ſich alſo nicht, und ſind, wie leicht einzuſehen, auch nicht parallel.

Eben ſo beweist man auch, daß zwei Erzeugende vom Syſtem B nie in einer Ebene liegen.

§. 539.

Dagegen ſchneidet jede Erzeugende (A_2G, A'_2G′) vom erſten Syſtem alle Geraden des zweiten, z. B. die (BD, B′D′). Denn der Punkt M, in welchem die Horizontalprojectionen dieſer beiden Geraden ſich treffen, liegt, auf der einen wie auf der andern, dieſſeits der Punkte D und G der Kehlellipſe; mithin finden ſich dieſesmal die beiden in M projicirten Punkte auf dem untern Mantel des Hyperboloids, und folglich beide ihre Vertikalprojection in M′, weil der obere Mantel von der Vertikalen M nur in einem ein

kte geschnitten werden kann. Man bemerke jedoch, daß man eine Erzeugende vom System A und eine vom tem B, welche durch die Endpunkte eines und desselben Durchmessers der Kehlellipse gingen, parallel finden de; diese liegen also wenigstens in einer Ebene.

Eben so kann man beweisen, daß jede Erzeugende vom System B alle Erzeugenden des Systems A schnei- eine ausgenommen, mit welcher sie parallel ist.

§. 540.

Da nun die Bewegung einer Geraden vollkommen bestimmt ist durch die Bedingung, daß dieselbe stets drei festen Geraden aufliegen solle (§. 510), so folgt, daß, wenn man die Erzeugende (AD, A′D′) über ıb drei Geraden vom System B hingleiten ließe, sie keine andere als die Lagen A_2, A_3, A_4, ... annehmen te, von welchen allen jene drei Leitlinien geschnitten werden (§. 527); eben so: daß die Erzeugende (BD, ′), wenn sie über drei Gerade vom System A hingleitete, nothwendig mit den Lagen B_2, B_3 B_4, ... mmenfallen müßte. Das Hyperboloid der Fig. 119. hat also alle Eigenschaften der windschiefen Fläche des 21; und wenn die drei Leitellipsen Kreise wären, so erhielte man das Umdrehungs-Hyperboloid, wovon en §§. 140, 141, . . . die Rede war.

§. 541.

Berührungsebene. Wenn das Hyperboloid mit einem Mantel durch die drei ähnlichen, in §. 537 eführten Ellipsen gegeben ist (welche Curven man leicht construiren kann, wenn man die drei Axen Oa = ′, Ob und O′c′ der Fläche kennt), so findet man leicht die Berührungsebene zu irgend einem Punkte, wenn die Horizontalprojection M desselben gegeben ist. Denn zieht man durch den Punkt M eine Tangente AMB die Kehlellipse, so ist solche zugleich die Horizontalprojection zweier Erzeugenden, welche auf der Vertikalebene h A′D′ und B′D′ dargestellt sind, und auf welche man den gegebenen Punkt in M″ oder in M′ projiciren i, so daß man also zwei Lagen für den gegebenen Punkt erhält. Man betrachte nun zuerst den auf der aden (ADM, A′D′M″) liegenden Punkt (M, M″); durch diesen geht noch eine zweite, dem System B an- örige Erzeugende (B_1GM, B'_1G′M″), welche man erhält, wenn man durch den Punkt M die neue Tangente B an die Kehlellipse zieht. Durch diese beiden Erzeugenden nun wird die Berührungsebene des Hyperbo- es im Punkte (M, M″) vollkommen bestimmt, und die Fußpunkte jener Geraden geben unmittelbar die hori- tale Spur AB_1P dieser Ebene. Die vertikale Spur PQ′ erhält man mittels der mit AB_1 parallel gezogenen rizontalen (MQ, M′Q′). Fig. 119.

Die Berührungsebene für den andern Punkt (M, M′) erhält man aus den beiden Erzeugenden (BMD, M′D′) und (A_1MG, A'_1M′G′), welche sich in jenem Punkte schneiden; und die horizontale Spur der Be- rungsebene an diesem neuen Punkte ist die Gerade A_1B, die offenbar mit AB_1 parallel sein wird. Die tikale Spur erhält man auf die nämliche Art wie vorhin.

§. 542.

Um bei der graphischen Darstellung des Hyperboloids durch seine geradlinigen Erzeugenden eine recht metrische Figur zu erhalten, muß man die Sehnen AB, A_2B_2, A_3B_3, ... auf der Horizontalebene so hlen, daß, früher oder später, die Endpunkte der einen die Anfangspunkte der andern werden. Wäre nun Curve XYVU, welcher diese Sehnen angehören, ein Kreis, so dürfte man, um dieser Forderung zu genügen, den Umfang desselben in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen und hierauf Sehnen ziehen, welche alle : bestimmte Zahl dieser Theilbögen umspannten; diese Sehnen wären alsdann zugleich Tangenten an dem ilkreis, der von ihren auf einander folgenden Durchschnitten gebildet würde. Angenommen nun, man habe

dieſe Conſtruction wirklich an dem um VX als Durchmeſſer beſchriebenen Kreiſe ausgeführt, ſo ſtelle man ſich vor, dieſer drehe ſich um VX, und zwar um ſo viel, daß die Ellipſe XYVU gerade ſeine Horizontalprojection werde, ſo müſſen natürlich die Sehnen des Kreiſes ſich auf Sehnen der Ellipſe projiciren, die zu zwei und zwei von einerlei Punkten im Umfang der Ellipſe ausgehen; dieſe neuen Sehnen aber werden offenbar Tangenten an der innern Ellipſe ſein, auf welche ſich der vorerwähnte Kehlkreis projicirte. Aus dieſem Allem folgt nun, daß man die Punkte A, A_2, A_3, ... ſo wählen muß, daß ſie den Ordinaten, welche die Kreislinie VX in gleiche Bogen theilen, entſprechen; alsdann zieht man in der Ellipſe XYVU die Sehnen AB, A_2B_2, ... welche immer eine gleiche Zahl der Ellipſenbögen umſpannen, obgleich dieſe nicht, wie die Kreisbögen, von gleicher Länge ſind. Hat man nun auf dieſe Art die Erzeugenden auf der Horizontalebene alle beſtimmt, ſo erhält man leicht ihre Vertikalprojectionen, indem man die Endpunkte A und B in A′ und β', und hierauf auch in α' und B′, auf die beiden Parallelen V′X′ und V″X″ projicirt. Die auf einander folgenden Durchſchnitte aller dieſer Erzeugenden liefern, wenn ſie in hinlänglicher Anzahl vorhanden ſind, von ſelbſt den Umriß der Kehlellipſe auf der Horizontalebene und die beiden Aeſte der mit der Vertikalebene parallelen Hyperbel.

§. 543.

Fig. 119. Der aſymptotiſche Kegel des Hyperboloids. Zieht man durch den Mittelpunkt (O, O′) dieſer windſchiefen Fläche Gerade, welche den verſchiedenen Erzeugenden des Syſtems A beziehlich parallel ſind, ſo müſſen ſie zugleich auch den Erzeugenden des Syſtemes B parallel ſein, weil jede Gerade des einen Syſtems ihre Parallele im andern hat (§. 532), und man erhält auf dieſe Art eine aſymptotiſche Kegelfläche des gegebenen Hyperboloids. Um dieſes zu beweiſen, ſuche man zuerſt die horizontale Spur dieſes Kegels. Betrachtet man zu dieſem Zwecke irgend eine Seite Om deſſelben und die beiden Erzeugenden D·A und HR, welche ihr parallel ſind, ſo liegen dieſe drei Geraden in einer und derſelben Ebene, welche durch den horizontalen Durchmeſſer (DOH, D′O′) geht; mithin wird die Spur dieſer Ebene eine mit DOH parallele Sehne ſein, und die Mitte m dieſer Sehne iſt offenbar der Fußpunkt der Seite Om. Verfährt man eben ſo in Beziehung auf eine andere Seite des Kegels und diejenigen beiden Erzeugenden des Hyperboloids, welche jener Seite parallel ſind, ſo wird man ſehen, daß die horizontale Spur vmyx des geſuchten Kegels durch die Mittelpunkte aller der Sehnen gebildet wird, welche, wie RA, eine gleiche Zahl Theile von der Ellipſe VYX umſpannen; nun iſt aus dem vorigen Paragraphen bekannt, daß alle dieſe Sehnen zuſammen eine Ellipſe bilden, welche der VYX ähnlich iſt, und welche von eben jenen Sehnen ſo berührt wird, daß jedesmal der Berührungspunkt in die Mitte der Sehne fällt; mithin iſt die Spur vmyx wirklich eine Ellipſe, welche die eben erwähnte Eigenſchaft hat, und deren halbe große Axe die, der bK gleiche, Gerade Ov iſt.

Der ſo conſtruirte Kegel nun iſt der aſymptotiſche Kegel des Hyperboloids; denn ſchneidet man dieſe beiden krummen Flächen durch Horizontalebenen, ſo erhält man Ellipſen als Durchſchnitte, welche den Ellipſen VYX und vyx ähnlich ſind, und welche, wie dieſe letzteren, zum Unterſchied ihrer Halbaxen eine veränderliche Größe Vv haben, die der Länge V′K′ des Zwiſchenraumes, der die Hyperbel V′e′V″ von ihrer Aſymptote O′F′ trennt, gleich iſt. Dieſer Zwiſchenraum nun wird immer kleiner und nähert ſich immer mehr der Null, je weiter unter dem Mittelpunkt O′ der Horizontalſchnitt gemacht wird; die beiden Durchſchnitte alſo, welche durch eine ſich immer weiter vom Mittelpunkt entfernende Horizontalebene gemacht werden, ſind ähnliche Ellipſen, die ſich immer mehr — ins Unendliche fort — einander nähern, von denen aber gleichwohl die erſtere ſtets die zweite umgibt; ſo daß alſo beide krumme Flächen ſich wirklich aſymptotiſch zu einander verhalten.

§. 544.

79. Ebene Durchſchnitte des Hyperboloids. Um einen von einer gegebenen Ebene ε gemachten

zu erhalten, darf man nur die Punkte ſuchen, in welchen dieſe Ebene die verſchiedenen Erzeugenden ... ſchneidet, welche man nach §. 521 conſtruiren kann, wenn man drei Erzeugende B, B′, B″ if vereinigt man alle dieſe Punkte durch einen ſtetigen Zug. Die Tangente an dieſer Curve ergibt Durchſchnitt der Ebene π mit der Berührungsebene des Hyperboloids an dem gegebenen Punkte; : aber kann nach §. 530 conſtruirt werden.

§. 545.

n beſondern Falle, da die gegebene Ebene π durch eine Erzeugende A des erſten Syſtems geht, :ite Aſt der Durchſchnittscurve nothwendig geradlinig ſein, weil die Fläche vom zweiten Grade dieſe Gerade, welche dem Syſtem B angehört, zu erhalten, darf man nur die beiden Punkte ſuchen, ie Ebene π die beiden Erzeugenden A′ und A″ des erſten Syſtemes ſchneidet. Dieſe Ebene π aber ie Berührungsebene an der Fläche des Hyperboloids, und zwar in dem Punkte, in welchem die liegenden Erzeugenden ſich ſchneiden.

§. 546.

dieſe beiden Erzeugenden parallel, ſo muß die Ebene π als aſymptotiſch in Beziehung auf das d. h. als die Berührungsebene dieſes letzteren in dem unendlich fernen Punkt betrachtet werden, in Erzeugenden zuſammenlaufen; alsdann aber geht die Ebene π nothwendig durch den Mittelpunkt krummen Fläche und berührt den aſymptotiſchen Kegel, wie ſolches ſchon aus §. 543 in Beziehung igenden DA und AB der Fig. 119. erhellte. Alſo: **jede Berührungsebene am aſymptotiſchen idet das Hyperboloid in zwei Geraden, welche der Berührungsſeite des Kegels mit parallel ſind.**

§. 547.

leich anfangs die Natur des durch eine Ebene π erzeugten Schnittes zu erkennen, ıterſuchen, ob es irgend eine Erzeugende gibt, welche der ſchneidenden Ebene parallel iſt; :m Falle hat der Durchſchnitt einen oder zwei unendliche Aeſte. Man conſtruire daher die Spur iſchen Kegels auf der Horizontalebene, indem man durch den Mittelpnnkt O des Hyperboloids, den §. 533 beſtimmt hat (oder auch durch irgend einen Punkt im Raume) Parallelen zu einer hinrei- ıhl der Erzeugenden A, A′, A″, ... zieht; hierauf lege man durch die Spitze dieſes Kegels eine rallel mit π, ſo ſind folgende drei Fälle möglich:

:nn die horizontale Spur der Ebene π' der Grundlinie des aſymptotiſchen Kegels nicht begegnet, uf dieſem keine mit π parallele Seite, und folglich iſt auch keine der Erzeugenden des Hyperboloids el (§. 543). In dieſem Falle alſo hat die Curve keinen unendlich fernen Punkt und iſt eine Ellipſe.

:nn die horizontale Spur der Ebene π' die Grundlinie des aſymptotiſchen Kegels in zwei Punkten gibt es auf dieſem zwei mit der Ebene π parallele Seiten, und alſo auch auf dem Hpperboloid nde jedes Syſtems (a und b, a′ und b′), welche dieſe Bedingung erfüllen. Der durch die Ebene π erboloid erzeugte Schnitt hat alſo in dieſem Falle zwei unendliche Zweige, und iſt eine Hyperbel. nptoten dieſer Curve zu finden, muß man die Ebene P, welche den aſymptotiſchen Kegel*) längs berührt, anwenden; und da dieſe Ebene die beiden Erzeugenden a und b, welche auf dem Hyper-

*) Kegel muß hier ſo conſtruirt werden, daß ſeine Spitze genau im Mittelpunkt O des Hyperboloids, der nach §. 521 t werden kann, ſich befinde.

boloide, parallel mit α sind, enthalten muß (§. 546), so ist sie die Berührungsebene für den unendlich fernen Punkt, in welchem a und b die schneidende Ebene π treffen; es muß also der Durchschnitt der Ebene P und π die Asymptote dieses Hyperbelastes geben. Die andere Asymptote erhält man aus dem Durchschnitt der Ebene π mit der Ebene P', welche den asymptotischen Kegel längs α' berührt; denn in dieser Ebene P' sind die beiden Erzeugenden a' und b' enthalten, welche parallel mit α' sind.

3) Wenn die durch die Spitze des asymptotischen Kegels gelegte Ebene π' diesen Kegel in einer einzigen Seite α berührt, so gibt es auf dem Hyperboloid nur eine Erzeugende (a und b) von jedem System, welche parallel mit α ist; der Durchschnitt des Hyperboloids mit der Ebene π hat also nur einen unendlichen Ast, und ist mithin eine Parabel. Diese hat keine Asymptote; denn diesesmal ist es die Ebene π' selbst, welche, da sie den asymptotischen Kegel berührt, die beiden mit α parallelen Erzeugenden a und b enthält, und mithin das Hyperboloid an einem unendlich fernen Punkt der Curve berührt; aber weil sie parallel mit der schneidenden Ebene π ist, so fällt ihr Durchschnitt mit dieser, welcher die Asymptote wäre, ganz ins Unendliche, und existirt also gar nicht.

§. 548.

Durch die vorhergehenden Constructionen ist man nun auch im Stande, folgendes Problem, so fern es möglich ist, aufzulösen: auf einem gegebenen Hyperboloid eine Erzeugende zu finden, welche einer gegebenen Ebene π parallel sei. Denn legt man durch die Spitze des asymptotischen Kegels die mit π parallele Ebene π', so werden, falls diese Ebene π' den Kegel in einer oder zwei Seiten α und α' schneidet, die Berührungsebenen an diesem Kegel längs jener Seiten durch ihre Durchschnitte mit dem Hyperboloid die mit α parallelen Erzeugenden a und b, und die mit α' parallelen Erzeugenden a' und b' liefern, welche alle vier der Aufgabe entsprechen.

Drittes Kapitel.

Das hyperbolische Paraboloid.

§. 549.

115. Hyperbolisches Paraboloid heißt diejenige krumme Fläche, welche durch eine bewegliche Gerade erzeugt wird, die über zwei feste, nicht in einerlei Ebene liegende Gerade B und B' hingleitet, und dabei beständig einer gegebenen Ebene P parallel bleibt, welche die Richtebene genannt wird; denn später (§. 558) wird erwiesen werden, daß diese Fläche identisch ist mit derjenigen, welche schon in §. 89 durch denselben Namen bezeichnet wurde. Um die verschiedenen Lagen der Erzeugenden zu construiren, darf man nur durch jeden beliebig auf der Leitlinie B genommenen Punkt M eine mit P parallele Ebene legen; hierauf den Punkt N suchen, in welchem diese Ebene die andere Leitlinie B' schneidet und die beiden Punkte M und N durch eine Gerade AMN verbinden. Man sieht hieraus, daß durch die vorhin angegebenen Bedingungen die Bewegung der erzeugenden Geraden vollkommen bestimmt ist, weil sie für jeden Punkt M nur eine einzige Lage annehmen kann.

§. 550.

Das hyperbolische Paraboloid ist eine windschiefe Fläche; denn irgend zwei Erzeugende A und A' können, selbst wenn sie nicht unendlich nahe sind, sich nie in einer einzigen Ebene befinden, wenn nicht die Leitlinien

nd B′, von denen jede zwei Punkte mit erſteren gemeinſchaftlich hat, ſelbſt in dieſer Ebene liegen; letzteres wäre gegen die im vorigen Paragraphen aufgeſtellte Definition; mithin iſt die krumme Fläche windſchief.

§. 551.

Die Fläche, von der hier die Rede iſt, läßt wie das windſchiefe Hyperboloid noch eine zweite Erzeu- Fig. 115.
gsart zu, welche die Umkehrung der erſten iſt, und in welcher zwei der Erzeugenden A, A′, A″, ... Leit-
n werden. Um dieſes zu beweiſen, muß zuerſt gezeigt werden, daß jede Ebene DUV, welche den zwei
tlinien B und B′ parallel iſt, das Paraboloid in einer Geraden ſchneidet, oder, was daſſelbe
daß die drei Punkte D, D′, D″, in welchen jene Ebene irgend drei Erzeugende A, A′, A″ ſchneidet, in
der Linie liegen.

Man projicire die ganze Figur QOX, welche ebenfalls den beiden Leitlinien B und B′ parallel iſt, und
be zu projicirenden Linien ſchiefe Geraden an, die aber alle mit einer willkürlich auf der Richtebene POX
gene Linie PO parallel ſind.*) Alsdann erhält man als Projectionen von B und B′ irgend zwei Linien
nd b′; aber die Geraden MDN, M′D′N′, M″D″N″, deren projicirende Ebenen parallel mit P ſind, werden
in den Geraden mdn, m′d′n′, m″d″n″ projiciren, die mit dem Durchſchnitt OX der beiden Ebenen P
Q parallel ſein müſſen. Man hat alſo offenbar

$$MD : DN = md : dn,$$
$$M'D' : D'N' = m'd' : d'n',$$
$$M''D'' : D''N'' = m''d'' : d''n'';$$

nun ferner die Ebene DUV mit den beiden Linien B und B′ parallel iſt, ſo kann man annehmen, die Ge-
n A, A′, A″, werden von drei parallelen Ebenen geſchnitten, und man hat daher, nach einem bekannten
ſatz aus der Geometrie:

$$MD : DN = M'D' : D'N' = M''D'' : D''N''.$$

Aus der Vergleichung dieſer mit den obigen Verhältniſſen aber ergibt ſich:

$$md : dn = m'd' : d'n' = m''d'' : d''n''.$$

Da nun alſo dieſe gleichen Verhältniſſe zwiſchen den unter ſich parallen Geraden mn, m′n′, m″n″
finden, ſo folgt daraus nothwendig, daß die drei Punkte d, d′, d″, in einer Geraden liegen, welche mit b
b′ in einem einzigen Punkte convergirt. Mithin liegen die Punkte D, D′, D″ des Raumes in der durch
Gerade dd′d″ gehenden projicirenden Ebene; und da ſie ſich zugleich auch in der von letzterer verſchiedenen
ne DUV befinden, ſo iſt klar, daß ſie in gerader Linie liegen.

§. 552.

Läßt man daher über zwei Erzeugende A und A′ des erſten Syſtems eine Gerade B″ ſo Fig. 115.
gleiten, daß ſie immer parallel mit der Ebene Q bleibt, ſo wird ſie das nämliche Parabo-
beſchreiben wie vorhin; denn wenn B″ z. B. durch den Punkt D geht, ſo muß ſie unfehlbar mit der
aden DD′D″ zuſammenfallen, welche in dem Paraboloide liegt (§. 551) und bereits die der Linie B″ vor-
briebenen Bedingung erfüllt. Somit gibt es alſo noch eine zweite Erzeugungsart, bei welcher die neue Richt-
ne Q parallel iſt mit den beiden Leitlinien B und B′ der vorigen Art, und wo die neuen Leitlinien irgend
i Erzeugende des erſten Syſtemes A ſind.

*) Dieſer Satz könnte wohl bewieſen werden, auch wenn man die orthogonalen Projectionen beibehielte, und eine ſenkrecht auf der Richtebene P ſtehende Ebene QOX anwendete, wobei der im Text angegebene Beweis der nämliche bliebe. Aber es werden hier ſchiefe Projectionslinien gewählt, um dem Leſer die zweite Richtebene Q, welche das Hyperboloid noch zuläßt, vor Augen zu bringen.

§. 553.

Nun verſuche man es auch, und laſſe eine Gerade B″ ſich ſo bewegen, daß ſie beſtändig auf irgend drei Geraden A, A′, A″ des erſten Syſtemes aufliege, ohne die Beſchränkung jedoch, mit einer Richtebene parallel ſein zu müſſen. Dieſe Bedingungen ſind hinreichend, um die Bewegung der Erzeugenden B″ zu beſtimmen (§. 521); wenn dieſe z. B. durch den Punkt D geht, ſo muß ſie ebenfalls wieder mit der Geraden DD′D″, welche bereits die vorgeſchriebenen Bedingungen erfüllt, zuſammenfallen; die Erzeugende B″ wird alſo wieder das nämliche Paraboloid wie vorhin beſchreiben. Folglich gibt es noch eine dritte Art, durch welche jene krumme Fläche erzeugt werden kann, nämlich: die Bewegung einer Geraden B″, welche beſtändig über drei feſte Gerade A, A′, A″, hingleitet, die einer und derſelben Ebene parallel ſind; denn hier ſind die drei Leitlinien, ſtatt beliebig genommen zu ſein, alle mit der Ebene P parallel, nach der Definition des §. 549, ſo daß, unter dieſem Geſichtspunkte, das hyperboliſche Paraboloid als ein beſonderer Fall des Hyperboloids mit einem Mantel erſcheint (§. 521). Und obgleich man dieſesmal die Bedingung weggelaſſen hat, daß die bewegliche Gerade B″ mit einer feſten Ebene parallel ſein müſſe, ſo wird ſie deſſen ungeachtet dieſer Bedingung entſprechen, weil die Lagen, welche ſie annimmt, wie z. B. DD′D″ alle mit der Ebene Q parallel ſind. Dieſes ſtimmt mit der Bemerkung des §. 529 überein.

Es iſt auch einleuchtend, daß dieſe Erzeugungsart noch eine vierte, als ihre Umkehrung, zuläßt; nämlich die Bewegung der Geraden A über drei beliebige Erzeugende des Syſtems B; denn dieſe Gerade A kann keine andere als die Lagen A′, A″,... annehmen, welche bereits der vorgeſchriebenen Bedingung entſprechen, und ſie wird alſo auch parallel mit der Ebene P bleiben, obgleich dieſe Bedingung nicht vorgeſchrieben iſt.

§. 554.

115. Hieraus folgt: 1) daß durch jeden beliebig auf dem Paraboloid genommenen Punkt D zwei Gerade gehen, welche ganz in der windſchiefen Fläche liegen und von denen die eine dem Syſtem A, die andere dem Syſtem B angehört; 2) daß zwei dem nämlichen Syſteme angehörige Erzeugende nie in einer und derſelben Ebene liegen, weil das, was in §. 550 für die Geraden A, A′, A″... bewieſen worden, offenbar auch für die Geraden B, B′, B″... gilt; 3) daß jede Erzeugende des einen Syſtemes alle Geraden des andern Syſtemes ſchneidet, und daß hier nie zwei Parallelen vorkommen können; denn wenn z. B. A‴ und B″ parallel wären, ſo müßten dieſe Geraden auch mit dem Durchſchnitt OX der beiden Richtebenen parallel ſein, was unmöglich iſt, wenn man dieſelben nicht unendlich entfernt annimmt; 4) irgend eine Gerade kann das Paraboloid nur in zwei Punkten ſchneiden; denn hätte ſie drei Punkte mit der krummen Fläche gemein, ſo läge ſie auf drei Erzeugenden auf und fiele daher (nach §. 553) ganz in die Fläche des Paraboloids. Um die beiden Durchſchnittspunkte einer Geraden mit einem Paraboloid zu finden, muß man den Durchſchnitt conſtruiren, den eine durch die gegebene Gerade gelegte, vertikale oder horizontale Ebene mit der krummen Fläche bildet.

§. 555.

Da ferner in jedem Erzeugungsſyſtem die verſchiedenen Lagen A, A′, A″, ... der Erzeugenden durch Ebenen erhalten werden, die mit P parallel ſind und die Leitlinien B und B′ in den Punkten M und N, M′ und N′, ... ſchneiden, ſo folgt, nach einem bekannten Lehrſatze der Geometrie, daß die Theile, in welche die Geraden B und B′ durch jene Ebenen getheilt werden, unter ſich proportionirt ſind, ſo daß man hat:

$$MM' : NN' = M'M'' : N'N'' = M''M''' : N''N''' = \ldots.;$$

hieraus aber ergibt ſich, daß man ſtatt einer Richtebene auch zwei anfängliche Lagen A und A′ der beweglichen Geraden als gegeben annehmen, und hierauf verlangen könnte, letztere ſolle ſo über B und B′ hingleiten, daß die

zwiſchen den Lagen A', A'', A''', ... enthaltenen Stücke der Leitlinien mit den Stücken MM' und NN' proportionirt ſeien. Dieſe Art der Erzeugung führt auf ein ſehr bequemes Mittel, das hyperboliſche Paraboloid wirklich im Raume auszuführen; denn hat man ein windſchiefes Viereck, wie z. B. MNN'''M''', conſtruirt, deſſen Seiten und Winkel unverändert bleiben, ſo darf man nur die Gegenſeiten MM''' und NN''' in eine gleiche Anzahl gleicher Theile theilen, und hierauf die einander entſprechenden Theilpunkte durch geradlinig ausgeſpannte Fäden verbinden, um eine getreue Darſtellung der windſchiefen Fläche zu erhalten. Will man zugleich auch die Erzeugenden des Syſtemes B darſtellen, ſo theile man auch die beiden Gegenſeiten MN und M'''N''' in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, und verbinde die entſprechenden Theilpunkte durch andere Fäden, ſo werden letztere von ſelbſt ſich über die zuerſt ausgeſpannten herlegen, und mit dieſen die einzige, und zwar wieder die vorige Fläche bilden, auf welcher man nun die beiden Erzeugungsarten ſehr deutlich dargeſtellt ſieht. (S. §. 566 und die Figur 120.)

§. 556.

Berührungsebene am hyperboliſchen Paraboloid. Wenn der Berührungspunkt G auf einer bekannten Erzeugenden AMGN gegeben iſt, ſo darf man nur noch eine zweite Erzeugende A' vom nämlichen Syſteme conſtruiren, wobei man nach §. 549 verfährt, wenn das Paraboloid durch eine Richtebene P beſtimmt iſt; nach §. 521 aber, wenn daſſelbe durch drei mit einer und derſelben Ebene parallele Leitlinien B, B', B'' gegeben wäre. Hat man nun einmal die zwei Erzeugenden A und A', ſo ſchneidet man ſie durch eine Ebene, welche durch den Punkt G geht und den Leitlinien B und B' parallel iſt; alsdann wird die Gerade GH, welche beide Durchſchnittspunkte verbindet, ganz auf dem Paraboloide liegen (§. 551), und es wird nun durch die beiden Geraden AG und GH, deren Tangenten ſie ſelbſt ſind, die Berührungsebene der krummen Fläche für den Punkt G beſtimmt. Fig. 11.

§. 557.

Iſt hingegen nur die Projection g des Berührungspunktes, nicht aber die Erzeugende gegeben, worauf er liegt, ſo muß man zuerſt auch die zweite Projection dieſes Punktes ſuchen. Dieſes geſchieht, indem man durch g eine beliebige Vertikalebene legt und die Durchſchnittspunkte dieſer letzteren mit den verſchiedenen Erzeugenden ſucht: alsdann erhält man in der von dieſen Punkten gebildeten Curve die Vertikalprojection des Durchſchnittes der krummen Fläche mit der Ebene. Projicirt man nun den Punkt g auf dieſe Curve, ſo erhält man auch die zweite Projection g' des Berührungspunktes, und es iſt nun leicht, die Erzeugende zu conſtruiren, welche, durch dieſen Punkt gehend, die beiden Geraden B und B' ſchneidet. Somit iſt alſo die Aufgabe wieder die nämliche, wie in §. 556.

§. 558.

Die windſchiefe Fläche, von der es ſich hier handelt, iſt identiſch mit dem hyperboliſchen Paraboloid, das in §. 89 beſchrieben wurde. Sie iſt fürs Erſte wie jenes vom zweiten Grade; denn auch ohne Calcul iſt leicht einzuſehen, daß die Bedingungen, nach welchen die bewegliche Gerade immer ſowohl mit B als auch mit B' einen Punkt gemeinſchaftlich haben und einer Ebene P parallel bleiben ſoll, die man, wenn man will, zu einer der Coordinatenebenen wählen kann, auf eine Gleichung führen müſſen, welche den zweiten Grad nicht überſteigen kann, was auch ganz mit Nro. 4 des §. 554 übereinſtimmt. Fürs Zweite läßt dieſe windſchiefe Fläche keinen ebenen Durchſchnitt zu, der eine geſchloſſene Curve wäre, wie in §. 564 bewieſen werden wird; endlich kann ſie kein Cylinder mit hyperboliſcher oder paraboliſcher Grundlinie ſein, eben weil ſie

windschief ist; sie muß also identisch sein mit dem hyperbolischen Paraboloid des §. 89, weil alle andern Flächen vom zweiten Grade, vermöge ihrer Erzeugung, elliptische Schnitte zulassen. (S. Abschn. II, Kapitel 1.)

§. 559.

115. Ebene Schnitte des hyperbolischen Paraboloids. Man erhält die Durchschnittscurve dieser krummen Fläche mit einer gegebenen Ebene π, wenn man die Punkte construirt, in welchen diese Ebene die verschiedenen Erzeugenden A, A', A'', ... schneidet; und die Tangente dieser Curve für einen gegebenen Punkt ergibt sich aus dem Durchschnitt der Ebene π mit der Berührungsebene des Paraboloids an dem nämlichen Punkte; wie aber diese Berührungsebene construirt werde, ist in §. 556 gezeigt worden. Was nun die Natur der Durchschnittscurve betrifft, so läßt sie sich nach folgenden Regeln zum Voraus bestimmen.

§. 560.

Wenn, fürs Erste, die schneidende Ebene π schon durch eine Gerade A des Paraboloids geht, so ist der andere Ast des Durchschnitts gleichfalls geradlinig, weil die krumme Fläche vom zweiten Grade ist. Um diesen Ast zu erhalten, darf man nur die Punkte D' und D'' suchen, in welchen π zwei andere Erzeugende A' und A'', vom nämlichen System wie A, schneidet. Der ganze Durchschnitt besteht also aus den beiden Geraden A und DD'D'', so daß die Ebene π das Paraboloid in D berührt, es aber in allen andern Punkten schneidet.

§. 561.

In dem besondern Falle, da die durch A gehende Ebene π mit der Richtebene P, welche einer Erzeugenden A entspricht, parallel ist, schneidet sie die übrigen zum nämlichen System gehörigen Erzeugenden nicht mehr, so daß der zweite Ast des Durchschnitts, der vorhin DD'D'' war, nun ganz ins Unendliche fällt. Der Durchschnitt reducirt sich also auf eine einzige Gerade A; aber die Ebene π muß noch immer als eine Berührungsebene des Paraboloids für den unendlich fernen auf A gelegenen Punkt, d. h. als eine asymptotische Ebene betrachtet werden.

§. 562.

Es sei überhaupt π irgend eine mit dem Durchschnitt OX der beiden Richtebenen nicht parallele Ebene; diese wird jene beiden Ebenen in Geraden δ und δ' schneiden, die nicht parallel mit OX sind, und es wird in jedem System eine Erzeugende geben, die parallel mit π ist. Denn legt man durch die Leitlinie B eine mit der Spur δ parallele Ebene BCE, so muß diese die Leitlinie B' in einem gewissen Punkte N'' schneiden, und zieht man durch diesen Punkt die Gerade N''M''A'' parallel mit δ, so wird sie die Leitlinie B schneiden, und offenbar eine mit der Ebene π parallele Erzeugende sein. Verfährt man auf eine ähnliche Weise in Beziehung auf die Spur δ', indem man durch die Erzeugende A eine mit δ' parallele Ebene legt, so wird diese eine andere Gerade A' des nämlichen Systems in einem Punkte D' schneiden, durch welchen man eine andere Erzeugende B'' ziehen kann, die mit δ' und mit der Ebene π parallel ist. Hieraus aber folgt, daß der Durchschnitt, den die Ebene mit der Fläche des Paraboloids macht, zwei offene Aeste haben muß, welche den unendlich fernen Punkten zulaufen, in denen die Ebene die beiden Geraden A'' und B'' schneidet; die Durchschnittscurve ist also eine Hyperbel, deren Asymptoten auf folgende Art construirt werden.

Man lege durch die Erzeugende A'' eine mit P parallele Ebene π'; diese Ebene π' wird das Paraboloid in dem unendlich fernen auf A'' gelegenen Punkte berühren (§. 561); mithin wird der Durchschnitt dieser Berührungsebene mit der Ebene π der Curve die Asymptote des mit A'' convergirenden Curvenastes sein, und diese Asymptote ist offenbar parallel mit der Erzeugenden A''. Die andere Asymptote ergibt sich aus dem Durch-

tt der Ebene π mit einer Ebene π'', die man durch B'' parallel mit der zweiten Richtebene Q gelegt hat; ſt parallel mit B''.

§. 563.

Geſetzt endlich, die ſchneidende Ebene π ſei parallel mit dem Durchſchnitt OX der beiden Richtebenen, in Fig. 115.
hem Falle auch die beiden Spuren δ und δ' der Ebene π parallel mit OX ſein werden. Um nun eine π parallele Erzeugende zu erhalten, müßte man wieder durch B eine mit δ parallele Ebene BCE legen; da dieſe Ebene hier offenbar mit Q parallel ſein wird, ſo kann ſie keine der übrigen Erzeugenden B', B'',... iden; die mit π parallele Erzeugende des Syſtemes A fällt alſo ganz in unendliche Entfernung. Eben ſo iſt mit der zu π parallelen Erzeugenden vom Syſtem B; hieraus folgt nun, daß der Durchſchnitt der Ebene π dem Paraboloid zwar noch immer eine offene Curve ſein müſſe, weil die Erzeugenden, je mehr ſie ſich ent- en, ſich deſto mehr dem Parallelismus mit π nähern; aber die Curve hat jetzt keine Aſymptote mehr. ere Linie wäre nämlich, wie im vorigen Paragraphen, wieder der Durchſchnitt der Ebene π mit einer andern ne π' oder π'', die parallel mit P oder Q und durch die mit π parallele Erzeugende gelegt wird; da aber Erzeugende unendlich entfernt iſt, ſo iſt es auch die Ebene π', und es gibt folglich keine Aſymptote. Der chſchnitt iſt alſo in gegenwärtigem Falle eine Parabel.

§. 564.

Aus dieſer Unterſuchung ergeben ſich folgende Reſultate:

1) Jede Ebene π, welche parallel iſt mit dem Durchſchnitte OX der beiden Richtebenen,*) t einen paraboliſchen Schnitt; und wenn überdieß π mit einer der Richtebenen ſelbſt parallel ſo reducirt jene Parabel ſich auf eine einzige gerade Linie (§. 549).

2) Wenn die ſchneidende Ebene π nicht mit dem Durchſchnitte OX der beiden Richtebenen allel iſt, ſo iſt der Schnitt eine Hyperbel; und wenn die ſchneidende Ebene ſchon eine Erzeu- de der krummen Fläche enthält, ſo verwandelt die Hyperbel ſich in zwei Gerade, welche ſich eiden (§. 560).

3) In keinem Falle kann der Schnitt, den irgend eine Ebene π mit dem Paraboloide ht, eine geſchloſſene Curve ſein.

§. 565.

Man bemerke auch, daß die in §. 562 angedeuteten Conſtructionen zur Auflöſung dieſes Problems dienen: einem gegebenen Paraboloid eine Erzeugende zu finden, welche einer gegebenen Ebene π allel ſei. Man erhält zwei Auflöſungen, wenn dieſe Ebene π nicht parallel iſt mit dem Durchſchnitt der Richtebenen; unmöglich aber iſt die Auflöſung, wenn π mit dieſem Durchſchnitte parallel und nicht zugleich der Richtebenen ſelbſt iſt, in welch letzterem Falle es eine unendliche Menge von Auflöſungen gibt, da jede mit π parallelen Erzeugenden eine Auflöſung darſtellt.

§. 566.

Aufgabe. Ein Paraboloid darzuſtellen, das von einer beweglichen Geraden A erzeugt d, welche über zwei feſte Gerade B und B_1 hingleitet und dabei einer gegebenen Richtebene

*) Man wird ſpäter (in §. 560) ſehen, daß dieſe Gerade OX die Hauptaxe des Paraboloids, oder wenigſtens mit ihr parallel iſt; denn die beiden Richtebenen ſind nicht ihrer abſoluten Lage, ſondern nur ihrer Richtung nach beſtimmt.

P beſtändig parallel bleibt; ferner: die Berührungsebene dieſer krummen Fläche für einen gegebenen Punkt zu conſtruiren.

Um der Figur alle die Symmetrie zu geben, welche eine Reliefdarſtellung des Paraboloids erfordert, bemerke man, daß eine mit den gegebenen Geraden B und B_2 parallele Ebene Q als die Richtebene für die zweite Erzeugungsart des geſuchten Paraboloids angeſehen werden kann; und da dieſe Ebene Q durch die Gegebenen der vorliegenden Aufgabe wenigſtens ihrer Richtung nach beſtimmt iſt, ſo wird es immer geſtattet ſein, folgende Anordnung zu treffen:

Fig. 120. 1) Die horizontale Projectionsebene wird ſo gewählt, daß ſie ſenkrecht auf den beiden Richtebenen P und Q ſtehe, welche alsdann durch ihre horizontalen Spuren o p und o q dargeſtellt werden.

2) Die vertikale Projectionsebene richte man ſo, daß ſie der Geraden o y, welche den Winkel p o q halbirt, parallel ſei; hierauf zeichne man die Projectionen (C D, C′ D′) der gegebenen Geraden B und die Projectionen (E F, C′ F′) der andern Leitlinie B_2, wobei man wohl zu bemerken hat, daß die horizontalen Projectionen C D und E F unter ſich parallel ſein müſſen, nach Nr. 1, weil ſie mit der Spur o q der Richtebene parallel ſind.

3) Die horizontale Grundebene kann man erheben oder herunterlaſſen, bis die Projectionsaxe V V′ durch den Punkt C′ geht, in welchem die beiden vertikalen Projectionen der Leitlinien B und B_2 ſich kreuzen; alsdann werden die horizontalen Spuren C und E dieſer Geraden in einer und derſelben auf der Projectionsaxe ſenkrechten Linie C E liegen.

4) Dieſe Leitlinien begrenze man in den beiden Punkten (D, D′) und (F, F′), in welchen ſie die auf der Mitte von C E ſenkrecht aufgerichtete Vertikalebene ſchneiden; alsdann wird die Figur C D E F eine Raute werden, deren Mittelpunkt O die Projection der Axe des Paraboloids iſt, wie ſpäter gezeigt werden wird (§. 560), vorausgeſetzt, daß die Leitlinien B und B_2 gegen die Horizontalebene gleich geneigt ſeien. Freilich könnten die gegebenen Leitlinien dieſer letzteren Bedingung auch nicht entſprechen; hier aber wird angenommen, ſie entſprechen derſelben, ſo daß die Punkte (D, D′) und (F, F′) ſich alſo in gleicher Höhe befinden; denn man wird ſpäter (§. 560) ſehen, daß es unter den Erzeugenden des Paraboloids immer zwei Gerade gibt, welche gleich gegen die Vertikale geneigt ſind, und welche alſo den gegebenen Leitlinien (C D, C′ D′) und (E F, C′ F′) ſubſtituirt werden könnten, im Falle dieſe jener Bedingung nicht entſprächen.

§. 567.

Fig. 120. Unter dieſen Vorausſetzungen wird die Gerade, welche die Punkte (D, D′) und (E, C′) verbindet, parallel mit der Richtebene P ſein, weil ihre Horizontalprojection D E parallel iſt mit der Spur o p dieſer Vertikalebene P, nach den Bedingungen von Nr. 2 und 4 des vorigen Paragraphen. Mithin iſt (D E, D′ C′) eine Lage der beweglichen Erzeugenden A; und da auch die Gerade (C F, C′ F′) eine ſolche Lage iſt, ſo wird man alſo, wenn man die beiden gegebenen Leitlinien (C D, C′ D′) und (E F, C′ F′) in dieſelbe Anzahl gleicher Theile theilt und hierauf die Theilpunkte 0 und 16, 1 und 15, 2 und 14, 3 und 13, ... verbindet, die verſchiedenen Erzeugenden des Syſtems A, nämlich

(D E, D′ C′), ... (G H, G′ H′), ... (C F, C′ F′)

erhalten; und die Horizontalprojectionen dieſer Geraden werden alle parallel ſein mit der Spur o p der Richtebene P.

§. 568.

Was die Vertikalprojectionen dieſer nämlichen Erzeugungslinien betrifft, ſo bilden ſie, durch ihre auf einander folgenden Durchſchnitte, eine alle jene Geraden umhüllende Curve D′ O′ F′, welche eine Parabel ſein wird. Denn da für jede Erzeugende G′ H′ eine Proportion ſtattfindet, wie F′ G′ : G′ C′ = C′ H′ : H′ D′, ſo folgt

daraus, daß zwei von einem und demſelben Punkt aus gezogene Tangenten der umhüllenden Curve durch eine dritte Tangente in verkehrt proportionirte Theile geſchnitten werden; was eine bekannte Eigenſchaft der Parabel vom zweiten Grade iſt. — Da ferner die Curve D′O′F′ den ſichtbaren Umriß der windſchiefen Fläche auf der Vertikalebene darſtellt, ſo müſſen diejenigen Theile der Erzeugenden, welche ſich jenſeits dieſes Umriſſes befinden, punktirt werden; ſo wird z. B. von der Geraden (GMH, G′M′H′) der Theil G′M′ auf der Vertikalebene ſichtbar, der Theil M′H′ hingegen unſichtbar ſein. Ferner wird der Berührungspunkt M′, welcher dieſe beiden Theile ſcheidet, ſeine Horizontalprojection auf der Diagonale DF haben. Denn in der Parabel D′O′F′ iſt nach dem oben angeführten Lehrſatze

$$G'M' : M'H' = C'H' : H'D' = 11 : 5;$$

aber in der Raute CDEF iſt ebenfalls

$$GM : MH = GF : DH = 11 : 5,$$

woraus folgt:

$$G'M' : M'H' = GH : MH;$$

mithin alſo projicirt ſich der Punkt M′ in M. Und da dieſer Umſtand ſich für alle Erzeugende wiederholt, ſo folgt daraus, daß die Parabel D′O′F′ nichts Anderes iſt, als der Durchſchnitt, den die Vertikalebene DOF mit dem Paraboloide macht.

§. 569.

Projicirt man nun dieſes nämliche Paraboloid auf eine mit der Diagonale CE parallele Vertikalebene VZ″, ſo erhält man aus den urſprünglichen Leitlinien die Geraden (CD, C″D″), (EF, E″D″); und es läßt ſich nun wie oben beweiſen, daß die Projectionen der Erzeugenden durch ihre auf einander folgenden Durchſchnitte eine andere Parabel C″O″E″ bilden, welche den Durchſchnitt des Paraboloids mit der Vertikalebene COE darſtellt. Die mit der Anwendung der Analyſis auf die körperliche Geometrie vertrauten Leſer werden in den Vertikalebenen OY und OZ, durch welche dieſe Parabeln erzeugt werden, ſogleich die beiden Haupt-Diametralebenen des hyperboliſchen Paraboloides erkennen, welche ſich in einer einzigen Axe dieſer krummen Fläche ſchneiden müſſen (§. 91); und wir werden ſpäter (§. 572) wirklich beweiſen, daß die Gerade (O, O′X′) dieſe Axe iſt.

§. 570.

Das hyperboliſche Paraboloid läßt nach §. 551 noch ein zweites Syſtem geradliniger Erzeugenden zu, Fig. 12
welche parallel ſind mit der durch die urſprünglichen Leitlinien B und B_1, oder die Geraden (CD, C′D′) und (EF, C′F′) beſtimmten Richtebene Q; d. h. hier mit der Vertikalebene oq. Folglich müſſen die Horizontalprojectionen dieſer neuen Erzeugenden mit der Spur oq parallel ſein, und da ſie überdieß auf zwei Geraden des erſten Syſtems, z. B. auf (DE, D′C′) und (CF, C′F′), deren Endpunkte bereits (§. 554) den mit oq parallelen Vertikalebenen DC und EF entſprechen, aufliegen müſſen, ſo darf man nur dieſe neuen Leitlinien (DE, D′C′), (CF, C′F′) in die nämliche Anzahl gleicher Theile theilen und hierauf die Theilpunkte 0 und 16′, 1 und 15, 2 und 14, 3 und 13, ... mit einander verbinden, um die verſchiedenen Erzeugenden des Syſtemes B, nämlich

$$(CD, C'D'), \ldots (gMh, G'M'H'), \ldots (FE, F'C'), \ldots$$

zu erhalten.

§. 571.

Dieſe Geraden vom Syſtem B fallen auf der vertikalen Projectionsebene mit den ſchon conſtruirten vom

System A zusammen; den es ist einleuchtend, daß in der Raute CDEF die Punkte G und g, H und h sich zu zwei und zwei in geraden, auf der Projectionsaxe senkrecht stehenden Linien befinden; es werden also die Vertikalprojectionen dieser Erzeugenden B noch immer Tangenten an der Hauptparabel D′O′F′ sein; aber die sichtbaren Theile, wie (Mh, M′H′) fallen auf die punktirten der Erzeugenden A und umgekehrt. Um daher den Unterschied der beiden Mäntel, des vorderen und des hinteren, auf der Vertikalebene DOF für das Auge fortbestehen zu lassen, wurden die Erzeugenden B nicht als wirklich vorhanden angenommen, ihre Horizontalprojectionen aber durch gemischt punktirte Linien bezeichnet.

Ein ähnliches Zusammenfallen findet auch auf der Vertikalebene VZ″ statt, wo die erzeugenden B ebenfalls Tangenten an der Hauptparabel C″O″E″ sind.

§. 572.

Um den Scheitel und die Axe des hyperbolischen Paraboloids zu finden, muß man entweder zur Analysis seine Zuflucht nehmen, oder man muß folgende Definitionen zulassen: die Axe des Paraboloids ist eine mit den beiden Richtebenen P und Q parallele Gerade, welche die krumme Fläche in einem Punkte schneidet, durch welchen zwei auf dieser Axe senkrechte Erzeugende gehen, und dieser Punkt heißt der Scheitel des Paraboloids (§. 91). Hieraus folgt, daß man, für beliebige Gegebene, im Allgemeinen eine senkrecht auf P und Q stehende Ebene π legen, und hierauf nach §. 565 die beiden mit π parallelen Erzeugenden suchen müsse. Alsdann ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Erzeugenden der gesuchte Scheitel, und eine durch diesen Punkt senkrecht auf π gezogene Gerade ist die Axe der krummen Fläche.

120. Hier nun, wo bei der Wahl der Gegebenen die möglichste Symmetrie beobachtet wurde, ist natürlich die Axe des Paraboloids eine Vertikale, und durch den Punkt (O, O′) gehen zwei horizontale Erzeugende (K′O′I′, KOI) und (K′O′I′, kOi); mithin ist (O, O′) der gesuchte Scheitel und folglich die Gerade (O, C′O′X′) die Axe des Paraboloids.

Unter den Bedingungen des §. 566 ist eine einzige, welche man nicht immer erfüllen kann; nämlich die, welche voraussetzt, daß die beiden gegeben Leitlinien gegen die Horizontalebene gleich geneigt seien, wie in Fig. 120 angenommen wurde. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so folgt daraus einzig, daß die Punkte D′ und F′ sich nicht mehr in gleicher Höhe über der Horizontalebene befinden, und daß der Mittelpunkt O der nach §. 566 gebildeten Raute CDEF nicht mehr der Scheitel der krummen Fläche ist; in diesem Falle aber erhält man diesen Scheitel durch die allgemeine Methode, oder noch einfacher, wenn man an die Parabel D′O′F′ eine horizontale Tangente zieht. Uebrigens kann man sich auch zwei Leitlinien verschaffen, welche die oben erwähnte Bedingung erfüllen, wenn man an jene Parabel zwei gleich gegen die Vertikale geneigte Tangenten zieht; betrachtet man hierauf diese als zwei Erzeugende des Paraboloids, so findet man leicht ihre horizontalen Projectionen, und diese dienen alsdann zur Bildung der Raute, deren Mittelpunkt dem Scheitel des Paraboloids entspricht.

§. 573.

Um sich die entgegengesetzte Form der beiden Mäntel des Paraboloides (von denen der eine über der andern unter dem einzigen Scheitel (O, O′) sich befindet, wo beide ohne Unterbrechung in einander übergehen) recht klar zu machen, schneide man die krumme Fläche durch verschiedene auf der Axe (O, C′O′X′) senkrechte Ebenen. Es sei L′R′ eine dieser Ebenen; sie schneidet die Vertikalprojectionen der construirten Erzeugenden in Punkten, welche, wenn man sie auf die Horizontalebene projicirt, eine aus zwei unbestimmten, aber von einander gesonderten Aesten LMl und RNr bestehende Curve bilden. Diese Curve ist eine Hyperbel (§. 562), deren reelle Axe hier (MN, M′N′) ist. Wendet man eine unter dem Scheitel sich befindende schneidende Ebene an, wie z. B. T′W′, so erhält man abermals (§. 562) eine Hyperbel TUW, tuw mit der reellen Axe (Uu, U′); und läßt

man die schneidende Ebene durch den Scheitel (O, O) gehen, so reducirt sich der Schnitt auf zwei Gerade (K O i, K′ I′) und (k O i, K′ I′), deren Horizontalprojectionen die den beiden vorhergehenden Schnitten gemeinschaftlichen Asymptoten sind.

§. 574.

Die Berührungsebene für irgend einen durch seine Horizontalprojection λ gegebenen Punkt des Paraboloids erhält man, wenn man die mit DE und DC beziehlich parallelen Erzeugenden λα und λβ zieht; projicirt man alsdann auf die Vertikalebene diejenigen beiden Punkte, wo jede dieser Geraden die Gegenseite der Raute CDEF schneidet, so erhält man auch die Vertikalprojectionen jener Erzeugenden, und man darf jetzt nur noch eine Ebene durch diese beiden Geraden legen. Diese Constructionen haben keine Schwierigkeit und bleiben dem Leser überlassen.

Viertes Kapitel.

Berührungsebenen an windschiefen Flächen überhaupt.

Das Hyperboloid mit Einem Mantel und das hyperbolische Paraboloid sind die einfachsten unter den windschiefen Flächen, weil alle ihre Leitlinien geradlinig sind; auch sind sie die einzigen, deren Gleichung den zweiten Grad nicht übersteigt, daher sie denn auch die beiden windschiefen Flächen vom zweiten Grade heißen. Da die Construction ihrer Berührungsebenen leicht ist, so hat man die Auflösung ähnlicher Aufgaben in Beziehung auf windschiefe Flächen im Allgemeinen auf jene zurückzuführen gesucht und es ist auch mittels folgenden Lehnsatzes gelungen.

§. 575.

Lehnsatz. Wenn zwei windschiefe Flächen S und S′ eine gemeinschaftliche Erzeugende GLMN haben und sich in drei Punkten L, M, N, dieser Geraden zu berühren, so stoßen beide Flächen längs dieser Erzeugenden durchaus zusammen (se raccordent), d. h. für jeden Punkt dieser Geraden ist die Berührungsebene beiden Flächen gemeinschaftlich. Fig. 11

Weil die beiden windschiefen Flächen in L sowohl, als auch in M und N, gemeinschaftliche Berührungsebenen haben, so werden drei beliebige, durch diese Punkte gelegte Ebenen, die Flächen S und S′ in den beziehlich sich berührenden Curven

Aa, Bb, Cc und A′a′, B′b′, C′c′

schneiden, von denen die drei ersten als Leitlinien der beweglichen Geraden G, wenn solche die Fläche S beschreibt, und die drei andern als Leitlinien der Fläche S′ angesehen werden können. Nun lasse man die Erzeugende G über die drei Leitlinien Aa, Bb, Cc hingleiten und bringe sie in die, ihrer ersten unendlich nahe Lage glmn: so wird diese Erzeugende sich zugleich noch immer auf der zweiten Fläche S′ befinden, weil die Leitcurven dieser letzteren, da sie die Leitcurven der ersten Fläche berühren, mit diesen die Linienelemente Ll, Mm, Nn gemeinschaftlich haben; mithin sind also die Geraden G und g, so wie alle zwischen ihnen befindlichen Lagen der Erzeugenden den beiden windschiefen Flächen S und S′ gemeinschaftlich, woraus man schon schließen dürfte, daß diese Flächen, da sie zwischen G und g ein Flächenelement von unbestimmter Länge gemein haben, sich nach der ganzen Länge der Geraden G berühren. Um aber diesen Schluß als vollkommen richtig zu erkennen, schneide man die Flächen S und S′ durch eine vierte willkürliche und durch einen beliebigen Punkt H gelegte Ebene: diese

Schnitte werden die Curven Dd und D′d′ sein, welche durch die beiden Punkte H und h gehen müssen, in welchen die schneidende Ebene die beiden Geraden G und g trifft; da also die Curven Dd und D′d′ zwei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben, so berühren sie sich nach dem Elemente Hh, oder haben hier dieselbe Tangente HhT. Folglich fallen die zum Punkte H der Flächen S und S′ gehörigen Berührungsebenen in eine einzige zusammen, weil jede durch die Geraden GH und HT gehen muß.

§. 576.

Gehören die beiden windschiefen Flächen S und S′ zum Geschlechte derer, welche eine Richtebene zulassen, so stoßen sie längs einer gemeinschaftlichen Erzeugenden G an einander, wenn sie nur in zwei Punkten dieser Geraden zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen und überdieß noch eine und dieselbe Richtebene haben. Dieser Satz läßt sich genau, so wie der vorige, beweisen, und man wird auch einsehen, warum, in gegenwärtigem Falle, nur zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen erfordert werden; denn da die Leitcurven Aa und A′a′, Bb und B′b′ sich berühren und überdieß die Richtebene für beide Flächen dieselbe ist, so ist hinreichend dafür gesorgt, daß die Gerade G, welche über Aa und Bb parallel mit der Richtebene hingleitet, nicht aufhöre sich zugleich in beiden Flächen zu befinden, wenn sie von der Lage G zu der unendlich nahen g übergeht.

Diese beiden Lehrsätze über die Berührung windschiefer Flächen sind nicht nur für mehrere Aufgaben des Steinschnittes, wo man dergleichen Flächen an einander stoßen will, von Nutzen; sondern sie begründen auch das Verfahren, das man bei der Construction ihrer Berührungsebenen oder Normalen anwendet, welche man bei Bestimmung der Gewölbsteinfugen gewisser Gewölbe nöthig hat.

§. 577.

117. **Berührungsebenen**, wo der Berührungspunkt gegeben ist. Es seien Aa, Bb, Cc die drei Leitlinien irgend einer windschiefen Fläche S, und H der Punkt einer Erzeugenden GLMN, für welchen man die Berührungsebene verlangt. Man ziehe die Tangenten LT, MU, NV an die gegebenen Leitlinien und lasse die Gerade G über diese drei festen Tangenten hingleiten, so erhält man (§. 521) ein Hyperboloid mit einem Mantel, das in L, M und N dieselben Tangenten haben wird wie S. Diese beiden Flächen berühren sich also (§. 575) in allen Punkten der Erzeugenden GLMN, und um daher die Berührungsebene der Fläche S für den Punkt H zu finden, darf man nur die Berührungsebene jenes Hyperboloids für den nämlichen Punkt suchen, was nach §. 530 geschieht.

§. 578.

Um ein Hyperboloid zu construiren, das längs der Erzeugenden G die windschiefe Fläche berührt (hyperboloïde de raccordement) ist es nicht nothwendig, gerade die drei Tangenten LT, MU, NV anzuwenden: es ist hinreichend, als Leitlinien drei beliebige Gerade anzunehmen, die beziehlich in den Ebenen GLT, GMU, GNV liegen, welche die Fläche S in den Punkten L, M, N berühren; denn das so gebildete Hyperboloid hat offenbar noch immer drei mit der Fläche S gemeinschaftliche Berührungsebenen. Mithin kann das Berührungshyperboloid eine unendliche Menge verschiedener Formen annehmen; unter allen diesen aber gibt es eines, welches eine innigere Berührung mit der Fläche S hat, als die übrigen, und welches deshalb das Krümmungshyperboloid (osculateur) heißt. Später (§. 744) wird bei der Krümmung der Curven von ihm die Rede sein.

§. 579.

Man kann die Construction der Berührungsebene an der allgemein genommenen windschiefen Fläche S ver-

einfachen, wenn man ſie von einem hyperboliſchen Paraboloid abhängig mache, für welches die Berührungsebene ſich leichter conſtruiren läßt, als für das Hyperboloid. Man kann auch wirklich in der an den Punkt N der Fläche S gelegten Berührungsebene, welche durch GN und NV beſtimmt iſt, immer eine Gerade NR ziehen, welche parallel iſt mit der nämlichen Ebene, wie LT und MU; denn man darf nur die Berührungsebene GNV mit einer zu LT und MU parallelen Ebene ſchneiden. Wendet man alsdann die drei einer einzigen Ebene parallelen Geraden LT, MU, NR als Leitlinien für die Erzeugende G an, ſo erhält man (§. 553) ein Paraboloid, das ebenfalls drei Berührungsebenen mit der Fläche S, in den Punkten L, M, N, gemein hat; mithin fällt die Ebene, welche S in dem Punkte H berührt, mit der Berührungsebene des Paraboloids im nämlichen Punkte zuſammen; letztere Ebene aber wird ſehr einfach nach §. 556 conſtruirt. In der Aufgabe des §. 608 kommt ein Beiſpiel dieſer Conſtruction vor.

§. 580.

Wenn die Fläche S ſelbſt eine Richtebene P zuläßt, ſo iſt es hinreichend, die Tangenten LT und MU an zwei Leitcurven anzuwenden, um die Erzeugende GLM parallel mit der Ebene P fortgleiten zu machen; dadurch wird dieſe Gerade unmittelbar ein Paraboloid beſchreiben, das zwei Berührungsebenen mit S gemeinſchaftlich und die nämliche Richtebene hat. Dieſes Paraboloid wird nun die Fläche S längs GLM berühren (§. 576), ſo daß die Berührungsebene, welche man für den Punkt H dieſes Paraboloids conſtruirt (§. 556), zugleich auch die Fläche S in dem nämlichen Punkte berühren wird. Man ſehe das Problem §. 598.

§. 581.

Wenn man ſtatt einer der Leitlinien eine Richtfläche Σ annähme, an welcher die Erzeugende von S ſtets Tangente bleiben ſollte (§. 516), ſo wäre die Curve $\alpha\alpha'\alpha''$, . . . welche von den Berührungspunkten der Erzeugenden $G\alpha$, $G'\alpha'$, $G''\alpha''$ mit Σ gebildet wird, im Grunde die dritte Leitlinie; ſtatt jedoch dieſe Curve und ihre Tangente zu conſtruiren, darf man blos bemerken, daß die Berührungsebene der Fläche Σ im Punkte α zugleich auch die Berührungsebene der gegebenen windſchiefen Fläche S iſt, weil beide die Gerade $G\alpha$ und die Tangente der Curve $\alpha\alpha'\alpha''$ . . . enthalten müſſen. Man darf daher nur in der dem Punkte α entſprechenden Berührungsebene der Fläche Σ irgend eine Gerade αR ziehen, welche mit den Tangenten der beiden andern Leitlinien zur Erzeugung einer Hilfsfläche vom zweiten Grade dienen wird, die drei Berührungsebenen mit S gemein hat, und die man nun auf dieſelbe Art benützt, wie in §. 577. Dieſe Methode findet ihre Anwendung bei der Darſtellung ſteinerner oder hölzerner Treppen. Man ſehe das Beiſpiel §. 604.

§. 582.

Es kann endlich geſchehen, daß die Definition der windſchiefen Fläche S nicht unmittelbar drei Leitlinien kennen lehrt, wie man aus den Beiſpielen des §. 519 ſehen kann, oder auch, daß dieſe Leitlinien gegeben ſind, ohne daß man ihre Tangenten zu conſtruiren weiß. In dieſem Falle bezeichne man durch G die Erzeugende, auf welcher der Punkt H liegt, für welchen man die Berührungsebene finden will, und conſtruire mehrere benachbarte Erzeugende . . . . G_2, G_2 und G', G'', . . . welche der gegebenen vorausgehen und ihr folgen. Alsdann wird eine willkürlich durch die Gerade G gelegte Ebene π dieſe benachbarten Erzeugenden in Punkten wie α_2, α_2, α', α'' ſchneiden, welche eine Curve $\alpha_2\,\alpha_2\,\alpha'\alpha''$ bilden werden, deren Durchſchnitt α mit G den Punkt kennen lehrt, in welchem die Ebene π die Fläche S berührt; da nämlich dieſe Ebene π die Gerade $G\alpha$ und die Tangente der Curve $\alpha\alpha'\alpha''$ . . . enthält, ſo berührt ſie wirklich die S in dem Punkte α. Eben ſo findet man, wenn man durch die Gerade G eine andere Ebene π' legt, den Punkt β, in welchem dieſe die Fläche S berührt; ferner berührt eine dritte durch G gelegte Ebene π'' die windſchiefe Fläche S in einem gewiſſen Punkt γ. In

dieſen drei Ebenen π, π', π'' nun zeichne man drei beliebige Gerade αR, βT, γV, und nehme ſie als Leitlinien einer windſchiefen Fläche vom zweiten Grade an, welche alsdann die gegebene Fläche S längs der Geraden G berühren wird (§. 578); die Conſtruction der Berührungsebene an S im Punkte H reducirt ſich alſo darauf, die Berührungsebene einer Hilfsfläche vom zweiten Grade für den nämlichen Punkt zu finden, was nach §. 530 oder 556 geſchehen muß, je nachdem die drei geraden Leitlinien parallel mit einer und derſelben Ebene angenommen werden oder nicht.

§. 583.

Hieraus folgt: daß jede, durch eine Gerade G einer windſchiefen Fläche gelegte Ebene π, im Allgemeinen zugleich eine Berührungsebene dieſer Fläche für einen gewiſſen Punkt α iſt, den man erhält, wenn man, wie oben, die Curve $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha'\,\alpha''$ . . . conſtruirt, in welcher jene Ebene die gegebene Fläche ſchneidet. Die Ebene π wird jedoch zu einer Aſymptotenebene der Fläche, wenn die Curve $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha'\,\alpha''$ . . . die Gerade G erſt in unendlicher Entfernung ſchneidet, wie es beim Hyperboloid geſchah (§. 546); oder auch, wenn dieſe Ebene die benachbarten Erzeugenden von G nicht ſchneidet, wie in dem in §. 561 unterſuchten Falle des Paraboloids.

§. 584.

Aus dem Vorhergehenden kann folgendes, wenigſtens für die Theorie intereſſante Problem abgeleitet werden: Eine Tangente an eine willkürlich gezogene Curve D zu conſtruiren, die hinſichtlich ihrer geometriſchen Eigenſchaften ganz unbekannt, aber durch ihre beiden Projectionen gegeben iſt.*)

Man lege durch dieſe Curve eine windſchiefe Fläche S, welche zu Leitlinien die Curve D und zwei willkürlich genommene Gerade A und B habe. Nachdem man nun die Erzeugende Gα conſtruirt hat, welche durch den auf der Curve D gegebenen Punkt α geht, ſo kann man nach §. 582 die Berührungsebene der Fläche S für den Punkt α finden, ohne die unbekannte Tangente der Leitlinie D anzuwenden. Eben ſo kann man, wenn man eine zweite windſchiefe Fläche S′ bildet, deren Leitlinien D und die beiden von den erſten ſehr verſchiedenen Geraden A′, B′ wären, wieder eine Berührungsebene an den Punkt α der windſchiefen Fläche S′ conſtruiren. Da nun die Curve D auf den beiden Flächen S und S′ zugleich ſich befindet, ſo muß ihre Tangente am Punkte α in den beiden Berührungsebenen, von welchen eben die Rede war, zugleich ſich befinden, und wird alſo durch deren Durchſchnitt gebildet. Um die graphiſchen Operationen zu vereinfachen, kann man die beiden windſchiefen Flächen S und S′ auch vermittelſt zweier Leitlinien D und A, D und A′ bilden, wenn man denſelben noch eine gemeinſchaftliche Richtebene P beifügt. Eine einzige Fläche S würde in dem Falle genügen, wenn die Curve D eben wäre, weil die Ebene dieſer Curve die geſuchte Tangente enthielte.

§. 585.

Berührungsebenen, deren Berührungspunkt nicht gegeben iſt. Man kann die im fünften Abſchnitt gegebenen allgemeinen Auflöſungen für Aufgaben dieſer Art auch auf die windſchiefen Flächen anwenden; doch laſſen ſie ſich, in Beziehung auf letztere, ſehr vereinfachen.

Soll die Berührungsebene an der Fläche S nur durch einen gegebenen Punkt V gehen, ſo hat die Aufgabe unendlich viele Auflöſungen (§. 348), welche man alle in der Berührungslinie eines um die Fläche S beſchriebenen Kegels erhält, der ſeine Spitze in V hat. Um dieſe Curve zu erhalten, darf man nun durch den

*) Dieſe ſcharfſinnige Methode iſt von Hachette. In der Anwendung aber wird man wegen der vielen Operationen, welche ſie erfordert, kein genaueres Reſultat erhalten, als wenn man die geſuchte Tangente vermittelſt eines Lineals zieht.

ıkt V und durch jede der verſchiedenen Erzeugenden G, G′, G″, ... Ebenen legen, welche die Fläche S in Punkten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. berühren, die man nach §. 583 zu conſtruiren hat; alsdann wird die Curve $\alpha\beta\gamma \ldots$. he alle dieſe Punkte vereinigt, die geſuchte Berührungslinie ſein.

§. 586.

Dieſes Verfahren iſt ſehr bequem, wenn die Fläche S vom zweiten Grade iſt; denn die Hilfslinie $\alpha, \alpha_2 \alpha' \alpha''$ §. 582, welche dazu dient, den Berührungspunkt α, der durch die Erzeugende G gelegten Ebene zu finden, cirt ſich in dieſem Falle auf eine Gerade, von der man nur zwei Punkte zu conſtruiren braucht; und die ve $\alpha\beta\gamma \ldots$ ſelbſt wird eben und vom zweiten Grade ſein (§. 353). Man könnte die Aufgabe des vorigen agraphen auf dieſen Fall zurückführen, wenn man längs jeder Erzengenden G der beliebigen Fläche S das ührungsparaboloid conſtruirte.

§. 587.

Soll die Berührungsebene an S mit einer Geraden D parallel ſein, ſo lege man durch die verſchie- n Erzeugenden G, G′, G″, ... Ebenen, parallel mit D; beſtimmt man hierauf nach §. 583 ihre Berüh- gspunkte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. mit der Fläche S, ſo erhält man die Curve $\alpha\beta\gamma \ldots$., welche die Berührungs- le eines um S beſchriebenen und mit D parallelen Cylinders iſt; dieſe wird folglich alle Auf- ngen der gegebenen Aufgabe liefern (§. 378).

§. 588.

Iſt die Fläche S vom zweiten Grade, ſo ergeben ſich die nämlichen Vereinfachungen wie im §. 586; und ı kann auch auf gegenwärtigen Fall die ähnliche Aufgabe für irgend eine beliebige Fläche S zurückführen.

§. 589.

Soll die Berührungsebene an irgend einer windſchiefen Fläche S durch eine gegebene Gerade D en, ſo darf man nur das allgemeine Verfahren des §. 395 befolgen, welches darin beſteht, die gemein- ftlichen Punkte der Berührungscurven zweier um S beſchriebenen Kegel zu ſuchen, die ihre Spitze in der aden D haben.

§. 590.

Iſt aber die windſchiefe Fläche vom zweiten Grade, ſo ergibt ſich aus nachſtehenden Betrachtungen eine einfachere Auflöſung dieſer Aufgabe. Die geſuchte Berührungsebene muß außer der Geraden D auch die en Erzeugenden des Hyperboloids (oder Paraboloids) enthalten, welche ſich in dem unbekannten Berührungs- kte ſchneiden; nun aber muß wenigſtens eine dieſer Erzeugenden die Gerade D in einem Punkte M treffen, in chem letztere Gerade das Hyperboloid durchſchneidet.

Sucht man alſo zuerſt (§. 534, 5) die beiden Punkte M und M′, in welchen die gegebene Gerade D im gemeinen die Fläche ſchneidet, und conſtruirt hierauf die vier Erzeugenden MA und MB, M′A′ und M′B′, che durch dieſe beiden Punkte gehen, ſo darf man nur noch durch die Geraden D und MA, D und MB zwei nen legen, welche alsdann der Aufgabe Genüge leiſten werden, weil ſie die Fläche irgendwo berühren (§. 545). ferner die Ebene DMA offenbar die Erzeugende M′B′ enthält, welche einen Punkt M′ in dieſer Ebene hat, , ihrer Natur nach, MA ſchneidet, und da die andere Ebene DMB gleicher Weiſe die Erzeugende M′A′ hält, ſo müſſen alſo die Berührungspunkte α und β dieſer Berührungsebenen ſich unmittelbar aus dem Durch- itt von MA mit M′B′ und von MB mit M′A′ ergeben.

§. 591.

Hieraus folgt, daß die Aufgabe jedesmal unmöglich ist, wenn die Gerade D das Hyperboloid nicht schneidet; doch darf man in diese Ausnahme den Fall nicht mit aufnehmen, wo die Gerade D, indem sie mit einer Seite des asymptotischen Kegels zusammenfällt, sich selbst asymptotisch zur Fläche verhält: die gesuchte Berührungsebene berührt alsdann jenen Kegel längs der Geraden D.

§. 592.

Endlich ist noch der Fall zu betrachten, da die gesuchte Berührungsebene mit einer gegebenen Ebene π parallel sein solle. Ist die windschiefe Fläche S allgemein genommen, so muß man sich wieder des allgemeinen Verfahrens, das in §. 421 gelehrt wurde, bedienen; ist aber die Fläche vom zweiten Grade, so kann man folgende Methode anwenden.

§. 593.

Wenn die Fläche ein windschiefes Hyperboloid ist, so suche man nach §. 548 die Erzeugenden A und B, A′ und B′, welche in beiden Systemen der Ebene π parallel sind, und von welchen A und A′ sowohl als auch B und B′ unter sich selbst parallel sein werden. Alsdann wird die durch A und B′, so wie auch die durch B und A′ gelegte Ebene der Aufgabe genügen, weil jede derselben zwei mit π parallele und sich schneidende Gerade enthält. Die Berührungspunkte ergeben sich unmittelbar aus dem Durchschnitt der Erzeugenden A und B′, B und A′, und die Aufgabe läßt zwei, oder nur eine, oder gar keine Auflösung zu nach der in §. 547 angestellten Untersuchung.

§. 594.

Ist die Fläche ein windschiefes Paraboloid, so findet man noch leichter nach §. 565 die beiden einzigen Erzeugenden A und B, welche, in beiden Systemen, der Ebene π parallel sind, und da diese beiden Geraden hier nicht unter sich parallel sein können (§. 554, 3), so muß die durch sie beide gelegte Ebene mit π parallel sein, und folglich der einzigen Auflösung der Aufgabe entsprechen. Der Berührungspunkt dieser Ebene mit der Fläche ergibt sich wieder unmittelbar aus dem Durchschnitte der Erzeugenden A und B.

Man hätte auch blos eine einzige Erzeugende A construiren und durch diese eine mit π parallele Ebene legen können; alsdann aber hätte man den Berührungspunkt dadurch finden müssen, daß man den zweiten Ast des Durchschnitts gesucht hätte, den die Berührungsebene mit dem Paraboloid bildet. Als diesen zweiten Ast aber hätte man die Erzeugende B gefunden. — Die Aufgabe kann unmöglich oder unbestimmt sein, nach dem, was §. 565 gesagt worden.

§. 595.

118. Lehrsatz. In jeder windschiefen Fläche S bilden die verschiedenen Normalen MN, M′N′, M″N″, ... welche man durch alle Punkte einer und derselben Erzeugenden G legt, stets ein hyperbolisches Paraboloid.

Bezeichnet man durch Σ die Fläche, welche der Ort aller dieser Normalen ist und läßt sie eine Viertelumdrehung um G machen, so wird jede Normale MN, welche nach der Voraussetzung senkrecht auf der Umdrehungsaxe ist, eine Ebene beschreiben und sich nach einer Geraden MT aufklappen, welche mit GM und MN rechte Winkel bildet; folglich muß MT sich in der Berührungsebene der Fläche S befinden. Da nun durch die gleichzeitige Ortsveränderung aller Normalen nur die Lage der Fläche Σ, nicht aber ihre Form geändert wird,

n jetzt nur die Natur der Fläche Σ' unterſuchen, welche erzeugt wurde durch die verſchiedenen Geraden
', M''T'', ... die alle Tangenten an S ſind und noch überdieß der Bedingung, ſenkrecht auf
genden G zu ſein, entſprechen.
ı laſſe daher die Gerade G über irgend drei dieſer Tangenten: nämlich über MT, M'T', M''T'' hin-
nun dieſe Leitlinien offenbar alle einer und derſelben Ebene parallel ſind, ſo muß alſo ein Parabo-
werden (§. 553), das, weil es dieſelben Berührungsebenen hat, wie die Fläche S in den Punkten
', letztere Fläche längs GMM' berühren muß (§. 575). Nun liegen aber auch die übrigen Tangenten
.. alle auf dieſem Paraboloid; denn ſchneidet man dieſes durch eine auf GM ſenkrechte und durch
ɔe Ebene, ſo erhält man (§. 551) als Durchſchnitt eine Gerade M'''R, welche wegen der Berührung,
ı S und dem Paraboloid ſtattfindet, in der Berührungsebene an S, d. h. in der Ebene GM'''T'''
; hieraus aber folgt, daß die beiden Geraden M'''R und M'''T''' zuſammenfallen, weil ſie beide
ıf GM''' ſtehen und mit dieſer Geraden in einerlei Ebene liegen: es liegt alſo M'''T''' ebenfalls in
ɔloid. Aehnliche Schlüſſe gelten aber für alle andern Tangenten von S, welche ſenkrecht auf der Er-
G ſtehen, und es iſt alſo erwieſen, daß die Fläche Σ', als der Ort dieſer Tangenten, ein hyperbo-
aboloid iſt; das Nämliche gilt aber auch für die durch die Normalen MN, M'N', ... gebildete
weil dieſe von Σ' nur durch ihre Lage im Raum verſchieden iſt.*)
er ſeiner großen Allgemeinheit wegen merkwürdige Lehrſatz, gilt für alle windſchiefen Flächen, und
dienen, die Natur der Normalfugen bei Gewölben mit windſchiefer Bogenfläche und die Form der
te, welche verſchiedene Ebenen mit dieſen Fugen bilden, vorauszubeſtimmen.

Fünftes Kapitel.

Verſchiedene Arten windſchiefer Flächen.

I. Das ſenkrechte Conoid.

§. 596.

iſt in §. 520 geſagt worden, daß man unter einem Conoid eine Fläche verſtehe, welche durch Fig. 121.
gliche Gerade erzeugt wird, die, beſtändig auf einer feſten Geraden und einer Curve
d, einer gegebenen Ebene parallel bleibt. Als Richtebene wurde hier die horizontale Pro-
ıe und als Leitlinien die Ellipſe (AZ'H, AH) und die Vertikale (O'Z', O) angenommen; da nun
ɔ ſenkrecht auf der Richtebene ſteht, ſo wird das Conoid ein ſenkrechtes, und die verſchiedenen Er-
laſſen ſich leicht conſtruiren; denn nimmt man irgend eine beliebige Horizontalebene B'G', welche die
ınkte (O, O'') und die Ellipſe in den Punkten (B', B), (G', G) ſchneidet, ſo erhält man (OB, O''B')
O''G',) als zwei Erzeugende des Conoids; die übrigen ergeben ſich auf die nämliche Art.

§. 497.

ɔ Fläche muß offenbar windſchief ſein, weil zwei aufeinander folgende Erzeugende (BO, B'O'')

ɔ rein ſynthetiſche Beweis iſt von J. Binet.

und (CO, C′O″) nicht parallel sind und sich auch nicht schneiden können, da sie in verschiedenen Horizontalebenen liegen. Es ist ferner zu bemerken, daß diese unbestimmt verlängerten Geraden noch einen zweiten Mantel bilden, der in dem Winkelraum aOh projicirt ist; und daß die Vertikale (O, O′Z′), in welcher sich beide Flächenmäntel schneiden, hier eine Striktionslinie ist, weil sie die Richtung der kürzesten Entfernung zwischen zwei beliebigen Erzeugenden anzeigt.

§. 598.

Die Berührungsebene dieses Conoids für einen auf einer Erzeugenden gegebenen Punkt (M, M′) erhält man hier durch die allgemeine Methode des §. 580. Man ziehe daher die Tangente B′T an den Punkt der Ellipse, in welchem diese durch die Erzeugende (OMB, O′M′B′) geschnitten wird, und da die andere Leitlinie (O, O′Z′) eine Gerade und als solche ihre eigene Tangente ist, so behalte man sie bei und lasse über diese Vertikale O und über die Tangente B′T die Erzeugende (OMB, O″M′B′) stets horizontal hingleiten; dadurch erhält man ein Berührungsparaboloid, in welchem offenbar die in der horizontalen Projectionsebene gezogene Gerade TO eine zweite Erzeugende des nämlichen Systems ist. Hierauf schneide man die beiden Erzeugenden OT und (OMB, O″M′B′) durch die, offenbar mit beiden Leitlinien parallele Vertikalebene MP, deren Durchschnitt mit dem Paraboloid eine Gerade des zweiten Systems (MP, M′P′) geben muß (§. 551). Alsdann wird die durch die beiden in der Fläche des Paraboloids liegenden Geraden (MP, M′P′) und (MB, M′B′) gelegte Ebene eine Berührungsebene dieser Hilfsfläche und mithin auch des gegebenen Conoides sein, weil diese beiden Flächen sich längs der Erzeugenden (OMB, O′M′B′) berühren (§. 576). Nun ist leicht einzusehen, daß diese Ebene als horizontale Spur die mit MB parallele Gerade Pα und als vertikale die mit M′P parallele Gerade αB′ haben muß; mithin ist PαB′ die Berührungsebene des Conoids für den Punkt (M, M′).

§. 599.

Wollte man die Berührungsebene für einen andern auf der nämlichen Erzeugenden liegenden Punkt (N, N′) erhalten, so könnte man sich hierzu wieder des bereits construirten Paraboloids bedienen; man dürfte es nur durch die mit beiden Leitlinien parallele Vertikalebene NQ schneiden, um aus dem Durchschnitt (NQ, N′Q′) und der Erzeugenden (NB, N′B′) die Ebene QβB′ als Berührungsebene des Conoids in (N, N′) zu erhalten. Man bemerke hier, daß die verschiedenen Berührungsebenen dieser windschiefen Fläche längs der Erzeugenden (OB, O′B′) wohl von einander unterschieden sind, obgleich alle diese nämliche Erzeugungslinie enthalten. Aus letzterem Grunde sind auch ihre horizontalen Spuren alle mit OB parallel. Bezeichnete man endlich (O, O″) als Berührungspunkt, so erhielte man als Vertikalebene die Berührungsebene OBB′.

§. 600.

Man bemerke ferner auch, daß alle die Geraden B′T, M′P′, N′Q′, ... die Vertikale O′Z′ in einem und demselben Punkte, der hier ω' heißen mag, treffen müssen; denn sie sind die Projectionen eben so vieler Erzeugenden des Paraboloids, welche dem zweiten System angehören und alle auf der Erzeugenden (OO′ ω') des ersten Systems aufliegen müssen. Und da die Geraden M′P′, N′Q′, ... offenbar Tangenten sind an den Schnitten des Conoids, welche die Vertikalebenen MP, NQ, ... mit demselben bilden, so stimmt also vorige Bemerkung gut mit der Natur jener Durchschnittscurven zusammen, die hier Ellipsen sind, mit einer gemeinschaftlichen Axe O′Z′, und welche leicht construirt werden können, wenn man die Punkte, in welchen jede Ebene wie MP die verschiedenen Geraden OA, OB, OC, ... des Conoids schneidet, auf die Vertikalebene projicirt.

II. Das um eine Kugel beſchriebene Conoid.

§. 601.

Man denke ſich eine Gerade, welche ſich ſo bewegt, daß ſie, bei ſtets horizontaler Lage Fig. 123.
ber eine feſte Gerade (AH, A'H') und eine Kugel (RI, O'I') zugleich hingleitet und an letzterer
ets Tangente bleibt: die auf eine ſolche Art beſchriebene Fläche wird ebenfalls ein Conoid ſein, deſſen
:itcurve durch eine krumme Fläche erſetzt wird, an welcher die verſchiedenen Erzeugenden Tangenten ſind. Um
eſe letzteren zu erhalten, lege man irgend eine Horizontalebene C'S' ſo, daß ſie die feſte Gerade in einem
unkt (C, C') und die Kugel in einem Kreiſe ſchneide, deſſen Halbmeſſer K'S' ſei; zieht man hierauf an die
orizontalprojection dieſes Kreiſes, die beiden Tangenten CM und Cm, ſo werden dieſe zwei Erzeugende des
onoides ſein, und ihre Vertikalprojection wird in die einzige Gerade C'm' fallen. Projicirt man nun auf
eſe letztere Gerade die Berührungspunkte M und m in M' und m' und wiederholt hierauf ähnliche Opera-
nen für alle andern Horizontalebenen, welche die gegebene Kugel ſchneiden können, ſo erhält man eine ge-
ſloſſene Curve

(RLMNPQRqpnmlR, R'L'M'N'P'Q'R''q'p'n'm'l'R')

s Berührungslinie der Kugel mit dem umſchriebenen Conoid; dieſe Curve hätte, wenn ſie zum Voraus bekannt
weſen wäre, die Stelle der Leitkugel vertreten können.

§. 602.

Um der Klarheit in der Figur willen, wurde hier angenommen, die Berührungspunkte der Erzeugenden
it der Kugel ſeien zugleich ihre Endpunkte, wodurch alſo der ganze Theil der Kugelfläche ſichtbar bleibt,
elcher, in Beziehung auf die Gerade (AH, A'H'), jenſeits der Berührungscurve liegt; dieſſeits der Geraden
AH, A'H') aber gibt es einen zweiten Mantel des Conoids, deſſen oberer und auf der Horizontalebene
chtbarer Theil durch die Verlängerungen Bλ, Cμ, Dν, ... der unteren Erzeugenden Bl, Cm, Dn, ...
s anderen Mantels gebildet wird, und umgekehrt. Um aber den ſichtbaren Umriß des Conoids auf der Ho-
ontalebene zu ergänzen, müßte man auch die Umhüllungscurven der Geraden AR, Bl, Cm, ... und
R, FQ, EP, ... zeichnen, welche Curven aus den auf einander folgenden Durchſchnitten dieſer Erzeugen-
n ſich ergäben, wenn letztere in hinlänglicher Anzahl conſtruirt würden, was um der Deutlichkeit der Figur
illen unterblieb.

§. 603.

Hier iſt die Gerade (AH, A'H') keine Strictionslinie mehr, wie in dem Beiſpiele des §. 597; aber
s den in eben jenem Paragraphen angeführten Gründen iſt auch gegenwärtige Fläche windſchief, wie über-
upt alle Conoiden.

§. 604.

Man ſuche nun die Berührungsebene für irgend einen auf der Erzeugenden (CM, C'M') liegenden Punkt
V, V'); und da hier ſtatt einer Leitcurve eine Richtfläche angenommen worden, ſo wende man das Verfahren
s §. 581 an. Man conſtruire daher zuerſt eine Tangente für einen Punkt (M, M') der Kugel und zwar, der
infachheit wegen, die Meridiantangente, welche offenbar (RMT, Z'M'T') iſt; hierauf laſſe man über dieſe
angente und über die gerade Leitlinie (AH, A'H') die ſtets horizontal bleibende Gerade (CM, C'M') hin-
leiten, ſo erhält man ein Paraboloid, welches das Conoid längs dieſer Erzeugenden berührt (§. 576); eine

zweite Lage dieſer beweglichen Geraden iſt offenbar die auf der Horizontalebene gezogene Gerade TH. Nun lege man durch den Punkt (V, V') eine mit den beiden Leitlinien (AH, A'H') und (MT, M'T') parallele Ebene; dieſe hat zu ihrer horizontalen Spur die Linie XY und muß das Paraboloid in einer geraden Linie ſchneiden (§. 551), hier alſo in der Geraden (αV, α'V'); durch dieſe aber und die Gerade (CVM, C'V'M') wird eine Ebene $\alpha\beta\gamma'$ beſtimmt, welche das Paraboloid und auch das Conoid in dem Punkte (V, V') berührt.

§. 605.

Dieſe Ebene muß, obgleich ſie das Conoid berührt, daſſelbe auch ſchneiden (§§. 512 und 583); und der ganze Durchſchnitt wird aus der Geraden (CVM, C'V'M') und einer durch (V, V') gehenden Curve beſtehen, die man leicht erhält, wenn man die Durchſchnittspunkte der Ebene $\alpha\beta\gamma$ mit den verſchiedenen Erzeugenden des Conoids ſucht.

III. Das Gewölbe eines ſchrägen Ganges.

(Le biais passé.)

§. 606.

Dieſe krumme Fläche wird manchmal bei Wölbung ſchräger Gänge angewendet, die zwiſchen zwei parallelen Vertikalebenen AC und BD eingeſchloſſen ſind. Sie hat zur Erzeugenden eine Gerade, welche bei ihrer Bewegung beſtändig 1) auf dem Umfang des Vertikalkreiſes (AZ'B, AB), 2) auf dem eines zweiten Kreiſes (C'Z'D', CD), der dem erſten gleich und parallel iſt und 3) auf einer Geraden O'OO'' aufliegen muß, welche auf dieſen beiden Kreiſen ſenkrecht ſteht, und durch den Mittelpunkt O des Parallelograms ABDC geht. — Um die verſchiedenen Lagen der beweglichen Erzeugungslinie zu conſtruiren, lege man durch die Gerade OO' eine beliebige Ebene OO'K'; dieſe wird die beiden Kreiſe in den Punkten (K', K), (L', L) ſchneiden, und verbindet man nun dieſe Punkte durch eine Gerade (KL, K'L'), ſo iſt letztere eine Erzeugende der krummen Fläche. (M'N'O', MNO'') iſt gleichfalls eine Lage der beweglichen Geraden, und geht dieſe endlich durch diejenigen beiden Punkte der Umkreiſe, welche in Z' projicirt ſind, ſo iſt ſie horizontal und ſchneidet die Leitlinie OO' in unendlicher Entfernung. Bei weiterer Fortbewegung nimmt die bewegliche Erzeugende eine der vorigen entgegengeſetzte Neigung an und ſchneidet die Leitlinie OO' hinter der Vertikalebene. *)

§. 607.

Die auf dieſe Art erzeugte Fläche iſt windſchief; denn irgend zwei Erzeugende derſelben können, da ſie ſich alle in Ebenen befinden, die durch OO' gelegt ſind, ſich nur in letzterer Geraden ſchneiden; nun aber treffen ſie mit dieſer Geraden in ganz verſchiedenen Punkten zuſammen, wie die Horizontalprojectionen BD, KL, MN, ... es deutlich zeigen. — Dieſe verſchiedenen Projectionen bilden durch ihre auf einander folgenden Durchſchnitte eine ſie umhüllende Curve, welche zugleich den ſichtbaren Umriß der Fläche auf der Horizontalebene darſtellt. Ueber die Natur dieſer Curve, ſo wie über die Gleichung der Fläche ſelbſt findet man Aufſchluß in der analytiſchen Geometrie im Raum, Kap. 15.

*) Die Bedingung, daß die Erzeugende bei ihrer Bewegung ſtets auf den drei oben bezeichneten Richtungslinien aufliegen ſolle, konnte auch noch auf anderem Wege erfüllt werden. Wenn nämlich dieſe Gerade, während ſie beſtändig durch den feſten Punkt O ginge, zugleich auf dem obern Halbkreis (AZB, AB) fortgleitete, ſo müßte ſie nothwendig auch die untere Hälfte des zweiten Kreiſes treffen, und umgekehrt. Die auf dieſe Art erzeugte Fläche wäre aber ein Kegel des zweiten Grades, und eignete ſich alſo nicht zu einem Gewölbe über dem Raum ACDB, daher auch dieſe zweite Erzeugungsart hier übergangen wird.

§. 608.

Um nun die Berührungsebene dieſer windſchiefen Fläche für einen auf der Erzeugenden (MNO, M'N'O') gegebenen Punkt (G, G') zu conſtruiren, bilde man zuerſt ein Hilfsparaboloid, das zu Leitlinien drei mit derſelben Ebene parallele Tangenten der Fläche hat (§. 579). Zwei dieſer Erzeugenden ſind die Tangenten M'T' und (N'V', NV); die dritte muß eine mit der Vertikalebene parallele Gerade ſein, welche durch den Punkt O'' geht und in der zu dieſem Punkt gehörigen Berührungsebene der Fläche liegt. Da nun dieſe Berührungsebene die Gerade O''O' und die Erzeugende (MNO'', M'N'O') enthalten muß, ſo kann ſie keine andere als die Ebene O''O'M' ſein, und mithin iſt (O''μ, O'M') die dritte Leitlinie des Hilfsparaboloids. Nun laſſe man die bewegliche Gerade (MNO'', M'N'O') über jene drei Leitlinien hingleiten und ſuche die Lage, welche ſie annimmt, wenn ſie z. B. zum Punkte (V, V') gelangt. Zu dieſem Zwecke lege man durch dieſen Punkt und durch die Leitlinie (O''μ, O'M') eine Ebene, deren horizontale Spur offenbar O''Vα, und die vertikale eine mit O'M' parallele Gerade $\alpha\beta'$ ſein wird; da nun dieſe Ebene die erſte Leitlinie M'T' in dem Punkte (β', β) ſchneidet, ſo folgt hieraus, daß (βVγ, β'V'γ') eine zweite Lage der Erzeugenden (MNO'', M'N'O') des Hilfsparaboloids iſt. Nun ſchneide man dieſe beiden Linien durch die mit den drei Leitlinien parallele Vertikalebene GH, ſo iſt die Gerade (GH, G'H') eine Erzeugende des Paraboloids (§. 551), welche dem zweiten Syſteme angehört; folglich wird diejenige Ebene, welche durch die Geraden (GH, G'H') und (MNO'', M'N'O') geht, nämlich O''PM', die Berührungsebene des Paraboloids und auch der gegebenen windſchiefen Fläche ſein, für den bezeichneten Punkt (G, G'). Man bemerke, daß die Spur PM' der Vertikalprojection G'H' einer der Geraden, welche jene Ebene enthält, parallel ſein muß.

§. 609.

Nun iſt es auch leicht, die Normale der windſchiefen Fläche für den Punkt (G, G') zu finden; und conſtruirt man eben ſo die Normalen für verſchiedene andere Punkte des Theiles (M'N', MN) der Erzeugenden, ſo erhält man ein hyperboliſches Paraboloid (§. 595), das zur Conſtruction der Normalfuge dieſes kleinen Gewölbes dient.

IV. Windſchiefe Schraubenflächen.

§. 610.

Nachdem man eine Schraubenlinie mit kreisförmiger Grundlinie (ABCD..., A'B'C'D''H'A''H'') conſtruirt hat, denke man ſich eine bewegliche Gerade (AO, A'a'), welche ſo über dieſe Schraubenlinie und ihre Axe (O, O'Z') hingleite, daß ſie in allen ihren Lagen einen conſtanten Winkel mit dieſer Axe bilde; dadurch wird eine Schraubenfläche entſtehen, die man aber nicht mit der in §. 456 betrachteten entwickelbaren Schraubenfläche verwechſeln darf; denn diejenige, von welcher hier die Rede iſt, iſt windſchief, wie gleich nachher bewieſen werden ſoll. Fig. 12

§. 611.

Man conſtruire nun zuerſt die verſchiedenen Lagen der Erzeugungslinie. Um diejenige zu erhalten, welche durch irgend einen beliebigen Punkt (F, F') der Schraubenlinie geht, nehme man auf der vertikalen Axe ein Stück a'f' gleich dem Höhenunterſchied der Punkte (F, F') und (A, A'), ſo wird die Gerade (F'f', FO) die geſuchte Erzeugende ſein; denn ſie bildet mit der Axe und dem Halbmeſſer des Cylinders, der ſeinen Endpunkt

in (F, F') hat, ein rechtwinkliges Dreieck, das dem Dreieck A'a'O' congruent iſt, woraus folgt, daß die beiden Winkel an den Spitzen dieſer Dreiecke einander gleich ſind, wie das Geſetz der vorhin erwähnten Bewegung es erfordert. Um aber die ganze Operation gleichförmiger und einfacher zu machen, erinnere man ſich, daß ſchon die Zeichnung der Schraubenlinie (§. 451) darauf geführt hat, den Kreisumfang ABCH und den Gang der Schraubenlinie A'A'' in die nämliche Anzahl gleicher Theile zu theilen, hier z. B. in vierzehn; nimmt man daher auf der vertikalen Axe, vom Punkte a' an, die Stücke a'b', b'c', c'd', d'e', e'f', ... alle gleich den Theilen des Schraubenganges A'A'', ſo darf man nur die entſprechenden Punkte B' und b', C' und c', D' und d', ... durch gerade Linien mit einander verbinden, um die Vertikalprojectionen B'b', C'c', D'd', ... der verſchiedenen Erzeugenden zu erhalten, die horizontal auf den Halbmeſſern BO, CO, DO, ... projicirt ſind.

§. 612.

Aus dieſer Conſtruction geht hervor, daß zwei Erzeugende, mögen ſie einander auch noch ſo nahe ſein, ſich nie in einerlei Ebene befinden können, weil ihre Horizontalprojectionen ſich alle in O ſchneiden, und die auf der Vertikalen O liegenden Punkte durchaus verſchiedene Höhe haben; mithin iſt dieſe Schraubenfläche windſchief.

§. 613.

Da jedes der rechtwinkligen Dreiecke, welches von einer Erzeugenden mit der Axe und dem Cylinderhalbmeſſer, der ſeinen Endpunkt in dem entſprechenden Punkte der Schraube hat, dem Dreiecke A'a'O' congruent iſt, ſo folgt hieraus, daß der zwiſchen der Schraubenlinie und der Vertikalaxe enthaltene Theil der beweglichen Geraden ſtets dieſelbe Länge behalte; folglich kann man die windſchiefe Schraubenfläche ſich auch dadurch entſtanden denken, daß eine Gerade von conſtanter Länge (AO, A'a') über eine Schraubenlinie von kreisförmiger Grundlinie und deren Axe hingleitete.

§. 614.

Bei dieſer Bewegung, wo die Länge der Erzeugenden und ihre Neigung gegen die Axe unverändert bleiben, muß natürlich jeder Punkt (α, α') dieſer Erzeugenden eine conſtante Entfernung αO von der Vertikalaxe (O, OZ') behalten, d. h. dieſer Punkt bewegt ſich auf der Fläche eines ſenkrechten Cylinders, deſſen Grundlinie der Kreis $\alpha\beta\gamma$... iſt. Da ferner die beiden Endpunkte der Erzeugungslinie ſich zu gleicher Zeit um a'b', oder a'c', oder a'd', ... erheben, ſo wird es auch der Punkt (α, α') thun, deſſen vertikale, von der Horizontalebene $\alpha'\omega'$ aus gerechnete Ordinaten ſtets den Ordinaten des Punktes (A, A') über der Ebene A'O' gleich ſind. Nun aber ſind dieſe letzteren, nach der Natur der vom Punkt (A, A') beſchriebenen Schraubenlinie, den Bogen AB, AC, AD, ... oder auch den Bogen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, ... proportionirt; mithin ſind auch dieſe letzteren Bogen den Ordinaten des Punktes (α, α') in ſeinen verſchiedenen in β, γ, δ, ... projicirten Bogen über der Horizontalebene $\alpha'\omega'$ proportional und die Curve

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\ldots., \alpha'\beta'\gamma'\varepsilon'\lambda'\pi'\alpha''\beta''\gamma''\lambda''),$$

welche von irgend einem Punkte (α, α') der Erzeugenden während ihrer Bewegung beſchrieben wird, iſt alſo eine Schraubenlinie (§. 446) von der nämlichen Ganglänge, wie die urſprüngliche Schraubenlinie, die aber auf einem mit dem erſteren concentriſchen Cylinder verzeichnet iſt.

Um dieſe Schraubenlinie zu conſtruiren, darf man nur, nachdem man mit Oα einen Kreis beſchrieben, die Punkte β, γ, δ, ... auf die ſchon gezeichneten Erzeugenden in β', γ', δ', ... projiciren; um aber den Durchſchnitt ſehr ſchiefer Linien zu vermeiden, iſt es beſſer, dieſe Erzeugenden durch Horizontalen zu ſchneiden, die man über $\alpha'\omega'$ zieht, und von welchen jede nächſtfolgende von der vorhergehenden um das Stück a'b' entfernt iſt.

§. 615.

Man könnte also die windschiefe Schraubenfläche sich auch erzeugt denken durch eine Gerade, welche ändig auf zwei concentrischen Schraubenlinien von ungleichen Halbmessern aber gleicher nglänge und auf der gemeinschaftlichen Axe dieser beiden Curven hingleitete. Dadurch be- nete man drei Leitlinien für die windschiefe Fläche, und die übrigen in den §§. 610 und 613 ausgesprochenen ingungen würden sich von selbst erfüllen.

§. 616.

Man bemerke auch, daß die windschiefe Schraubenfläche noch einen oberen Mantel zuläßt, welcher) die Verlängerung a′U′ der Geraden (a′A′, OA) die den unteren Mantel erzeugte, beschrieben wird. Fig. 124. wurde jedoch nur dieser untere Mantel dargestellt, damit seine Form um so bestimmter unterschie- werden könne; aber es muß bemerkt werden, daß nicht nur beide Mäntel die Gerade (O, O′Z′) gemein en, sondern auch, daß sie sich in einer oder mehreren Schraubenlinien von der nämlichen nglänge, wie die Curve (ABCD..., A′B′C′D′...) schneiden. Denn vergleicht man zwei Lagen der ugungslinie, welche in einerlei Meridianebene liegen, wie (AO, A′a′U′) und (OH, h′H′), so sieht man, sie sich in einem, nothwendig beiden Mänteln gemeinschaftlichen Punkte u′ schneiden, und daß dieser beiden einschaftlich bleiben wird bei der gleichzeitigen Fortbewegung der beiden Erzeugenden um die Axe. Nun ist : in §. 614 erwiesen worden, daß bei dieser Bewegung jeder Punkt a′ oder u′ der Erzeugungslinie eine mit BCD..., A′B′C′D′...) gemeinschaftliche Schraubenlinie von der nämlichen Ganglänge beschreibe: mithin) also der Durchschnitt beider Mäntel eine solche Curve bilden; und wenn man die Erzeugenden weit genug ängerte, so daß z. B. A′a′U′ auch h″H″, h‴H‴,... in den Punkten u″, u‴,... schnitte, so würden diese kte ebenfalls beiden Mänteln gemeinschaftliche Schraubenlinien beschreiben: außer dem vorhin erwähnten, t es also noch andere ähnliche Durchschnitte beider Mäntel.

§. 617.

Graphische Darstellung dieser Fläche. Diese ergibt sich aus allen den auf einander folgenden Er- Fig. 124.
zenden, die man construirt hat; und beschränkt man die Schraubenfläche auf ihren unteren Mantel, und be- zt die Erzeugenden in den Punkten, in welchen sie auf der leitenden Schraubenlinie (ABCD..., A′B′C′D′...) liegen, so erhält man als sichtbaren Umriß der Fläche auf der Horizontalebene den Kreis ABCHLA.

Der sichtbare Umriß auf der vertikalen Grundlinie besteht aus den Theilen A′B′C′D′G′H′L′ und Q′A″B″C″F″H″L″ der leitenden Schraubenlinie; ferner aus den verschiedenen symmetrischen Curven X′Y′B′, 'L′, X″Y″B″, welche die Umhüllungen der vertikal projicirten Erzeugenden sind. Denn da die Geraden a′, B′b′, C′c′, D′d′ mit der Axe O′Z′ immer kleinere Winkel bilden, so erzeugen ihre auf einanderfolgenden rchschnitte ein Polygon, das seine Convexität gegen die Axe kehrt; und nimmt man unendlich viele Erzeu- de an, so wird aus dem Polygon eine Curve X′Y′B′, welche alle jene Geraden berührt und zur Asymptote besondere Erzeugende a′A′ hat, deren Neigung gegen die Axe, in der Vertikalprojection, ein Maximum

Eben diese Curve wird auch die Axe O′Z′, welche selbst die Projection einer Erzeugenden der Fläche ist, einem gewissen zwischen d′ und e′ liegenden Punkt X′ berühren; hierauf würde sie ihre Berührung fortsetzen den Verlängerungen der Erzeugungslinien E′e′, F′f′, G′g′, H′h′, deren letztere eine neue Asymptote re; da aber hier der obere Mantel weggelassen ist, so reduzirt auch die Umhüllungscurve der Erzeugenden sich glich auf denjenigen Theil, der zwischen X′ und demjenigen (gegen B′ hin liegenden) Punkte enthalten ist,

wo die Vertikalprojection der Erzeugenden der Schraubenlinie die Sinusoide A′B′C′D′ berührt; nur fällt in dieſer Gegend die Umhüllungscurve merklich mit der Geraden B′b′ zuſammen.

Eben ſo berührt der Aſt x′y′L′ des ſichtbaren Umriſſes die Axe O′Z′ zwiſchen n′ und p′ und iſt die Umhüllungscurve der Erzeugenden n′N′, m′M′, l′L′ bis zu ihrer Berührung mit der Sinusoide H′L′M′; und würde man ſie noch weiter verlängern, ſo würde ſie die Erzeugende h′H′ zur Aſymptote erhalten. Aehnliches gilt auch für die andern Aeſte X″Y″B″, x″y″L″,...*)

§. 618.

Bemerkenswerthe Schnitte. Wenn man die Schraubenfläche vermittelſt einer durch die Axe (O, O′Z′) gelegten Ebene ſchneidet, ſo erhält man als Durchſchnitt gerade Linien, welche eben ſo viele verſchiedene Lagen der Erzeugenden ſein werden; und ſchnitte man die Fläche durch einen mit der leitenden Schraubenlinie concentriſchen, vertikalen Cylinder $\alpha\beta\gamma\delta\lambda\pi$, ſo erhielte man nach §. 614 eine andere Schraubenlinie $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\lambda'\pi'$..., welche die nämliche Ganglänge hätte, wie A′B′C′D′L′P′....

§. 619.

Nun ſchneide man die Schraubenfläche auch durch irgend eine Horizontalebene G″a″. Projicirt man hierauf die Punkte G″, W″, ε″, S″,.... in welchen die ſchneidende Ebene die vertikalen Projectionen der Erzeugenden trifft, auf die horizontale Grundebene, ſo erhält man die Spirale OIKSεWG..., die ſich nun weiter fortſetzen ließe, wenn man die folgenden Erzeugenden h″H″, l″L″,... genugſam verlängerte. Beſtände zugleich auch der obere Mantel (§. 616), den die Verlängerung der Geraden R′r′, Q′q′, ... erzeugen würde, ſo würde derſelbe durch die nämliche Ebene G″a″ nach einem andern Aſte Oikδ.... geſchnitten, welcher der nämlichen Spirale angehörte, und dieſe beiden Aeſte hätten als gemeinſchaftliche Tangenten den Durchmeſſer AOH; denn die Halbmeſſer OKC, OIB ſind Sekanten, deren zwei Durchſchnittspunkte mit der Spirale in einen einzigen Punkt O zuſammenfallen, wenn die Erzeugende zur Lage OA gelangt.

§. 620.

Der eben erhaltene Durchſchnitt iſt die Spirale des Archimed. Die Erzeugenden der Schraubenfläche wurden nämlich ſo conſtruirt (§. 611), daß der Höhenunterſchied der Endpunkte einer jeden dieſer Geraden beſtändig der Größe O′a′ gleich iſt, welche hier ſechs von den Theilen des Schraubenganges enthält; ferner, da die Punkte F″, E″, D″ um 1, 2, 3,.... dieſer Theile unter der Ebene G″a″ liegen, ſo folgt hieraus offenbar, daß, im Raume genommen,

$$F''W'' = \tfrac{1}{6}F''f'',\ E''\varepsilon'' = \tfrac{2}{6}E''e'',\ D''S'' = \tfrac{3}{6}D''d'',\ldots. \text{ iſt;}$$

da nun aber die Horizontalprojectionen dieſer Geraden im nämlichen Verhältniſſe getheilt ſein müſſen, ſo iſt auch

$$FW = \tfrac{1}{6}FO,\ E\varepsilon = \tfrac{2}{6}EO,\ DS = \tfrac{3}{6}DO,....$$

oder auch

$$OI = \tfrac{1}{6}OB,\ OK = \tfrac{2}{6}OC,\ OS = \tfrac{3}{6}OD,...;$$

*) Es iſt zu rathen, die Curven X′Y′B′, x′y′L′,... einfach dadurch zu zeichnen, daß man ſie die Sinusoide und die Projection der Erzeugenden berühren läßt, welches Verfahren hinreichende graphiſche Genauigkeit gewährt, wenn man nur eine hinreichende Anzahl Erzeugenden, die ſehr leicht zu conſtruiren ſind, anwendet. Wollte man aber die Berührungspunkte dieſer Curven beſtimmen, ſo müßte man durch jede Erzeugende eine ſenkrecht auf der Vertikalebene ſtehende Ebene legen, hierauf den Berührungspunkt dieſer Ebene mit der Schraubenfläche ſuchen, nach der Methode des §. 627; alsdann würden alle dieſe Punkte in ihrer Aufeinanderfolge den ſichtbaren Umriß X′Y′B′ der Fläche ausmachen. Dieſes Verfahren wäre jedoch ſehr mühſam.

gend einen Punkt W der Spirale erhält man also die allgemeine Gleichung

$$\frac{OW}{OF} = \frac{AF}{AG}, \text{ oder } \frac{\varrho}{R} = \frac{u}{{}^6/_7\pi},$$

den Radius vector dieses Punktes, u den entsprechenden Winkel, in einem Kreise gemessen, dessen Halb- die Einheit ist, und R den gegebenen Halbmesser OA bezeichnet. Diese Gleichung aber beweist offenbar, ϱ und u proportionirt wachsen, mithin ist die Curve eine archimedische Spirale; um aber, wie es ge- hlich ist, den constanten Radius vector R′, welcher der ersten ganzen Umdrehung entspricht, in die Gleichung ühren, nehme man

$$R' = {}^{14}/_6 R, \text{ woraus man } \varrho = R' \frac{u}{2\pi} \text{ erhält;}^*)$$

Bruch $^{14}/_6$ drückt hier das Verhältniß des Ganges der Schraubenlinie A′A″ zur Höhe O′a′ aus, welche irlich angenommen wurde, um die erste Erzeugende der windschiefen Schraubenfläche zu bestimmen.

§. 621.

Von der Berührungsebene für einen auf irgend einer Erzeugenden (DO, D′d′) gegebenen Punkt. Fig. 124.

nehme zuerst an, der gegebene Punkt (D, D′) liege auf der leitenden Schraubenlinie; zieht man alsdann erade DT senkrecht auf DO und macht sie dem Bogen DA an Länge gleich, so ist bekanntlich (T, T′) der unkt der Tangente an der Schraubenlinie, und folglich ist nun die dem Punkt (D, D′) entsprechende Be- ngsebene bestimmt durch die beiden Geraden (DO, D′d′) und (DT, D′T′); ihre horizontale Spur ist ar VT.

Nun sei ferner (δ, δ′) irgend ein Punkt auf der nämlichen Erzeugenden. Durch diesen Punkt geht be- lich (§. 614) eine Schraubenlinie, deren Anfangspunkt (α, α′) man erhält, wenn man den Bogen δα be- bt und den Punkt α auf die Erzeugende A′a′ in α′ projicirt. Nun kann man, ohne die Curve selbst zu en, ihre Tangente leicht construiren; denn wenn man, nachdem man die Gerade TO gezogen hat, die Linie arallel mit DT zieht, so ist offenbar δθ = δα; projicirt man daher θ auf die durch den Anfangspunkt α te Horizontallinie α′ω′ in θ′, so erhält man den Fußpunkt (θ, θ′) der gesuchten Tangente, welche (δθ, δ′θ′) Da nun die dem Punkt (δ, δ′) entsprechende Berührungsebene der Schraubenfläche diese Tangente, so wie die Erzeugende (δO, δ′d′), welche die Horizontalebene ω′α′ in dem Punkte (ξ, ξ′) schneidet, enthalten soll, offenbar ihr Durchschnitt mit dieser Horizontalebene die Gerade ξθ; ihre Spur aber auf der horizontalen bebene ist die mit ξθ parallele Gerade Vt.

Auf eine ähnliche Art würde man auch für einen neuen Punkt (ψ, ψ′) der Erzeugenden (DO, D′d′) ver- n, indem man wieder das rechtwinklige Dreieck TOD anwendete, in welchem man, parallel mit DT die be ψζ zöge, um den Fußpunkt (ζ, ζ′) der Tangente an der Schraubenlinie, welche durch (ψ, ψ′) geht, zu en.

§. 622.

Es ist hier wohl zu bemerken, daß für alle Punkte einer und derselben Erzeugenden (DO, D′d′) echtwinkligen Dreiecke TDV, θδξ, ∴ . . gleiche Grundlinien DV = δξ = . . . haben. Denn

*) Beschreibt man nämlich aus O mit R′ einen Kreis, so verhält sich jetzt, für jeden Punkt der Spirale, der Radius vector zum Kreishalbmesser R′, wie der entsprechende Winkel u zur Peripherie des mit R′ beschriebenen Kreises. Dieses nun ist das eigentliche Gesetz der archimedischen Spirale. Aus demselben geht aber hervor, daß, nach der ersten völligen Umdrehung des Radius vector, dieser dem Halbmesser R′ gleich sein müsse.

Anmerkung des Uebersetzers.

offenbar hat der Punkt (D, D′) die nämliche Höhe über (A, A′), wie der Punkt (δ, δ') über (α, α'); folglich sind die Theile D′V′ und $\delta'\xi'$ der Erzeugungslinie einander gleich, und es müssen daher auch ihre horizontalen Projectionen DV und $\delta\xi$ gleich sein. Aber der Winkel V oder ξ an der Grundlinie dieser Dreiecke ist veränderlich, während er constant und die Grundlinie veränderlich wäre für die verschiedenen Punkte einer und derselben Schraubenlinie, weil von dem Punkt D zu den Punkten C, B, . . . die Seiten DV und DT sich nach demselben Verhältnisse ändern. Hieraus folgt, daß die Ebenen, welche die Schraubenfläche in den verschiedenen Punkten einer und derselben Schraubenlinie berühren, gleich gegen die Horizontalebene geneigt sind.

§. 623.

124. Man bemerke auch noch, daß, für alle Punkte einer und derselben Erzeugenden (DO, D′d′), die Fußpunkte der Tangenten an den Schraubenlinien alle in der Geraden (TO, T′a′) liegen, so daß man also die Vertikalprojection θ' auch erhalten könnte, ohne, wie in §. 621, die Horizontalebene $\alpha'\omega'$ anzuwenden. Denn die Höhe der Punkte (O, a′) und (θ, θ') über der horizontalen Grundebene stehen in folgendem Verhältnisse:

$$O'a' : O'\omega' = A'a' : A'\alpha' = AO : A\alpha = DO : D\delta = TO : T\theta;$$

Aus der Gleichheit des ersten und letzten dieser Verhältnisse aber folgt, daß die vertikalen Ordinaten der Punkte (O, a′) und (θ, θ') ihren von (T, T′) gerechneten Abszissen proportionirt sind; mithin liegen diese drei Punkte in gerader Linie.

§. 624.

Es folgt hieraus, daß die Tangenten (DT, D′T′), ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$), ($\psi\zeta$, $\psi'\zeta'$) an den durch die verschiedenen Punkte der Erzeugenden (DO, D′d′) beschriebenen Schraubenlinien, alle auf den beiden festen Geraden (TO, T′a′) und (DO, D′d′) aufliegen; und da ferner diese Tangenten alle einer und derselben Vertikalebene DT parallel sind, so bilden sie also (§. 549) zusammen ein hyperbolisches Paraboloid, das die Schraubenfläche längs der Erzeugenden (DO, D′d′) berührt.

§. 625.

Auf das nämliche Resultat wäre man gekommen, wenn man nach der Methode des §. 577 ein Berührungshyperboloid (Hyperboloïde de raccordement) längs der Geraden (DO, D′d′) hätte bilden wollen. Denn hätte man, wie in §. 615, die Schraubenfläche durch die drei Leitlinien (ABCD . . ., A′B′C′D′ . . .), ($\alpha\beta\gamma\delta$ . . ., $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$), (O, O′Z′) bestimmt, so hätte man für das Hyperboloid die drei Geraden (DT, D′T′), ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$), (O, O′Z′) erhalten; und weil diese einer und derselben Vertikalebene parallel sind, so hätte man statt des Hyperboloids ein hyperbolisches Paraboloid erhalten (§. 553), also die windschiefe Fläche von der im vorigen Paragraph die Rede war.

§. 626.

Dieses Paraboloid hat zur Richtebene für das erste System der Erzeugenden die Vertikalebene DT; für das zweite System müßte die Richtebene durch (TO, T′a′) und durch eine mit (DO, D′d′) parallele Gerade gehen. Läßt man nun diese Parallele vom Punkte (O, a′) ausgehen, so muß sie, wie leicht einzusehen ist, die horizontale Grundebene in D schneiden, so daß also TD auch die horizontale Spur der zweiten Richtebene sein wird; letztere Ebene muß sich also wie die erstere senkrecht auf der Vertikalebene OD befinden, welche die Erzeugende der Schraubenfläche enthält. Hieraus aber kann man schließen, daß die Axe des Paraboloids (§. 577) horizontal und parallel ist mit DT, dem Durchschnitte der beiden Richtebenen. Es ist leicht einzusehen,

daß für jede andere Erzeugende als (D O, D′d′) das Berührungsparaboloid dieſelbe Form und nur eine andere, der neuen Erzeugenden entſprechende Lage erhalten hätte.

§. 627.

Den Berührungspunkt der windſchiefen Schraubenfläche mit einer gegebenen, durch eine bekannte Erzeugungslinie gehende Ebene zu finden. Dieſes Problem, das in der Perſpective und Schattenlehre dazu dient, die Berührungscurve der Schraubenfläche mit einem umſchriebenen Kegel oder Cylinder zu finden, könnte man nach §§. 585 und 587, oder noch einfacher nach §§. 586 und 588 auflöſen, wenn man damit anfinge, ſtatt der Schraubenfläche längs jeder Erzeugenden ein Berührungsparaboloid zu ſetzen. Aber die graphiſche Ausführung würde noch immer ſehr mühſam ſein, und daher iſt es beſſer, folgendes viel kürzere, und auf die Bemerkung des §. 622 gegründete, Verfahren anzuwenden. *) Fig. 1

Es ſei V t die horizontale Spur der gegebenen Ebene, welche durch die Erzeugende (D O, D′d′) geht; nachdem man nun das rechtwinklige Dreieck T D O conſtruirt hat, durch welches die Tangente der Schraubenlinie an dem Punkt (D, D′) der gegebenen Erzeugenden beſtimmt wird, ziehe man durch den Punkt t eine mit D O Parallele t θ, hierauf eine Senkrechte θ δ, ſo erhält man durch letztere den Punkt (δ, δ′), in welchem die gegebene Ebene die Schraubenfläche berührt. Denn um die Berührungsebene für dieſen Punkt (δ, δ′) zu conſtruiren, müßte man (§§. 621 und 622 in dem Dreieck O D T die Gerade δ θ ſenkrecht auf δ O ziehen, und hierauf δ ξ gleich D V machen; alsdann wäre die Linie θ ξ die Spur dieſer Berührungsebene auf derjenigen Horizontalebene, welche durch den Anfangspunkt der durch (δ, δ′) gezogenen Schraubenlinie geht. Nun aber muß, nach den obigen Conſtructionen, die Linie θ ξ parallel mit V t ſein; alſo haben die gegebene Ebene und die Berührungsebene für den Punkt (δ, δ′) parallele horizontale Spuren, und da ſie beide durch die Gerade (O D V, d′D′V′) gehen, ſo fallen ſie in eine einzige Ebene zuſammen.

§. 628.

Die **Schraubenfläche** mit einer Richtebene. Die allgemeine Definition des §. 610 ſetzt voraus, daß die bewegliche Gerade über eine Schraubenlinie und ihre Axe hingleite und mit letzterer in jedem Moment ihrer Bewegung einen conſtanten aber beliebigen Winkel bilde: iſt nun dieſer Winkel ein rechter, ſo ſind alle Lagen der Erzeugenden parallel mit der Horizontalebene, welche ſomit alſo eine Richtebene der krummen Fläche wird; und letztere, welche windſchief bleibt, gehört alſo zum Geſchlecht der ſenkrechten Conoide (§. 520). Es iſt leicht einzuſehen, wie alle die Eigenſchaften, welche ſich an der allgemeinen windſchiefen Schraubenfläche herausſtellten, auch an der beſondern Schraubenfläche, von der jetzt die Rede iſt, ſich wieder vorfinden werden, nur mit bedeutender Vereinfachung. Es wird deßhalb auch genügen, die Form dieſer letzteren, mit Anwendung einer einzigen Projectionsebene, darzuſtellen, wie es in der Figur 126. geſchieht, die ſpäter zur Darſtellung einer Schraube dienen wird. Man ſieht auf derſelben die leitende Schraubencurve Fig. 1
A B C D E . . . ., und die verſchiedenen Lagen A 0, B 1, C 2, . . . der beweglichen Geraden verzeichnet, und man beweist noch leichter als in §. 614, daß jeder Punkt α der Erzeugungslinie eine mit der erſteren concentriſche Schraubenlinie beſchreibt, welche die nämliche Ganglänge und ihren Anfangspunkt in der nämlichen Horizontalebene hat, wie jene.

§. 629.

Um die Berührungsebene dieſer Schraubenfläche für einen auf einer Erzeugenden bezeichneten Punkt zu

*) Dieſes Verfahren iſt dem Traité des surfaces reglées von Gacheau entnommen.

finden, muß man, wie in §. 621, den Fußpunkt der Tangente suchen, welche die durch den gegebenen Punkt gehende Schraubenlinie berührt; diesen Fußpunkt aber findet man wieder vermittelst des rechtwinkligen Dreiecks ODT der Figur 124.; aber in gegenwärtigem Falle werden die horizontalen Spuren der verschiedenen Berührungsebenen längs der Erzeugungslinien OD von den Punkten T, θ, ζ, . . . ausgehen und alle mit OD parallel sein, weil diese horizontale Gerade allen jenen Ebenen gemeinschaftlich ist.

§. 630.

Fig. 124. Ferner wird die Gerade (TO, T′a′), welche nach §. 623 die Fußpunkte der Tangente an den verschiedenen Schraubenlinien enthielt, sich hier in die auf der Horizontalebene gezogenen Linie TO verwandeln; und das Berührungsparaboloid (§§. 624 und 626) wird die Vertikalebene DT und die Horizontalebene selbst zu Richtebenen haben.

§. 631.

Die Aufgabe des §. 627 endlich läßt sich für diesen Fall weit einfacher lösen; denn weil als horizontale Spur der bezeichneten Ebene eine mit OD parallele Gerade $t\theta$ gegeben ist, so kann man aus dem Punkte θ, in welchem diese Spur die Linie TO schneidet, die senkrechte $\theta\delta$ ziehen, durch welche man den gesuchten Berührungspunkt δ erhält. Die Fläche, von der hier die Rede ist, dient nicht allein als Gewinde einer rechtwinkligen Schraube, sondern auch für eine Wendeltreppe mit einem kreisförmigen leeren Raum in der Mitte.

V. Die Schraube mit dreieckigem Gewinde.

§. 632.

Fig. 125. Man stelle sich vor, ein gleichschenkliges Dreieck $\alpha A \alpha'$, dessen Grundlinie $\alpha\alpha'$ stets mit einer Seite eines senkrechten kreisförmigen Cylinders zusammenfällt und dessen Ebene beständig durch die Axe dieses Cylinders geht, drehe sich gleichförmig um letztere Gerade; ferner nehme man an, jenes Dreieck erhebe sich zu gleicher Zeit den Winkelräumen proportional, die seine Ebene beschreibt, so daß am Ende einer vollständigen Umdrehung dasselbe sich um eine seiner Grundlinie $\alpha\alpha'$ gleiche Höhe erhoben habe, d. h. daß es in die Lage $\alpha' A \alpha''$ gekommen sei; alsdann wird der durch das bewegliche Dreieck beschriebene körperliche Raum das Gewinde einer Schraube sein, die den vorerwähnten Cylinder zur Spindel hat.

§. 633.

Es ist klar, daß unter diesen Bedingungen die Spitze A des Dreiecks eine Schraubenlinie ABCDEFA′B′... beschreibt (§. 446), die einem mit ersterem concentrischen Cylinder angehört und deren Ganglänge gleich $\alpha\alpha'$ ist; da ferner die Seiten $A\alpha$ und $A'\alpha'$ die Axe beständig schneiden und zwar stets unter demselben Winkel, so sind mithin §. 610 die beiden Seitenflächen des Gewindes Theile zweier windschiefen Schraubenflächen, und zwar so, daß der obere Mantel der einen (§. 616) die untere Seitenfläche des Gewindes, der untere Mantel der andern Schraubenfläche hingegen die obere Seite des Gewindes bildet.

§. 634.

Um diese Schraube vollständig darzustellen muß man zuerst, vermittelst einer Horizontalebene, die aber hier in der Figur als weggenommen gedacht wird, die Vertikalprojection ABCDFA′B′... der durch den Punkt A beschriebenen Schraubenlinie construiren (§. 451), wobei zu bemerken ist, daß die Ganglänge AA′ dieser

raubenlinie der Grundlinie $\alpha\alpha'$ des gegebenen Dreiecks gleich ſein muß. Hierauf nimmt man einen der hen Theile dieſes Ganges, deren Anzahl hier zehn beträgt, und trägt ihn von den Punkten 0 oder 16 an, die Seiten $A\alpha$ und $A\alpha'$ die Axe ſchneiden, auf letztere; dadurch erhält man im Allgemeinen zwei verſchiedene hen von Theilpunkten, die aber hier nur eine einzige bilden, weil das Dreieck $\alpha A\alpha'$ ſo gewählt wurde, daß e Seiten eine genaue Zahl Theilungen des Schraubenganges auf der Axe zwiſchen ſich enthalten. Verbindet n nun den erſten Theilpunkt B der Schraubenlinie mit den Punkten 1 und 17, den Punkt C mit 2 und 18, Punkt D mit 3 und 19 ...., ſo erhält man die verſchiedenen Lagen des erzeugenden Dreiecks.

§. 635.

Dieſe Geraden müſſen ſich jedoch in den Punkten β und β', γ und γ', δ und δ' ..., wo ſie die Spindel Schraube treffen, endigen. Da aber dieſe Punkte nichts anders ſind, als die auf einander folgenden Lagen Punkte α und α' des beweglichen Dreiecks, ſo folgt aus §. 602, daß die Curve $\alpha\beta\gamma\varphi\alpha'\beta'$... eine Schrau- inie iſt von der Ganglänge der ABCDFA'...; dieſe neue Schraubenlinie erhält man alſo, wenn man die eſtimmten Erzeugenden durch Horizontalen ſchneidet, welche man durch die Punkte 4 und 14, 5 und 15, 6 16, ... zieht. Da nun ferner der Punkt α' den beiden Dreiecken $\alpha A\alpha'$ und $\alpha' A\alpha''$ gemeinſchaftlich iſt, nuß die Schraubenlinie $\alpha\beta\gamma\varphi\alpha'\delta'\gamma'$... auch durch die Durchſchnitte der Seiten $B\beta'$ und $B'\beta'$, $C\gamma'$ und ', ... erzeugt werden, was den vorigen Conſtructionen als Probe dienen kann. Dieſe letztere Schraubenlinie et alſo die einwärtsgehende Schärfe der Schraube, während die Curve ABCDFA'... die auswärts- ende bildet.

§. 636.

Was den ſichtbaren Umriß beider Seitenflächen des Gewindes betrifft, ſo bemerke man wohl, daß der- Fig. 125.
e nicht durch zwei geradlinige Erzeugende, ſondern durch zwei Curven XY und xy gebildet wird, welche die hüllenden für die Projectionen der Erzeugungslinie ſind, und zu Aſymptoten die beſondern Erzeugenden ' und $A'\alpha'$ haben. Da jedoch diejenigen Theile der beiden windſchiefen Schraubenflächen, welche das Ge- de bilden, von geringer Ausdehnung und ziemlich weit von der Axe entfernt ſind, ſo können die Linien XY xy hier näherungsweiſe als zwei mit $\alpha' A$ und $\alpha' A'$ convergirende Gerade gezeichnet werden, von denen eine die Bögen AYB und $\alpha' X\beta'$, und die andere die zwei Bögen A'yF und $\alpha' x\varphi$ wird berühren müſſen. n dieſen beiden Aeſten des ſichtbaren Umriſſes aber verdeckt der erſte XY einen Theil des zweiten xy, wel- ſich in einem Punkte z, der die nämliche Höhe hat, wie α, endigen muß, wegen der ſymmetriſchen Form er Curven.

Dieſe Bemerkungen, welche für jeden einwärtsgehenden Winkel des Gewindes auf der linken Seite m, und welche ſich auf umgekehrte Art für die einwärtsgehenden Winkel auf der rechten Seite wieder ben, ſind ohne Zweifel hinreichend, den Leſer über die verſchiedenen Punktuationen, durch welche in Fig. 125. ſichtbaren von den unſichtbaren Theilen der Schrauben unterſchieden wurden, in's Klare zu ſetzen. zufügen iſt noch, daß durch das Rechteck UVvu das Parallelepiped vorgeſtellt wird, das den Kopf der raube bildet.

VI. Die Schraube mit viereckigem Gewinde.

§. 637.

Das Gewinde dieſer Schraube wird durch ein Rechteck $A\alpha\lambda L$ erzeugt, deſſen Ebene durch die Axe eines Fig. 126.
rechten und kreisförmigen Cylinders geht, und ſich gleichförmig um dieſelbe Axe dreht, während das Rechteck

ſelbſt ſich an den Cylinderſeiten hinauf, und den von ihm beſchriebenen Winkelräumen proportionirt, erhebt. Hieraus folgt offenbar, daß die Punkte A und L bei dieſer Bewegung zwei gleiche Schraubenlinien beſchreiben, deren gemeinſchaftlicher Gang AA′ oder LL′ hier willkürlich groß genommen werden kann, nur muß er wenigſtens doppelt ſo groß als AL ſein, damit er dem erhabenen Gewinde der Schraubenmutter, in welche dieſe Schraube eingreift, freien Durchgang geſtatte. Die beiden Seiten Aα und Lλ, die ſtets auf den beiden Schraubenlinien und der Axe aufliegen, welche letztere ſie unter einem rechten Winkel ſchneiden, werden alſo zwei windſchiefe Flächen erzeugen, welche nach §. 628 den Schraubenflächen mit einer Richtebene angehören, während die Seite AL eine cylindriſche Zone beſchreiben wird, die das Gewinde der Schraube nach außen begrenzt.

§. 638.

Um die Schraube mit viereckigem Gewinde darzuſtellen, muß man zuerſt die beiden Schraubenlinien ABC DEFA′F′.... und LMNPQRL′R′... mit einerlei Ganglänge conſtruiren, wobei man ſich, nach §. 451, einer Horizontalebene bedient, die aber hier als weggenommen gedacht wird; hierauf beſchreibt man eben ſo auf dem Cylinder der Spindel zwei andere Schraubenlinien $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi\alpha'$...., $\lambda\mu\pi\varrho$...., welche von den Punkten α und λ erzeugt werden (§. 628) und einen dem AA′ gleichen Gang $\alpha\alpha'$ haben. Dieſe beiden letzten Curven ſind die Durchſchnitte der Schraubenſpindel mit den untern und obern Flächen des Gewindes und dienen zu Begrenzung derjenigen Theile der Erzeugenden, welche, wie Bβ und Mμ, Dδ und Pπ, Fφ und Rϱ,..... jenen beiden windſchiefen Flächen angehören. Endlich kann man auch einige Seiten des äußeren Cylinders, wie BM, CN, DP,... beifügen.

§. 639.

Unter den verſchiedenen Linien, von welchen hier die Rede war, wird der Leſer leicht die ſichtbaren von den unſichtbaren unterſcheiden. Im erſten Gange des Gewindes wurden ſowohl die einen, als auch die andern vollſtändig, nur bald mit vollem Strich, bald punktirt, angegeben, je nachdem ihre Lage es erforderte; in den andern Gängen hingegen wurden nur die ſichtbaren Linien beibehalten, um die Schraube ſo darzuſtellen, wie ſie dem Zuſchauer in der Wirklichkeit erſcheinen würde.

VII. Das Conoid des ringförmigen Kreuzgewölbes.

§. 640.

Beſeitigt man hier Alles, was ſpeziellen Bezug auf den Körperſchnitt hat, ſo reduzirt die Aufgabe ſich darauf, die Durchſchnittscurve eines Wulſtes mit einem Conoid zu finden: eine Curve, deren Tangenten zu neuen Unterſuchungen, die hauptſächlich beim Steinſchnitt ihre Anwendung finden, Veranlaſſung geben werden. Der Wulſt wird erzeugt durch die Umdrehung des Halbkreiſes B′C′b′, welcher, in die Vertikalebene B′ω erhoben, ſich um die Vertikale ω dreht, und die innere Fläche des Hauptgewölbes bildet, das den Namen Ringgewölbe führt. Ein in dieſem Gewölbe angebrachter, und von zwei Vertikalebenen Ff und Gg begrenzter Eingang, iſt durch ein Conoid bedeckt, deſſen geradlinige Erzeugende ſtets horizontal bleibt, während ſie auf der Vertikale ω und einer zweiten Richtlinie hingleitet, welche auf folgende Weiſe gebildet wird. Man rectificirt den Bogen AOD auf ſeine Tangente aOd und beſchreibt über dieſer Geraden, als der großen Axe, eine Halbellipſe A″C″D″, deren vertikale Halbaxe O″C″ dem Halbmeſſer OB oder O′B′ des Wulſtes gleich iſt; hierauf ſtellt man ſich vor, dieſe, in die Vertikalebene aOd erhobene Ellipſe werde um den ſenkrechten Cylinder O′AOD ſo herumgelegt, daß ihre Abſziſſen mit den Bögen der Grundlinie O′AOD zuſammenfallen, ſo wird aus der

ipſe eine Linie von doppelter Krümmung, die man nun als zweite Leitlinie, oder als Grundlinie des Conoids nimmt.

§. 641.

Um nun den Durchſchnitt dieſes Conoids mit dem Wulſte zu erhalten, ſchneide man beide Flächen durch ſchiedene Horizontalebenen. Diejenige, welche durch den Punkt M' des Meridians B'C'b' geht, wird den ulſt in zwei mit den Radien ωP' und ωp' beſchriebenen Kreislinien ſchneiden; ſucht man nun auf der Ellipſe Punkte M'' und N'', welche ſich in derſelben Höhe befinden, wie M', und nimmt die Bögen OP und OQ ich den Abſziſſen O''P'' und O''Q'', ſo ſind die Punkte P und Q offenbar die Projectionen der Punkte, in lchen die Grundlinie des Conoids von der ſchneidenden Horizontalebene durchſchnitten wird; und mithin rden ωP und ωQ die Projectionen der beiden Durchſchnitte ſein, welche eben jene Ebene mit dem Conoide et. Dieſe Geraden aber durchſchneiden die beiden kreisförmigen Schnitte in den vier Punkten M, m, N, n; zlich gehören dieſe dem Durchſchnitt der beiden krummen Flächen an, welcher aus zwei Aeſten von doppelter ümmung beſteht, deren Horizontalprojectionen GOf und FOg ſind.

§. 642.

Man bemerke 1) daß, wenn man das Conoid rückwärts über die Vertikalaxe hinaus verlängert, es den ulſt zum zweitenmale ſchneidet in zwei andern Aeſten $G_2 O_2 f_2$ und $F_2 O_2 g_2$, welche den beiden erſten ſymtriſch ſind, und auf die nämliche Art conſtruirt werden; 2) daß angenommen wird, die beiden Mäntel des noids ſeien durch zwei vertikale Cylinder B'GBF .... und b'gbf ... begrenzt, welche von jenen in urven von doppelter Krümmung geſchnitten werden; dieſe Curven aber ſind nichts anderes, als Ellipſen, die ı jene Cylinder herumgelegt ſind und alle den Halbmeſſer des Wulſtes zur vertikalen Halbaxe haben, wie ches klar aus der Proportionalität der horizontalen Bögen BG und BF oder bg und bf mit den Bögen OA d OD hervorgeht; 3) um den Wulſt und das Conoid zu Bildung eines Kreuzgewölbes zu benützen, ıß man alle inneren Theile der geradlinigen und kreisförmigen Erzeugenden, welche hier als unſichtbar nktirt ſind, weglaſſen.

§. 643.

Bemerkenswerth iſt ferner, daß jede der ebenen Curven, wie GOf, welche die Horizontalprojectionen der Fig. 127.
urchſchnittscurven ausmachen, eine archimediſche Spirale iſt. Denn zufolge der Conſtruction, welche irgend ien Punkt M geliefert hat (§. 641), ſind der Bogen OP und die Gerade PM beziehlich gleich den Abſziſſen 'P'' und O'P' der beiden Punkte M'' und M', welche einer und derſelben vertikalen Ordinate in der Ellipſe d dem Meridiankreiſe des Wulſtes entſprechen; da nun dieſe beide Curven eine gemeinſchaftliche Vertikalaxe ben, ſo verhalten ſich bekanntlich jene beiden Abſziſſen zu einander, wie die große zur kleinen Axe, und man t alſo die Projection:

$$OP : PM = OA : AG.$$

immt man nun einen Bogen Oλ, der ſich zu OA eben ſo verhält, wie ωO zu AG, ſo kann man ſtatt der rigen Proportion dieſe ſetzen:

$$OP : PM = O\lambda : O\omega, \text{ woraus man erhält:}$$

$$\lambda P : \omega M = O\lambda : O\omega:$$

ieſe letztere Proportion aber beweist, daß das Verhältniß des Bogens λP zum Radius vector ωM für alle unkte der Curve GMOfω daſſelbe bleibt; mithin iſt dieſe Curve eine archimediſche Spirale, die ihren An-

fang auf dem Halbmeſſer ωλ hat, den ſie berührt, indem ſie ſich in einem, mit dem erſten ſymme Aſte ωφ verlängert.

Um den Gang dieſer Spirale, d. h. den Radius vector zu erhalten, der einer völligen Umdrehun ſpricht, darf man nur eine vierte Proportionale δ zu folgenden drei Linien ſuchen: zu dem Bogen λO, der Peripherie und dem Halbmeſſer ωO; alsdann kann man, wie es gewöhnlich geſchieht, auf der Periphe Halbmeſſers δ die Bögen nehmen, durch welche die von dem Radius vector durchlaufenen Winkelräume g werden.

§. 644.

Die Curve FOgωγ iſt auch eine archimediſche Spirale, die ihren Anfangspunkt im Halbmeſſer ω und welche nicht mit der vorigen zuſammenfällt, wenn nicht der Bogen Oλ ein Kreisquadrant iſt. Um dieſes Zuſammenfallen zu bewirken, darf man nur die Halböffnung OA des Einganges ſo nehmen, daß zum Quadranten eben ſo verhält, wie OB zu Oω. Endlich gehören die beiden andern Curven $G_2 O_2$ $F_2 O_2 g_2$ ebenfalls zwei archimediſchen Spiralen an, welche die nämlichen Halbmeſſer $\lambda\omega\lambda_2$ und $\zeta\omega\zeta_2$ be aber eine den vorigen Spiralen entgegengeſetzte Lage haben. *)

§. 645.

127. Die Tangente an irgend einem Punkte M iſt gegeben durch den Durchſchnitt der Berührungsebe Wulſte mit der Berührungsebene am Conoid. Nun hat die erſte dieſer Ebenen zur horizontalen Spur l ωM ſenkrechte Gerade VK, welche man erhält, wenn man den Fußpunkt T′ der Tangente M′T′ am Me kreiſe in die Lage V bringt; was nun aber die zweite Berührungsebene betrifft, ſo muß man zuerſt ein

---

*) Die Analyſis führt auf dieſelben Reſultate: denn nimmt man als Axe der x die Gerade ωOB, ferner eine auf dieſe rechte als Axe der y und endlich die Vertikale ω als Axe der z an, und ſetzt hierauf

$$\omega O = I,\ OB = R,\ OA = O''A'' = a,$$

ſo findet man (Analyt. Geom. im Raum, Kap. 14) für den Wulſt und das Conoid folgende Gleichungen:

$$(1 - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 = R^2;\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin.\frac{a}{RI}\sqrt{R^2-z^2};$$

eliminirt man nun aus dieſen z, ſo erhält man für die Horizontalprojection dieſer beiden Flächen:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm \sin.\frac{a}{RI}(1-\sqrt{x^2+y^2}).$$

Um dieſe Gleichung zu vereinfachen, führe man Polarcoordinaten in dieſelbe ein, vermittelſt der Formen $x = r$ $y = r \sin. u$, ſo erhält man:

$$\sin. u = \pm \sin.\frac{a}{RI}(1-r);$$

woraus folgt

$$u = \pm\frac{a}{RI}(1-r),\ \text{und}\ \pi - u = \pm\frac{a}{RI}(1-r),$$

oder auch

$$r = 1 \pm \frac{R}{a} I u,\ \text{und}\ r = 1 \pm \frac{R}{a}(\pi - u).$$

Dieſe vier verſchiedenen Gleichungen gehören den vier Spiralen der Figur 127. an, und um die erſte z. B. auf die P ωλ, welche ihre Tangente iſt, zurückzuführen, darf man nur den Anfang der Winkel u, welche hier von der Linie a und rechts von derſelben genommen werden, weiter zurückverlegen, indem man ſetzt:

$$u = u' - \frac{a}{R},\ \text{woraus man alsdann erhält:}\ r = \frac{R}{a} I u'.$$

Dieſe letztere Gleichung aber gehört einer archimediſchen Spirale an, deren Winkel u′ von dem Halbmeſſer ωλ an gem werden.

ıld construiren (§. 580), welches das Conoid längs der Erzeugenden ωPM berührt. Zu diesem Zwecke ziehe ı an die ebene Ellipse die Tangente M″T″ und lege hierauf diese Curve (§. 640) um den Vertikalcylinder) A, so erhält man PT = P″T″ als Subtangente, und T ist also der Fußpunkt derjenigen Tangente, welche ı Punkt P der Grundlinie des Conoids gehört; nun wird die bewegliche Gerade ωP, welche, um das Hilfs- ıboloid zu erzeugen, auf dieser Tangente und der Vertikale ω hingleiten und dabei stets horizontal bleiben), die Lage ωT annehmen, wenn sie am Fuße jener Tangente ankommt. Schneidet man daher die beiden eugenden ωP und ωT durch die Vertikalebene MS, so muß nach §. 551 dieser Schnitt eine Gerade MS :n, welche in Verbindung mit der Erzeugenden ωM die Berührungsebene des Paraboloids bestimmen hilft, n horizontale Spur die mit ωM parallele Linie SK sein wird. Da nun die Spuren SK und VK der beiden ührungsebenen sich in K schneiden, so ist also KM die gesuchte Tangente.

§. 646.

Dieses Verfahren läßt sich nicht unmittelbar auf den vielfachen Punkt*) O anwenden, weil hier die en Berührungsebenen horizontal werden, mithin ganz zusammenfallen, so daß ihr Durchschnitt unbestimmt bt. Sucht man aber die Größe des Winkels VMK = θ, den irgend eine Tangente mit dem entsprechenden ius vector bildet, so hat man sogleich

$$\text{tang. } \theta = \frac{KV}{VM} = \frac{MS}{P'T'};$$

da ferner die Subtangente P′T′ des Kreises gleich ist dem Produkte aus der Subtangente P″T″ oder PT Ellipse und dem Quotienten aus der kleinen Axe durch die große, so ist

$$\text{tang. } \theta = \frac{MS}{PT} \cdot \frac{OA}{OB}, \text{ oder}$$

$$\text{tang. } \theta = \frac{M\omega}{P\omega} \cdot \frac{OA}{OB}. \qquad (1)$$

ı ist in letzterem Ausdruck der Faktor Mω die einzige Größe, welche sich mit dem Berührungspunkt M ändert, für den besondern Punkt O dem Nenner Pω gleich wird; mithin ist die Neigung der Tangente an diesem ıkt gegeben durch die Formel

$$\text{tang. } \theta' = \frac{OA}{OB} = \frac{Oa}{OB}, \qquad (2)$$

he anzeigt, daß diese Tangente Oα genau die Diagonale des aus Oa und OB construirten Rechtecks ist.

§. 647.

Die allgemeine Construction des §. 645 ist gleichfalls ungenügend, wenn es sich um die Tangenten an vier Punkten F, G, g, f am Anfange des Gewölbes handelt; denn weil in diesen Punkten die Berührungs- ıen beider Flächen vertikal werden, so ist ihr Durchschnitt eine Vertikale, welche zwar den Kreuzbogen Raume berührt, deren Horizontalprojection sich aber auf einen einzigen Punkt reduzirt, und also nichts zur ümmung derjenigen Tangente beiträgt, welche die ebene Curve GOf im Punkte G berührt. Nimmt man ch zur Formel (1) seine Zuflucht, so erhält diese für den Punkt G folgende Gestalt:

$$\text{tang. } \theta'' = \frac{\frac{G\omega}{A\omega} \cdot OA}{OB} = \frac{GB}{GA}. \qquad (3)$$

*) So wird der Punkt genannt, in welchem zwei oder mehrere Curvenäste sich schneiden.
Anmerkung des Uebersetzers.

Denn die Bögen OA und GB ſind ähnlich und ihren Halbmeſſern Aω und Gω proportionirt. Hieraus folgt offenbar, daß die Tangente an G die Diagonale des aus GA und dem rectifizirten Bogen GB conſtr Rechtecks iſt; die Operation iſt alſo äußerſt einfach und wurde für den Punkt F vermittelſt des aus FD Fβ = FB conſtruirten Rechtecks wirklich ausgeführt.

§. 648.

Das nämliche Verfahren läßt ſich auch mit Vortheil auf jeden andern Punkt M anwenden; denn man in der allgemeinen Formel (1) ſtatt $\frac{OP}{PM}$ das Verhältniß von OA zu OB = AG, das erſterem gleic nach §. 643, ſo erhält man

$$\text{tang. } \theta = \frac{\frac{M\omega}{P\omega}}{PM} \cdot OP = \frac{MI}{MP}; \qquad (4).$$

woraus hervorgeht, daß man die Tangente LMK unmittelbar erhalten kann, wenn man aus MP und rectifizirten Bogen MI ein Rechteck conſtruirt, deſſen Diagonale alsdann die geſuchte Tangente iſt. Hier u blos die Hälfte dieſes Rechtecks verzeichnet, indem PL = MI gemacht und LM gezogen wurde.

Achter Abschnitt.

Von der Krümmung der Linien und Flächen.

Erstes Kapitel.

Von der Krümmung und den Evoluten krummer Linien.

§. 649.

Zwischen einer Curve und ihrer Tangente, welche im Allgemeinen nur ein einziges Element gemeinschaftlich haben, findet, wie man sagt, eine Berührung erster Ordnung statt; da man aber, in gewissen Fällen, es mit Linien zu thun hat, die mit der gegebenen Curve in innigerer Berührung stehen, als die bloße Tangente, so unterscheidet man solche mehr oder minder innige Berührungen dadurch, daß man sagt: zwischen irgend zwei Curven, sie seien eben oder nicht, finde eine Berührung der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung statt, je nachdem sie ein, zwei, drei, ... nächst aufeinanderfolgende Elemente gemeinschaftlich haben.

§. 650.

Die Berührung zweiter Ordnung, welche am häufigsten in der Anwendung vorkömmt, bezeichnet man gewöhnlich durch das Wort Oskulation, und zwei Curven, zwischen welchen Osculation statt findet, haben also zwei Elemente gemeinschaftlich. Um sich dieses durch ein Beispiel klar zu machen, das auch in der Folge von Nutzen sein wird, betrachte man irgend eine Curve AMB; nachdem man nun diese in gleiche Elemente*) getheilt hat, errichte man in den Mitten von MM′ und M′M″ die Normalen KO und K′O, beide in der Ebene MM′M″, welche die übrigen Elemente von AMB nicht enthält, wenn diese Curve nicht eben ist. Alsdann wird der Punkt O, in welchem diese Normalen sich schneiden, der Mittelpunkt eines Kreises $\alpha M \beta$ sein, welcher, indem er durch die drei Punkte M, M′, M″ geht, auch die beiden Elemente MM′ und M′M″ mit MB gemeinschaftlich hat, und daher der Oskulationskreis dieser Curve für den Punkt M ist. Sein Halbmesser ist einer der drei gleichen Abstände OM, OM′, OM″; statt ihrer aber kann man auch eine der beiden gleichen Normalen OK und OK′ annehmen, weil der Unterschied nur ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist (§. 197). Fig. 129.

§. 651.

Man sieht hieraus, daß es für jeden Punkt M der Curve AMB nur einen einzigen Oskulationskreis gibt, während der nämliche Punkt unendlich viele Berührungskreise erster Ordnung zuläßt; aber der Oskulations-

*) Wenn diese Elemente auch ungleich, dabei aber nur immer unendlich klein sind, so finden dieselben Schlüsse statt, wie leicht durch den Calcul bewiesen werden kann. Um jedoch die Beweise einfacher zu machen, wird hier immer angenommen, die Elemente seien gleich.

kreis verändert sich der Lage und Größe nach von einem Punkt M' zum andern M'' ꝛc., weil alsdann wieder eine ähnliche Construction, wie vorhin für die beiden nächstfolgenden Elemente M'M'' und M''M''', M''M'''' und M'''M''''',.... statt findet, wobei sich der Halbmesser KO in K'O', K''O'',... verwandelt.

§. 652.

Die Ebene des Oskulationskreises, welche keine andere als die der beiden aufeinanderfolgenden Elemente MM' und M'M'', oder auch die Ebene der beiden unendlich nahen Tangenten MT und M'T' ist, heißt die Oskulationsebene der Curve AMB für den Punkt M; und wenn letztere nicht eben ist, so verändert sich die Oskulationsebene von einem Punkt der Curve AMB zum andern. Zwei solche aufeinanderfolgende Oskulationsebenen TM'T' und T'M''T'' schneiden sich immer in dem zwischenliegenden Element M'M''.

§. 653.

Fig. 129. Was die Krümmung der Linie AMB im Punkte M betrifft, so wird solche, wie schon in §. 198 gesagt worden ist, durch den Winkel TM'T', den zwei unendlich nahe Tangenten mit einander bilden, gemessen, weil dieser Winkel, der gewöhnlich der Contingenz- oder Krümmungswinkel heißt, deutlich zeigt, um welche Größe das Element M'M'' von seiner ursprünglichen Richtung M'T abgelenkt werden mußte, um sich der gebrochenen Linie MM'M''M'''.... anzufügen.*) Nun ist der Winkel TM'T' gleich KOK', und da dieser letztere durch den mit einem als Einheit angenommenen Halbmesser beschriebenen Bogen ε gemessen wird, während er einen Bogen KM'K' des Oskulationskreises umspannt, dessen Halbmesser $OK = \varrho$ ist, so hat man für die Krümmung im Punkt M den Ausdruck:

$$\varepsilon = \frac{KM'K'}{OK} = \frac{ds}{\varrho}.$$

Da aber angenommen wurde, die Curve sei in lauter gleiche Elemente getheilt worden, so ist die Größe ds constant für alle Punkte der Curve, und man kann also sagen, die Krümmung ändere sich von einem Punkt zum andern, im umgekehrten Verhältniß des Halbmessers $OK = \varrho$, welcher aus diesem Grunde der Krümmungshalbmesser der Curve für den Punkt M heißt. Der zu ihm gehörige Kreis heißt daher wohl auch der Krümmungskreis, und dessen Ebene die Krümmungsebene.

Um nun aber das absolute Maß für die Krümmung einer Linie zu erhalten, und um dasselbe auch auf zwei verschiedene Curven anwendbar zu machen, in welchen die Elemente zwar unendlich klein, aber doch in der einen Curve größer oder kleiner als in der andern sein, und sogar in einem bestimmten und nothwendigen Verhältnisse stehen könnten, darf man nicht die absolute Größe des Contingenzwinkels ε, sondern vielmehr sein Verhältniß zum Element ds betrachten, weil nur für zwei Bogen von gleicher Länge der äußere Winkel, den die beiden äußersten Tangenten mit einander bilden, die stärkere aber schwächere Krümmung des einen Bogens in Beziehung auf den andern genau anzugeben vermag. So sind z. B. in zwei concentrischen Kreisen, deren einer einen doppelt so großen Halbmesser hat als der andere, und deren beide Umfänge in dieselbe Anzahl gleicher Elemente getheilt sind, die den nämlichen Halbmessern entsprechenden Contingenzwinkel einander gleich, obschon die Krümmung der beiden Kreise offenbar eine verschiedene ist; da nun aber die Elemente der größern Peripherie doppelt so lang sind als die der kleineren, so drückt offenbar das Verhältniß $\frac{\varepsilon}{ds}$ für den größeren Kreis ein

*) Es ist wohl zu bemerken, daß der Contingenzwinkel TM'T' demjenigen Winkel gleich ist, den die beiden aufeinanderfolgenden Normalebenen mit einander bilden, weil diese Ebenen senkrecht auf den Mitten der beiden Elemente MM' und M'M'' stehen.

doppelt schwächere Krümmung aus als für den kleineren. Hieraus aber folgt, daß der wahre Ausdruck für die Krümmung irgend einer Curve stets durch das Verhältniß

$$\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\varrho}$$

gegeben ist, wo ϱ den Halbmesser des Oskulations- oder Krümmungskreises für den gegebenen Punkt bezeichnet.

§. 654.

Alles, was hier gesagt wurde, gilt sowohl für ebene als auch für windschiefe Curven: letzterer Ausdruck, den auch Vallée braucht, wird hier absichtlich statt des Ausdrucks „Curven von doppelter Krümmung" angewendet, theils der Kürze wegen, theils aber auch um das Wort Krümmung nicht in unrichtigem Sinne anzuwenden. Denn eine Curve, welche nicht eben ist, hat in der That nur eine einzige Krümmung, deren Größe sich ganz nach Anleitung des vorigen Paragraphen bestimmen läßt; aber außerdem hat sie noch eine Biegung (flexion) oder vielmehr Windung (torsion), die man sich dadurch hervorgebracht denken kann, daß eine der beiden aufeinanderfolgenden Oskulations- oder Krümmungsebenen $TM'T'$ und $T'M''T''$ sich um das gemeinschaftliche Element $M'M''$ drehte; so daß also in einer windschiefen Curve die Windung in jedem Punkte gemessen wird durch den Winkel der beiden nächst aufeinanderfolgenden Oskulationsebenen. Macht man nun diesen Winkel dadurch gleich Null, daß man die Ebene $T''M''T''$ um $M'M''$ auf die Ebene $TM'T'$ aufklappt, so verschwindet die Windung, und die Curve wird eben in der nächsten Umgebung des betrachteten Punktes, ohne daß ihre Krümmung dadurch stärker oder schwächer würde, weil die Coningenzwinkel $TM'T'$ und $T'M''T''$ die nämlichen bleiben; dagegen aber kann man, ohne die geringste Aenderung in der Lage der Oskulationsebenen oder in der Windung der Curve vorzunehmen, die Krümmung der Curve indern durch eine größere oder geringere Neigung, die man den beiden Elementen MM' und $M'N''$ gibt: Krümmung und Windung einer Linie sind also ganz von einander unabhängige Modificationen. Was aber den geometrischen Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte betrifft, so besteht hierin zwischen den ebenen und windschiefen Curven ein wesentlicher Unterschied wie sogleich gezeigt werden soll.

§. 655.

Für einen und denselben, auf irgend einer Curve gegebenen Punkt gibt es immer unendlich viele Normalen; Fig. 129.
über die Normale KO, in welcher der zu M gehörige Krümmungshalbmesser liegt, muß (§. 650) in der Krümmungsebene $MM'M''$ sich befinden, und mag durch den Namen Hauptnormale unterschieden werden. Ist nun die Curve AMB eben, so liegen alle zu den verschiedenen Punkten M, M', M'' gehörigen Hauptnormalen in ihrer Ebene, und ihre aufeinanderfolgenden Durchschnitte bilden eine Curve $OO'O''\ldots$, an welcher jene verschiedenen Normalen Tangenten sind; woraus folgt, daß ein über diese Evolute (welche eine Umhüllende der Normalen ist) hergespannter Faden, wenn man ihn abwickelte, mit seinem Endpunkte K die Curve $AM'M''B$ beschreiben würde.

§. 656.

Ist dagegen die gegebene Curve windschief, so schneiden die aufeinanderfolgenden Haupt- Fig. 130.
normalen, oder Krümmungshalbmesser, sich nicht mehr. Man denke sich, um dieses einzusehen, durch die Mitten K, K', K'',... der verschiedenen Elemente die Normalebenen PQS, $P'Q'S'$, $P''Q''S''\ldots$ gelegt, welche sich zu zwei und zwei in den Geraden QS, $Q'S'$,.... schneiden und also eine entwickelbare (§. 186) und alle diese Ebenen umhüllende Fläche bilden. Schneidet man nun die Ebenen P und P' durch die Krümmungsebene $MM'M''$, welche senkrecht auf jenen beiden steht, so erhält man als Durchschnitte die beiden Normalen KO und

K'O, welche offenbar den Mittelpunkt O des dem Punkte M entsprechenden Oskulationskreises bestimmen, und von denen die erste der zu diesem Punkte *) gehörige Krümmungshalbmesser ist. Schneidet man eben so die Normalebenen P' und P'' durch die zweite Krümmungsebene M'M''M''', so erhält man als Durchschnitte die Normalen K'O' und K''O', deren erstere wieder der Krümmungshalbmesser für den Punkt M' ist. Dieser Halbmesser K'O' aber fällt nicht mit der vorigen Normale K'O zusammen; denn weil diese Geraden aus dem Durchschnitte einer und derselben Ebene P' mit zwei verschiedenen Krümmungsebenen hervorgehen, so schneidet K'O' die Gerade QS in einem von O verschiedenen Punkt I; da also die beiden aufeinanderfolgenden Krümmungshalbmesser KO und K'O' keinen gemeinschaftlichen Punkt haben auf dem Durchschnitt QS der Ebenen P und P', in welchen sie beide enthalten sind, so können sie sich auch nicht schneiden.

§. 657.

Da also die Krümmungsmittelpunkte O, O', O'',... diesesmal nicht aus den aufeinanderfolgenden Durchschnitten der Krümmungshalbmesser KO, K'O', K''O'',... sich ergeben, so kann die Curve, welche man durch alle jene Mittelpunkte zieht, auch nicht diese Halbmesser zu Tangenten haben; und diese können also auch nicht als die durch Abwicklung sich ablösenden Theile eines über die Curve OO'O''.... hergespannten Fadens betrachtet werden. Folglich ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer windschiefen Curve AMM'M''... keine Evolute dieser letzteren.

§. 658.

130. Dessen ungeachtet hat die windschiefe Fläche AMM'M''... unendlich viele Evoluten, wie Monge gezeigt hat. Zieht man nämlich in der ersten Normalebene P eine Gerade KD willkürlich, welche zugleich eine Normale der gegebenen Curve ist, und QS in einem Punkte D schneidet; zieht man ferner durch die Punkte K' und D die Gerade K'DD', welche der zweiten Normalebene P' angehört; hierauf die Gerade K''D'D'' in der Ebene P'' u. s. w.; so erhält man aus den aufeinanderfolgenden Durchschnitten dieser Normalen eine Curve DD'D''D'''.... an welcher sie Tangenten sind, und welche zu Beschreibung der Linie AMM'... dienen kann durch Abwicklung eines über diese Evolute DD'D''... hergespannten Fadens. Um dieses einzusehen, darf man nur bedenken, daß die Theile DK und DK' der Tangenten an dieser Evolute unter sich gleich sind, oder auch, daß der Punkt D gleichweit von den drei Punkten M, M', M'' entfernt ist; dieses aber folgt daraus, daß die Gerade QS, als der Durchschnitt der beiden Ebenen P und P', welche senkrecht auf den Mitten der gleichen Elemente MM' und M'M'' stehen, in allen ihren Punkten gleichweit von M, M' und M'' entfernt ist, weßhalb sie auch die Pollinie des Bogens MM'M'' heißt; die Entfernungen DK, D'K', D''K'',.... sind die Halbmesser der Evolute, die man aber nicht mit den Krümmungshalbmessern KO, K'O', K''O''... verwechseln darf. Da nun die erste Normale KD ganz willkürlich in der Ebene P gezogen wurde, so kann man also, wenn man die Richtung dieser Normale ändert, unendlich viele Evoluten erhalten, die alle in der entwickelbaren Fläche liegen, welche die Normalebenen P, P', P'',.... der Curve AMM'M''... umhüllt.

§. 659.

Diese Fläche, welche der Ort aller Evoluten der Curve AMM'..., oder vielmehr der Ort aller Pole dieser Linie ist, hat zu geradlinigen Erzeugenden die aufeinanderfolgenden Durchschnitte QS, Q'S', Q''S'',... der Normalebenen; und diese Geraden bilden, indem sie sich zu zwei und zwei schneiden, die Wende

*) Es wird später von Nutzen sein, wenn man hier bemerkt, daß es auf das Nämliche herauskäme, wenn man aus K ein Senkrechte KO auf die Erzeugende QS der die Normalebenen umhüllenden Fläche fällte.

e UV dieſer entwickelbaren Fläche. Ferner, weil jede Erzeugende QS ſenkrecht iſt auf der entſprechenden mmungsebene MM'M'' und durch den Krümmungsmittelpunkt O geht, in welchem die beiden gleichen Nor- n KO und K'O ſich ſchneiden, ſo müſſen alſo die Winkel KDO und K'DO, welche zwei Tangen- der Evolute mit der zwiſchenliegenden Erzeugenden QS bilden, einander gleich ſein; und kann folglich behaupten (§. 187), daß jede Evolute DD'D'' .... bei Entwicklung der die Normalebenen üllenden Fläche ſich in eine gerade Linie verwandle. Daraus aber folgt (§. 187), daß eine ſolche Evo- die kürzeſte Linie iſt, die man auf der entwickelbaren Fläche zwiſchen zweien ihrer Punkte ziehen kann; mithin wird ein in K befeſtigter Faden, den man frei über eine ſolche Fläche herſpannt, von ſelbſt die Form : ihrer Evoluten KDD'D''... annehmen, weil er ſeiner Elaſtizität wegen nicht eher auf der Fläche im chgewicht bleiben kann, als bis er ſich in der kürzeſten Linie über dieſelbe hergelegt hat.

„Hieraus erſieht man," ſagt Monge, „wie durch eine ſtetige Bewegung irgend eine Curve von doppelter mmung erzeugt werden kann. Denn hat man die entwickelbare Fläche, welche von allen Normalebenen der ve berührt wird, ausgeführt, und ſpannt von dem im Raume gegebenen Punkt, durch welchen die Curve gehen zwei die Fläche berührende Fäden aus, windet ſie um dieſelbe herum und befeſtigt ihre andern Endpunkte, wird der Vereinigungspunkt der beiden Fäden, indem er ſich mit der Berührungsebene der Fläche zugleich egt, ohne weder über den einen noch den andern der Fäden hinzugleiten, durch ſeine Bewegung die vor- bene Curve beſchreiben."

§. 660.

Iſt die Curve AMM'.... ſphäriſch, d. h. liegt ſie ganz auf der Oberfläche einer Kugel von belie- Fig. 130.
m Halbmeſſer, ſo müſſen nothwendig alle Normalebenen P, P', P''.... durch den Mittelpunkt dieſer Kugel n, und ihre Umhüllungsfläche, d. h. der Ort aller Evoluten der Curve AMM'.... reduzirt ſich in dieſem auf einen Kegel, deſſen Scheitel im Mittelpunkte der Kugel ſich befindet. Dieſer einzige Punkt kann alſo eine beſondere Evolute der Curve AMM'... betrachtet werden, und in der That wird ein in demſelben ſtigter Faden ſich, ohne daß er ſich verlängert, ſo um dieſen Punkt drehen können, daß ſein anderer End- t ſtets in der Curve AMM'... bleibt, deren Punkte alle vom Mittelpunkte gleich weit entfernt ſind.

§. 661.

Wäre endlich die Curve AMM'... eben, ſo ſtänden alle Normalebenen P, P', P'', ... ſo wie auch ihre inanderfolgenden Durchſchnitte QS, Q'S', ... ſenkrecht auf der Ebene dieſer Curve; die Umhüllungsfläche r Normalebenen verwandelte ſich alſo in einen Cylinder, auf welchem ſich alle Evoluten befänden, che die ebene Curve AMM'... noch zuließe. Ferner wäre alsdann jede dieſer Evoluten DD'D''... Schraubenlinie; denn ihre verſchiedenen Tangenten, oder die Evolutenhalbmeſſer KD, K'D'... bildeten er gleiche Winkel (§. 659) mit den parallelen Geraden QS, Q'S', ... d. h. mit den Erzeugenden des Cylin- . Ueberdieß würde der Ort der Krümmungsmittelpunkte OO'O''... wieder eine Evolute den, weil dieſe Curve der ſenkrechte Durchſchnitt des Umhüllungscylinders wäre, und man ſie nun als eine raubenlinie betrachten könnte, deren Gang gleich Null iſt; aber zugleich wäre dieſe Linie OO'O''... unter i Evoluten der Curve AMM' die einzige ebene. So hat z. B. in Figur 96 die Evolvente des Kreiſes CDL... zur ebenen Evolute den Kreis αβγδλ...., während ſie zu windſchiefen Evoluten alle die Schrau- linien hat, welche, wie (Aβγδλ... A'β'γ'δ'λ'...) ihren Anfang im Punkt (A, A') nehmen.

§. 662.

Man bemerke hier, daß der Krümmungskreis αMβ der ebenen Curve AMB dieſe gewöhnlich ſchneidet, Fig. 129.

d. h. daß er links von M ſich außerhalb und rechts von dieſem Punkte ſich innerhalb der Curve befindet. D der geradlinige Theil OK des über die Evolute OO'O" ... hergeſpannten Fadens wird mit der Abwickl dieſes letzteren beſtändig größer; mithin ſind die Krümmungshalbmeſſer, welche OK vorangehen, kleiner als d Gerade, und diejenigen, welche auf ſie folgen, ſind größer; folglich umfängt der Kreisbogen Mα den Bogen M der gegebenen Curve, während M"β von M"B umfangen wird, wenigſtens in der Umgegend des betracht Punktes M. Wenn jedoch die Evolute einen Wendepunkt hat, wie es bei den Scheiteln einer Ellipſe vorkor (Fig. 76), ſo wird der Krümmungshalbmeſſer ein Minimum oder ein Maximum, und der Krümmungsk befindet ſich ſowohl rechts als links vom Berührungspunkte entweder innerhalb oder außerhalb der Curve. dieſem beſondern Falle findet zwiſchen dem Krümmungskreiſe und der Curve eine Berührung dritter Ordnung ſt

§. 663.

§. 130. Ein ähnlicher Umſtand kommt bei der Krümmungsebene MM'M" einer windſchiefen Curve AMB v Gewöhnlich nämlich durchſchneidet dieſe Ebene die Curve, indem ſie den Bogen MA auf ihrer einen, Bogen M"B hingegen auf ihrer andern Seite läßt, weil die Windung oder Drehung der Elemente, welche n §. 654 durch die verſchiedene Neigung der Krümmungsebenen hervorgebracht wird, im Allgemeinen in dieſer R tung beharrt. Wegen der Stetigkeit der gegebenen Curve aber ändert die Neigung der Krümmungsebene nur um unendlich kleine Winkel; kommt alſo in der Curve ein beſonderer Punkt vor, in welchem jene Wind ihre Richtung ändert, ſo muß für den Moment dieſer Aenderung der Drehungswinkel Null werden; in di Gegend der Curve liegen alſo drei aufeinanderfolgende Elemente in einer und derſelben Krümmungsebene, we in dieſem Falle entweder ganz ober- oder ganz unterhalb *) der Curve AMB liegt.

§. 664.

Fig. 51. **Aufgabe. Die Krümmungsebene für einen auf einer windſchiefen Curve gegebenen Pu zu conſtruiren.**

Es ſei N der auf der windſchiefen Curve VNU gegebene Punkt, der durch ſeine beiden Projectionen ſtimmt ſein muß. Wenn man nun, um näherungsweiſe zwei unendlich nahe Tangenten zu erhalten, eine d den Punkt N und eine andere ihr ſo nahe als möglich zöge, ſo würde man aus dieſen zwei Geraden Spuren der Ebene, in welcher ſie liegen, nur ſehr ungenau erhalten. Es iſt daher beſſer, verſchiedene Tange an die Curve VU zu conſtruiren: eine für den Punkt N, und die übrigen für andere Punkte der Curve, we in mäßigen Entfernungen vor und hinter N liegen. Hierauf ſucht man die Spuren dieſer Tangenten, z. B. der Horizontalebene, und verbindet alle dieſe Punkte durch eine ſtetige Curve ALD, welche die Spur der wickelbaren Fläche ſein wird, die der Ort aller an die Curve VU gezogenen Tangenten iſt. Da nun bekan lich (§. 181) die Berührungsebene dieſer Fläche zugleich die Krümmungsebene ihrer Wendecurve iſt, ſo darf n nur die Tangente Lθ an die Spur ALD ziehen, um die geſuchte Krümmungsebene NLθ zu erhalten.

§. 665.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer für einen auf einer windſchiefen Curve gegeben Punkt zu conſtruiren.

Es ſei M der gegebene Punkt auf der windſchiefen Curve, die A heißen möge: man conſtruire nun d

*) Daß hier unter „ober- und unterhalb" überhaupt eben die eine und die andere Seite der Krümmungsebene zu verſtehe ſei, braucht wohl kaum bemerkt zu werden.

Anmerkung des Ueberſetzers.

orhin, die Krümmungsebene π für den Punkt M, und projicire auf dieselbe die Curve A, welche in eine Linie
sich verwandeln wird, die offenbar zwei Elemente mit A gemein hat. Da nun die Krümmung von A in dem
punkte M die nämliche ist, wie die von B in eben diesem Punkte, so ist die Aufgabe nun darauf zurückgeführt,
en Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve B zu finden.

§. 666.

Um nun diese letztere Aufgabe aufzulösen, sei MN die Normale von B in dem gegebenen Punkte M, und Fig. 141
MC, MC′, ... seien verschiedene Sehnen, welche von eben diesem Punkte ausgehen. Nun errichte man auf
er Mitte der Sehne MC auf diese eine Senkrechte IP, und aus dem Punkte P, wo letztere die Normale MN
chneidet, errichte man auf diese abermals eine Senkrechte $P\alpha = MC$; wiederholt man hierauf ähnliche Construc-
ionen für die andern Sehnen, so erhält man eine Curve $\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'$, welche die Normale MN in einem Punkte
) schneidet, durch welchen der Krümmungshalbmesser MO der gegebenen Linie bestimmt wird. Denn wie die
Sehne $MC^{\prime\prime}$ immer kleiner wird, so nimmt auch die Ordinate $P''\alpha''$ fortwährend ab, und die Senkrechte $I''P''$
nähert sich immer mehr der Normale an der Curve MB; mithin wird der Punkt O, in welchem die Hilfslinie
$\alpha'\beta$ die MN schneidet, der Durchschnittspunkt dieser Normale mit einer ihr unendlich nahen Normale sein; folg-
ich wird der Krümmungshalbmesser für den Punkt M der Linie B die Länge MO haben. *)

§. 667.

Aufgabe. Es ist irgend eine Curve A gegeben; man soll eine ihrer Evoluten und den Ort der Krümmungsmittelpunkte finden.

Man construire verschiedene Normalebenen für ziemlich nahe genommene Punkte dieser Curve; und nachdem man ihre Spuren auf den beiden Projectionsebenen verzeichnet hat, beschreibe man eine Curve α, welche alle horizontalen, und hierauf eine Curve β, welche alle vertikalen Spuren berührt. Diese beiden Curven α und β werden offenbar die Spuren der Fläche Σ sein, welche der Ort aller Evoluten von A ist (§. 659), und man kann verschiedene Erzeugende G, G′, G″, ... dieser entwickelbaren Fläche erhalten, wenn man zu zwei und zwei die Punkte verbindet, in welchen die Curven α und β durch einerlei Normalebenen berührt werden. Nun ziehe man aus einem beliebig auf der Curve A genommenen Punkte M eine Tangente MD an die Fläche Σ und entwickle hierauf Σ auf irgend eine Ebene, auf welcher die gesuchte Evolute, welche nach §. 659 eine gerade Linie werden muß, nichts Anderes sein wird, als die unbestimmte Verlängerung von MD. Bemerkt man nun die Punkte, in welchen diese Gerade MD jede der Erzeugenden γ, γ', γ'', ... der entwickelten Σ durchschneidet, und trägt diese Punkte auf die ursprünglichen Erzeugenden G, G′, G″, ... so erhält man die Evolute, welche den Halbmesser MD berührt. Aendert man nun diese Gerade, welche auf vielerlei Art gezeichnet werden konnte, so erhält man auch andere Evoluten der Curve A.

§. 668.

Fällt man vom Punkte M eine Senkrechte auf die Erzeugende G, welche sich in der zu M gehörigen Normalebene befindet, so wird der Fußpunkt dieser Senkrechten der Krümmungsmittelpunkt von A für den Punkt M sein (§. 656, Anmerk.), und den Ort aller dieser Krümmungsmittelpunkte erhält man, wenn man die nämliche Construction für verschiedene Punkte M′, M″, ... der gegebenen Linie A wiederholt.

---

*) Diese Methode ist aus der *Géometrie des courbes*, von Bergery; sie hat den Vortheil, daß die Hilfscurve die gegebene Gerade unter einem rechten Winkel schneidet, wodurch die Lage des gesuchten Punktes genauer bestimmt wird.

Dieſe Operationen ſind gewöhnlich ſehr mühſam; doch laſſen ſie ſich manchmal vereinfachen, wie in folgen dem Beiſpiel, das überhaupt zu näherer Erläuterung der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen dienen wird

§. 669.

Aufgabe. Es iſt eine in DMPGQF projicirte ſphäriſche Evolvente gegeben; man ſoll de Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte und eine ihrer Evoluten finden.

101. Aus §. 493 iſt bekannt, daß dieſe beſondere Art von Epicycloiden erzeugt wird, durch einen Punkt m eine beweglichen Kreiſes S″, deſſen Ebene über einen feſten Kegel S′AE hinrollt, während ſein Mittelpunkt ſtet mit dem Scheitel dieſes Kegels zuſammenfällt; ferner weiß man, aus §. 495, daß die Normalebene dieſer Cur für irgend einen Punkt (M, M′) die Ebene S′AV iſt, welche den beweglichen Kreis enthält und den feſt Kegel S′AE berührt. Dieſer Kegel iſt alſo die Umhüllungsfläche aller Normalebenen, von denen im §. 6 die Rede war, und der Ort aller Evoluten und Krümmungsmittelpunkte der ſphäriſchen Evolvente DMPGQ Fällt man daher (§. 656, Anmerk.) aus (M, M′) die Senkrechte (MR, M′) auf die Erzeugende S′A, in welch die Normalebene den Kegel berührt, ſo iſt der Fußpunkt (R, M′) dieſer Senkrechten der Krümmungsmittelpun für den Punkt (M, M′) der Curve, und RM iſt der Krümmungshalbmeſſer nach ſeiner wahren Größe. Für d Projection N_5 des erzeugenden Punktes iſt die Berührung des beweglichen Kreiſes in A_5 angelangt; mithin die auf die Erzeugende OA_5 gefällte Senkrechte N_5R_5 der Krümmungshalbmeſſer und R_5 die Projection d Krümmungsmittelpunktes: die vertikale Projection wäre leicht zu finden. Für den Punkt P endlich, welcher ein Viertelsumdrehung des beweglichen Kreiſes entſpricht, findet man als Krümmungshalbmeſſer PO gleich S″. auf dieſe Weiſe fortfahrend erhält man als Horizontalprojection des Ortes aller Krümmungsmittelpunkte ei Curve $DRR_5OR_9G\ldots O\ldots F$ mit doppeltem Knoten. Sie iſt hier, um die Figur nicht verwirrt zu mache nicht ganz ausgezogen worden, würde aber zweimal durch den Punkt O gehen; dem Theil von ihr, der in OI GO projicirt iſt, entſpricht ein Bogen auf dem obern Kegelmantel.

§. 670.

Statt der vertikalen Projection, deren Ausführung hier der Deutlichkeit der Figur Eintrag gethan hät conſtruire man auf der Ebene des beweglichen Kreiſes die Lagen, welche nach einander alle Krümmungsmitt punkte einnahmen. Zieht man deßhalb die Halbmeſſer $S''a_4$, $S''a_5$, $S''a_6$, . . ., welche die Erzeugenden da ſtellen, längs deren der Kegel nach einander von der Ebene des beweglichen Kreiſes berührt wird, und fäl man auf dieſe aus m die Senkrechten mr_4, mr_5, mr_6, . . . ſo iſt nach dem Obigen leicht einzuſehen, da dieſe Senkrechten genau die Längen der verſchiedenen Krümmungshalbmeſſer ſind, und daß ihre Fußpunkte, welch offenbar eine Kreisperipherie bilden, nach einander mit den wahren Krümmungsmittelpunkten der ſphäriſch Evolvente zuſammenfallen werden, wenn man den Kreis S″A auf dem Kegel S′AE rollen läßt. Das Nämli wäre es, wenn man die Ebene dieſes Kreiſes auf den Kegel hinböge, welche Operation das Umgekehrte v der Entwicklung der Kegelfläche wäre. Der Kreis mrr_4r_5S'' kann alſo betrachtet werden als die Verwan delte des Orts der Krümmungsmittelpunkte, die man erhält, wenn man den Kegel S′AE entwickelt, der di dieſe Krümmungsmittelpunkte wirklich enthält.

§. 671.

Die Evolute der ſphäriſchen Evolvente. Aus §. 659 iſt bekannt, daß jede Evolute einer Cur bei Entwicklung der die Normalebenen umhüllenden Fläche ſich in eine gerade Linie verwandelt, und daß al eine ſolche Evolute die Minimumscurve iſt, welche man zwiſchen zweien ihrer Punkte ziehen kann. Wenn m daher auf dem in S″ aufgeklappten Kreiſe aus m eine beliebige Gerade $m\alpha\beta\gamma\delta$ gezogen hat, ſo darf man m

Punkte α, β, γ, . . ., in welchen jene Gerade die verschiedenen Halbmesser $S''a_6$, $S''a_7$, $S''a_8$, . . . schneidet, den Kegel S'AE übertragen. Nun ist es leicht die wahren Lagen dieser Halbmesser, oder vielmehr Erzeugenden des Kegels auf den beiden Projectionsebenen darzustellen, und die Längen $S''\alpha$, $S''\beta$, $S''\gamma$, . . . auf sie zu beziehen, wodurch man die Projectionen der gesuchten Evolute erhält. Die Ausführung dieser Construction bleibt dem Leser überlassen.

§. 672.

Aufgabe. Es ist eine kreisförmige Schraubenlinie (ABCDEF . . ., A'B'C'D'E'F' . . .) Fig. 128. eben; man soll den Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte und eine ihrer Evoluten finden.

Nachdem man die Tangente (ET, E'T') dieser Schraubenlinie gezogen hat, construire man die ihr entsprechende Normalebene E'N'N, welche offenbar durch den Halbmesser (OE, E') des Cylinders der Schraubenlinie geht, und mit der Vertikalaxe O einen Winkel bildet, welcher den von der Tangente gebildeten zu einem rechten ergänzt. Da nun letztere Gerade eine constante Neigung hat (§. 450), wo auch der Berührungspunkt (E') auf der Schraubenlinie genommen werden möge, so haben also auch alle Normalebenen dieser Curve eine constante Neigung, und jede derselben geht durch denjenigen Cylinderhalbmesser, der seinen Endpunkt in dem der Schraubencurve betrachteten Punkte hat. Nimmt man folglich an, diese Normalebenen seien für unendlich nahe aber in gleichen Abständen sich befindliche Punkte der Schraubenlinie construirt worden, so schneiden sie sich einander in Geraden, welche alle, in Beziehung auf die Axe, vollkommen symmetrische Lagen haben, d. h. welche alle gleich gegen die Axe geneigt, und gleichweit von ihr entfernt sind. Hieraus aber folgt weiter, dass diese geradlinigen Durchschnitte der aufeinanderfolgenden Normalebenen wieder Tangenten sind, an einer neuen Schraubenlinie, die auf einem senkrechten Cylinder mit kreisförmiger Grundlinie abcde . . ., von der man den Halbmesser noch nicht kennt, verzeichnet ist, und daß daher eben jene Durchschnitte — eine entwickelbare Schraubenfläche bilden (§. 456) — welche der Ort der Pole oder der Ort aller Evoluten (§. 659) der ursprünglichen Schraubenlinie (ABCDE . . ., A'B'C'D'E' . . .) ist.

§. 673.

Um diese Schraubenfläche zu bestimmen, bemerke man, daß ihre horizontale Spur genau die Evolvente des noch unbekannten Kreises abcde . . . sein (§. 453), und die Spuren aller Normalebenen berühren muß. Da nun die zu (A, A') gehörige Normalebene offenbar eine Spur AOI hat, die durch den Mittelpunkt O geht, so muß der Halbmesser OI nothwendig den Anfangspunkt jener Evolvente enthalten, während die senkrecht auf jene stehende Spur N'N dem ersten Umdrehungsviertel dieser Evolvente entsprechen wird; folglich muß seine Entfernung vom Mittelpunkte, nämlich OI, genau einem Viertel der unbekannten Kreislinie abcde . . gleich sein, woraus es nun möglich ist, den Halbmesser Oa dieser Kreislinie zu bestimmen. Hierauf construire man die Schraubenlinie (abcde . . ., a'b'c'd'e' . . .) von der nämlichen Ganglänge wie die ursprüngliche Curve, welche die Wendecurve der gesuchten Schraubenfläche sein wird. Diese Fläche hat nun zur horizontalen Spur die Evolvente anvr des Kreises abcde . . ., und zu Erzeugenden die Tangenten der neuen Schraubenlinie, wie (n, E'N'), (hv, h'v'), welche die auf einanderfolgenden Durchschnitte der unendlich nahen, zur Schraubenlinie (BCD . . ., A'B'C'D' . . .) gehörigen Normalebenen darstellen.

§. 674.

Um den Krümmungshalbmesser dieser letzteren Curve, z. B. für den Punkt (E, E'), zu finden, muß man Fig. 128. in diesem Punkte eine Senkrechte (EOe, E') auf die Erzeugende (en, E'N'), welche in der dem bezeichneten Punkte gehörigen Normalebene liegt, fällen (§. 656, Anmerk.). Da nun diese Senkrechte ihren Endpunkt in

(e, E') hat, und da für jede andere Normalebene sich ähnliche Resultate ergeben, so lassen sich hieraus folgende zwei merkwürdige Lehrsätze ableiten:

1) Jede Schraubencurve (ABCDE ..., A'B'C'D'E' ...) mit kreisförmiger Grundlinie hat zum Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte eine andere Schraubencurve (abcde ..., a'b'c'd'e'), die wie oben bestimmt wird.

2) Der Krümmungshalbmesser der ersten Schraubenlinie ist constant, und gleich der Summe OF + Oe der Halbmesser derjenigen Cylinder, auf welchen jene beiden Schrauben verzeichnet sind.

§. 675.

Durch ähnliche Betrachtungen kann man sich auch überzeugen, daß, umgekehrt, die zweite Schraubenlinie (abcde ..., a'b'c'd'e' ...) zum Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte die erste Schraubenlinie (ABCD ..., A'B'C'D' ...) habe, und daß der Krümmungshalbmesser jener zweiten ebenfalls constant und der Summe Oe + OE gleich sei. Dieses kommt daher, weil die Normalebene E'N'N der ersten Schraubenlinie die Krümmungsebene der zweiten ist (§. 463), und weil ebenso die Normalebene dieser letzteren, nämlich die auf den Tangenten (en, E'N') senkrechte Ebene E'T'T, die Krümmungsebene der ersten Schraubenlinie ist; es findet also ein vollkommenes Wechselverhältniß zwischen diesen beiden Curven statt, und die Contingenz- und Drehungswinkel (§§. 653 und 654 in der einen sind beziehlich gleich den Drehungs- und Contingenzwinkeln in der andern. *)

§. 676.

Um die Größe der Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' dieser beiden Schraubenlinien analytisch auszudrücken, setze man

$$OA = R,\ Oa = r,\ \text{Winkel}\ T' = \omega,\ N' = 90^0 - \omega = \omega',\ O'E' = {}^1/_4\, h;$$

so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck A'δ'a' die Gleichung $r = R \operatorname{tang}^2 \omega$, woraus folgt:

$$\varrho = R + r = R\,(1 + \operatorname{tang}^2 \omega) = R\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}\right)$$

für die erste Schraubenlinie; und für die zweite

$$\varrho = r + R = r\,(1 + \operatorname{tang}^2 \omega') = r\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 r^2}\right)$$

§. 677.

Fig. 128. Nun construire man eine Evolute der Schraubenlinie (ABCD ..., A'B'C'D' ...), indem man zuerst durch einen beliebigen Punkt (E, E') dieser Curve und zwar in der diesem Punkte entsprechende Normalebene E'N'N eine Gerade zieht (§. 658), oder vielmehr eine Tangente an die Umhüllungsfläche der Normalebenen, welche Fläche hier die entwickelbare Schraubenfläche ist, die (abcd ..., a'b'c'd' ...) zur Wendecurve hat. Um symmetrischere Resultate zu erhalten, wähle man für diese erste Tangente den Krümmungshalbmesser (Ee, E'),

*) Dieses Wechselverhältniß zwischen den Contingenz- und Drehungswinkeln findet überhaupt zwischen jeder Curve AMM'M''I (Figur 130.) und der Wendecurve UV derjenigen Fläche statt, welche die Normalebene der ersteren Linie umhüllt. Denn aus §. 649 folgt, daß die Normalebenen P, P', P'', ... die Curve AMM' zugleich Krümmungsebenen an UV sind, während die Krümmungsebenen von AMM', da sie senkrecht auf QS, Q'S', ... stehen, nur parallel mit den Normalebenen von UV sind; aber hieraus folgt gleichwohl, daß die Contingenz- und Drehungswinkel von AMM' beziehlich gleich sind den Drehungs- und Contingenzwinkeln der Curve UV.

und erinnere ſich, daß bei der Entwicklung der Schraubenfläche die geſuchte Evolute eine gerade Linie wird (§. 659), die mit der unbeſtimmt verlängerten (E e, E′) zuſammenfällt. Will man nun dieſe Schraubenfläche auf ihrer Berührungsebene E′N′N entwickeln, ſo muß man (§. 467) die Tangenten (n e, N′E′) und (N α, N′α′) nach n ε und N α″ aufklappen, und hierauf in ihren Endpunkten zwei Senkrechte ε ω und α″ ω errichten, welche durch ihr Zuſammentreffen den Mittelpunkt ω und den Halbmeſſer ω ε*) des Kreiſes ε λ beſtimmen, in welchen ſich die Schraubenlinie (a b c d . . . , a′ b′ c′ d′ . .) verwandeln wird; alsdann wird nach dieſer Entwicklung die unbeſtimmte Gerade ω ε π ſich als die Verwandelte der geſuchten Evolute darſtellen. Was die Lage betrifft, welche irgend eine Erzeugende (h v, h′ v′) der Schraubenfläche bei der Entwicklung dieſer letztern annimmt, ſo erhält man ſie, wenn man den Kreisbogen ε η ſo lang nimmt als den Schraubenliniebogen (e h, E′ h′), eine Länge, welche gegeben iſt durch die Hypotenuſe des Dreiecks E′ η′ η″, deſſen Grundlinie E′ η′ dem horizontalen Bogen e h gleich iſt; alsdann wird die geſuchte Erzeugende ſich als die Tangente η π darſtellen. Da nun dieſe letztere die Verwandelte ω ε der Evolute im Punkte π ſchneidet, ſo handelt es ſich jetzt darum, die Entfernung η π auf die urſprüngliche Erzeugende (h v, h′ v′) zurückzutragen; man nehme deßhalb die Hypotenuſe E′ π″ = η π, ſo wird die Grundlinie E′ π′ dieſes neuen rechtwinkligen Dreiecks, wenn man ſie von h nach p trägt, die Horizontalprojection p und hieraus die Vertikalprojection p′ eines Punktes der geſuchten Evolute liefern, für welche man, ſo fortfahrend, die Curve (e p x, E′ p′ x′) erhält.

§. 678.

Ein in der Richtung (x p e E, x′ p′ e′ E′) über dieſen Curvenaſt hergeſpannter Faden wird alſo mit ſeinem Endpunkt (E, E′) den obern Theil (E F G H . . . , E′ F′ G′ H′ . . .) der gegebenen Schraubenlinie beſchreiben, wenigſtens bis zu einer gewiſſen Grenze, die nachher beſtimmt werden wird: und der Evolutenhalbmeſſer, der ſeinen Endpunkt in (p, p′) hat, wird die Tangente (H p, H′ p′) ſein. Was den untern Theil (E D C B . . . , E′ D′ C′ B′ . . .) betrifft, ſo erhält er zur Evolute einen andern Aſt (e P X, E′ P′ X′), den man wie den erſten conſtruiren, oder den man auch unmittelbar erhalten kann, wenn man Punkte (P, P′) ſucht, die mit (p, p′) eine ſymmetriſche Lage haben.

§. 679.

Auf der Entwicklung der Schraubenfläche findet ſich eine Tangente λ ϱ, welche parallel iſt mit der Verwandelten ω ε π der Evolute: trägt man daher den Punkt λ auf die Schraubenfläche zurück, indem man den Kreisbogen e h l der Grundlinie E′ λ′ des rechtwinkligen Dreiecks E′ λ″ λ′ gleich macht, deſſen Hypotenuſe der rectificirte Bogen ε λ iſt, ſo wird die Erzeugende (l r, l′ r′) der Schraubenfläche der Tangente λ ϱ entſprechen und wird die Evolute (e p x, E′ p′ x′) im Unendlichen ſchneiden. Deſſen ungeachtet iſt ſie keine Aſymptote dieſes Curvenaſtes, denn eine Aſymptote muß die Curve nicht nur in einem unendlich fernen Punkt treffen, ſondern ſie auch berühren; da nun an dem Punkte (p, p′), der auf der Erzeugenden (h v, h′ v′) liegt, (H p, H′ p′) die Tangente war, ſo muß für den unendlich fernen Punkt auf (l r, l′ r′) die wahre Tangente oder die Aſymptote von dem Punkte (L, L′), der dem Punkte (l, l′) diametral entgegenliegt, ausgehen, und wird alſo die mit (l r, l′ r′) parallele Gerade (L z, L′ z′) ſein.

*) Dieſer Halbmeſſer ω ε muß gleich E e ſein, weil dieſer der Krümmungshalbmeſſer der Schraubenlinie (a b c d . . . , a′ b′ c′ d′ . . .) iſt (§. 674) und weil dieſe Curve ihre Krümmung nicht ändert, wenn man die Fläche entwickelt, deren Wendecurve ſie iſt (§. 179, Anmerk.). Es wäre daher beſſer geweſen eine einzige Tangente nach n ε aufzuklappen, hierauf die Senkrechte ε ω gleich E e zu errichten, welche zur Conſtruction des Kreiſes ε λ hingereicht hätte; ſ. auch §. 468.

§. 680.

Man ſieht hieraus, daß der Evolutenaſt (e p x, E′ p′ x′), obgleich er unendlich iſt, doch nur zu Beſchr bung des Theiles (E K L, E′ K′ L′) der Schraubenlinie dienen kann; und wenn der erzeugende Punkt (E, E′) d beweglichen Fadens in (L, L′) angekommen iſt, ſo muß der in entgegengeſetzter Richtung (L Z, L′ Z′) verlänge und nun an ſeinem andern Endpunkte angeknüpfte Faden ſich um einen neuen Aſt (Y Q b, Y′ Q′ b′) herleg der die nämliche Aſymptote hat, und zu Beſchreibung eines zweiten, dem vorigen gleichen Bogens (L A B, L′ A″ B′ der Schraubenlinie dienen wird. Um dieſen neuen Evolutenaſt zu conſtruiren, deſſen Horizontalprojection mit e p offenbar ſymmetriſch ſein muß, nehme man den Bogen 1 b = 1 e, beſchreibe hierauf die Kreislinie p P q Q, a welcher man den Punkt Q links vom Halbmeſſer O b nimmt, wie den Punkt p rechts vom Halbmeſſer O e endlich projicire man Q in Q′, indem man letzteren Punkt eben ſo weit über die Horizontalebene B″ b″ erhe als der Punkt p′ unter E′ λ′ liegt.

§. 681.

Auf den Evolutenaſt (Y Q b, Y′ Q′ b″) folgt ein dritter (b q y, b″ q′ y′), deſſen Punkte (q, q′) eben ſ conſtruirt werden wie vorhin, und zwar auf eine Art, die man leicht aus der Figur erſehen kann. Dieſer dri Aſt dient zu Beſchreibung eines neuen Bogens (B E S, B″ E″ S″) der Schraubenlinie, welcher jedem der v hergehenden gleich iſt, u. ſ. w. Die Aſymptote dieſes letzteren Aſtes müßte wieder parallel ſein mit derjen Erzeugenden der Schraubenfläche, deren Anfangspunkt dem Punkte (S, S″) diametral gegenüber läge; einfa aber iſt es, an den Kreis die Tangente S W U zu ziehen, welche L Z in dem auf dem Halbmeſſer O b lieg Punkt W ſchneidet; und da dieſer Punkt ſich in W′ auf die erſte Aſymptote projicirt, ſo muß man W″ in d ſelben Höhe über B″ b″ nehmen, und hierauf die Gerade W″ U′ ſo ziehen, daß ſie mit der Vertikalebene nämlichen Winkel bildet wie W′ Z′.

§. 682.

Was die Aſymptote (V ζ, V″ ζ′) des Aſtes (e P X, E′ P′ X′) betrifft, ſo hat ihre Horizontalprojection mit V x ſymmetriſche Lage; und da ihre Vertikalprojection offenbar mit V′ x′ parallel iſt, ſo darf man ſie nur durch den Punkt V″ ziehen, der eben ſo weit unter uns als V′ über E′ liegt.

§. 683.

128. Um den Zuſammenhang dieſer verſchiedenen Evolutenäſte einer Schraubenlinie beſſer einzuſehen, und ſich davon zu überzeugen, wie dieſe Curve durch eine ſtetige Bewegung beſchrieben werden kann, ohne man nöthig hätte, den Anknüpfepunkt des beweglichen Fadens von einem Aſt auf den andern überzutragen, man ſich nur eine unbeſtimmte und unbiegſame Gerade vorſtellen, die anfangs in der Horizontallage (E e, ſich befindet, und welche hierauf, ohne zu gleiten, ſich ſo über den Aſt (e p x, E′ p′ x′) hinbewegt, daß ſtets Tangente an demſelben bleibt. Während dieſer Bewegung wird der erzeugende Punkt (E, E′) zuerſt Bogen (E K L, E′ K′ L′) der Schraubenlinie beſchrieben, und kömmt er in (L, L′) an, ſo wird die beweg Gerade zur Aſymptote (L z, L′ z′); da aber in dem nämlichen Augenblicke dieſe Gerade auch den zweiten (b Y, b″ Y′) in unendlicher Entfernung berührt, ſo wird, wenn ſie jetzt in entgegengeſetzter Richtung über zweiten Aſt ſich hinbewegt, um endlich in die horizontale Lage (B b W, B″ b″) zu kommen, der erzeugende während dieſer zweiten Periode ſeiner ununterbrochenen Bewegung den Bogen (L A B, L′ A″ B″) der Schra linie beſchreiben. Bewegt ſich hierauf die nämliche Gerade von der horizontalen Lage (B b, B″ b″) aus, den dritten Aſt (b q y, b″ q′ y′) hin, ſo beſchreibt der erzeugende Punkt einen neuen Bogen (B E S, B″ E″

der Schraubenlinie, bis die bewegliche Gerade in die Lage der Asymptote (S W U, S″ W″ U″) gekommen ist; von hier an bewegt sie sich ohne Unterbrechung über einen vierten Ast, der die nämliche Asymptote hat, u. s. f.

Wenn man es schwierig finden sollte, diesen verschiedenen Bewegungen im Raume zu folgen, so könnte man dieselben zuerst an einer Sinusoide (§. 451, Anmerk.) studiren, einer ebenen Curve, deren in der nämlichen Ebene liegende Evolute ebenfalls unendliche Aeste hat, die, je zwei und zwei, eine gemeinschaftliche Asymptote haben.

Zweites Kapitel.

Von der Krümmung der Flächen.

§. 684.

Zwei Flächen werden oskulirend genannt, wenn jede durch die gemeinschaftliche Normale gelegte Ebene sie in zwei Curven schneidet, welche selbst oskulirend sind (§. 650) oder, was dasselbe ist, einen und denselben Krümmungshalbmesser haben. Man sieht aber leicht ein, daß unter allen Kugeln, welche eine Fläche S in einem gegebenen Punkt berühren können, keine sich oskulirend zu ihr verhalten kann; denn die Krümmung einer Kugel ist durchaus gleichförmig um die Normale her, was bei einer allgemein genommenen Fläche nicht der Fall ist. Um nun die Krümmung einer solchen Fläche an einem gegebenen Punkte zu schätzen, sucht man die Krümmungshalbmesser der verschiedenen Normalschnitte und aus ihrer Vergleichung ergibt sich die mehr oder minder abgeplattete Form der Fläche um den betrachteten Punkt herum, so wie ihre Lage in Beziehung auf die Berührungsebene. Nun aber besteht unter den Krümmungshalbmessern dieser Normalschnitte ein sehr merkwürdiges Gesetz, das hier zuerst für die Flächen vom zweiten Gerade erwiesen werden soll.

§. 685.

Auf einem Ellipsoid, dessen drei Halbaxen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ sind, betrachte man insbesondere einen Scheitelpunkt C, für welchen die Normale zugleich die Axe COZ ist, welche senkrecht steht auf den Tangenten CX und CY der beiden Hauptschnitte CA und CB. Legt man nun durch diesen Punkt eine dritte Normalebene VCZ, deren Durchschnitt mit der Berührungsebene XCY die Gerade CV sei, so wird sie die Fläche in einer Ellipse CD schneiden, deren Halbaxen offenbar $OC = c$ und $OD = d$ sind. Nun ist bekannt (§. 200), daß die Krümmungshalbmesser am Scheitel der drei Ellipsen CA, CB, CD beziehlich die Größe Fig. 131

$$CG = \frac{a^2}{c} = R,\ CH = \frac{b^2}{c} = R',\ CI = \frac{d^2}{c} = \varrho$$

haben; und da der Halbmesser d der Ellipse ADB seiner Größe nach beständig zwischen den Grenzen a und b bleibt, so ist also, wenn man $a < b$ annimmt, der Halbmesser ϱ beständig größer als R und kleiner als R′, d. h. von allen Normalschnitten durch den Scheitel C hat die Curve CA die größte Krümmung, weil ihr Halbmesser R der kleinste ist, (§. 643), und die Curve CB hat die geringste Krümmung, weil ihr Halbmesser R′ größer ist als jeder andere.

Bezeichnet man ferner durch φ den Winkel, den die Normalebene VCZ mit der Hauptebene XCZ macht, so ist φ zugleich auch der Winkel zwischen der Axe OA und dem dem Durchmesser OD der Ellipse ABD, und bekanntlich ist die Länge dieses Durchmessers durch die Gleichung

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos.\varphi^2 + \frac{1}{b^2}\sin.\varphi^2$$

gegeben. Multiplicirt man nun alle Glieder durch c unter Berücksichtigung der obigen Werthe von ϱ, R und R', so erhält man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos.\varphi^2 + \frac{1}{R'}\sin.\varphi^2 \qquad (1)$$

aus welcher Gleichung man unmittelbar den Krümmungshalbmesser ϱ jedes durch C gehenden Normalschnittes berechnen kann, wenn man den Winkel φ dieses Schnittes mit einem der beiden Hauptschnitte und die Krümmungshalbmesser R und R' dieser letzteren Curven kennt.

§. 686.

132. Man betrachte nun ferner ein Hyperboloid mit Einem Mantel, dessen Kehlellipse CAFE ist, welche zu Axen die beiden reellen Axen der Fläche hat, nämlich OA = a und OC = c, während die imaginäre Axe eine Horizontale Ob = b ist, die senkrecht auf der Ellipsenebene steht, welche hier als die vertikale Grundebene der Figur betrachtet wird. Der Krümmungshalbmesser dieser Ellipse für den Scheitel C ist eine Linie $CG = \frac{a^2}{c} = R$, und der der Hyperbel BCL, welche in der Ebene der beiden Axen OC und Ob liegt, ist $CH = \frac{b^2}{c} = R'$; aber er befindet sich oberhalb der Berührungsebene XCY, während CG unterhalb derselben liegt. Nun lege man durch den Punkt C irgend eine Normalebene VCZ, welche mit der Hauptebene XCZ einen Winkel φ bilde; ist nun dieser Winkel klein genug, so wird der Schnitt eine Ellipse sein, deren Axen OC = c und OD = d sind, und letztere wird zugleich ein Durchmesser der Hyperbel ADK sein, welche in der Ebene der beiden Horizontalaxen OA und Ob liegt. Nun besteht bekanntlich zwischen diesem Durchmesser und den Axen der Hyperbel die Gleichung:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos.\varphi^2 - \frac{1}{b^2}\sin.\varphi^2;$$

multiplicirt man nun alle Glieder durch c und erinnert sich zugleich, daß die Ellipse CDF im Scheitel C den Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{d^2}{c}$ hat, so erhält man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos.\varphi^2 - \frac{1}{R'}\sin.\varphi^2 \qquad (2),$$

welche Gleichung ganz mit der Formel (1) übereinstimmt, wenn man hier denjenigen der beiden Haupthalbmesser R und R', der sich über der Berührungsebene befindet, als negativ betrachtet.*)

§. 687.

Je weniger nun der Winkel φ von Null unterschieden ist, desto größer ist in der Formel (2) das Glied $\frac{1}{R}\cos.\varphi^2$ im Vergleich mit $\frac{1}{R'}\sin.\varphi^2$, und der Krümmungshalbmesser ϱ des Normalschnittes CDF ist dann positiv, woraus hervorgeht, daß diese Curve convex ist, und folglich unterhalb der Berührungsebene XC

*) Gewöhnlich nimmt man das Umgekehrte an, weil die Analysis einen positiven Werth liefert für den Krümmungshalbmesser einer oberhalb ihrer Tangente liegenden Curve, wenigstens wenn man die positiven Ordinaten von unten nach oben zählt. Da man aber hier die Axe der positiven z als von oben nach unten gerichtet betrachtet, so verträgt sich die im Texte gemachte Annahme ganz wohl mit der Analysis; auch wurde hier diese Anordnung darum vorgezogen, weil die Normalschnitte sich bequemer darstellen lassen, wenn man sie unterhalb der Berührungsebene nimmt.

t. Da ferner $\frac{1}{\varrho}$ kleiner iſt als $\frac{\cos.\varphi^2}{R}$, und alſo um ſo mehr kleiner als $\frac{1}{R}$, ſo folgt hieraus, daß der inderliche Halbmeſſer ϱ größer iſt als R, und daß er zugleich mit φ wächst, bis dieſer Winkel den Werth rreicht hat, der durch die Gleichung

$$\frac{\cos.\omega^2}{R} = \frac{\sin.\omega^2}{R'}$$ beſtimmt wird, aus welcher man $\text{tang.}\,\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}$ erhält.

chnet man alſo auf der Berührungsebene XCY oder auf der mit dieſer parallelen Horizontalebene*) zwei :ade O′P und O′Q, welche mit O′X′ Winkel bilden, die dem Winkel ω gleich ſind, ſo wird die ſchneidende :malebene, wenn ſie in die Lage O′P kommt, das Hyperboloid in einer Linie ſchneiden, deren Krümmung ll iſt, weil für den Winkel ω der Halbmeſſer ϱ unendlich groß wird; und es muß in der That dieſer Schnitt der beiden geradlinigen Erzeugenden geben, welche durch den Scheitel C gehen, weil, wenn man ans §. 671 Werthe von R und R′ in den Ausdruck für ω ſetzt, dieſer ſich in $\text{tang.}\,\omega = \frac{b}{a}$ verwandelt.

§. 688.

Iſt der Winkel φ größer als ω geworden, und hat die Normalebene die Lage O′W′ angenommen, ſo Fig. 132.
t die Formel (2), daß alsdann der Krümmungshalbmeſſer ϱ einen negativen Werth annimmt, und der ent- chende Schnitt concav wird, alſo oberhalb der Berührungsebene zu liegen kommt; dieſer Schnitt iſt eine :erbel, deren Krümmungshalbmeſſer ϱ nummeriſch abnimmt, bis man hat:

$$\varphi = 90°, \text{ wo alsdann } \varrho = -R' = CH.$$

ſes letztere Reſultat entſpricht der Normalebene O′Y′, welche die Fläche in der Haupthyperbel BCL ſchneidet.

§. 689.

Setzt man dieſe Unterſuchung weiter fort von $\varphi = 90°$ bis $\varphi = 360°$, ſo findet man nach einander :er dieſelben Reſultate, weil die Formel (2) nur die Quadratzahlen von sin. φ und cos. φ enthält. Hieraus t:

1) Daß die beiden Normalebenen PO′p und QO′q die Fläche um dem Punkt (O′, C) herum in vier hiedene Regionen theilen: innerhalb der beiden Scheitelwinkel PO′Q und pO′q ſind alle Normalſchnitte vex und liegen alſo unterhalb der Berührungsebene XCY: und innerhalb der beiden andern Winkel PO′q QO′p ſind alle Normalſchnitte concav und liegen oberhalb jener Berührungsebene; der Uebergang von einen zu den andern Regionen geſchieht durch zwei geradlinige Schnitte PO′p, QO′p, welche die in der ührungsebene XCY liegenden Erzeugenden des Hyperboloids ſind.

2) Der Krümmungshalbmeſſer R des Hauptſchnittes CAF iſt das Minimum aller poſitiven Halbmeſſer, he ſich von $\varrho = R$ bis $\varrho = \infty$ ändern; während der Krümmungshalbmeſſer R′ des andern Hanptdurch- ttes BCL das Minimum der negativen Halbmeſſer iſt; oder man kann auch, wenn man auf das Zeichen letzteren Rückſicht nimmt, ſagen: — R′ ſei ein Maximum, aber nur in Beziehung auf die negativen Halb- er, welche von $\varrho = -R'$ bis $\varrho = -\infty$ ſich ändern.

§. 690.

Die ſo eben bewieſenen Sätze für einen reellen Scheitel eines Ellipſoids oder eines Hyperboloids mit Einem Fig. 133. u. 134.

*) Es wird hier außer der perſpectiviſchen Darſtellung der Figur auf der vertikalen Tafel XCZ noch eine Horizontalprojection derſelben auf einer ſenkrecht auf der Normale CZ ſtehenden Ebene angewendet, um die Grenzen anſchaulicher zu machen, welche die convexen Schnitte von den concaven ſcheiden.

Mantel gelten gleicherweise für jede Fläche S, und für einen beliebigen Punkt M dieser Fläche dessen Normale MZ ist. Das heißt:

Unter allen Normalschnitten, welche durch diesen Punkt gehen, gibt es immer zwei sogenannte Hauptschnitte MA und MB, von denen der erste einen Krümmungshalbmesser MG = R hat, der ein Minimum, und der zweite einen Krümmungshalbmesser MH = R′, der ein Maximum ist: diese beiden Hauptschnitte liegen in den senkrecht aufeinanderstehenden Ebenen XMZ und YMZ; und kennt man einmal die Lage dieser Ebenen, so ist der Krümmungshalbmesser ϱ jedes andern Normalschnittes MD, der durch denselben Punkt geht, durch die Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos.\varphi^2 + \frac{1}{R'}\sin.\varphi^2 \qquad (3)$$

gegeben, in welcher φ den Winkel der beiden Ebenen MD und MA bezeichnet, und wo man denjenigen der beiden Halbmesser R und R′ als negativ betrachten muß, der oberhalb der Berührungsebene XMY liegt, wenn die Fläche nicht-convex ist, d. h. wenn sie von ihrer Berührungslinie an M durchschnitten wird.

Dieses wichtige Theorem Eulers läßt sich durch rein synthetische Betrachtungen nicht streng und vollständig erweisen, weßhalb man es hier als ein Resultat des Differentialcalcus*) ohne Weiteres annimmt; die interessanten Folgerungen desselben aber sollen im Folgenden rein geometrisch erwiesen werden.

§. 691.

133. Wenn die beiden Halbmesser MG = R und MH = R′ positiv sind, wie in Fig. 133., so zeigt die Formel (3), daß ϱ gleichfalls positiv ist, was auch der Winkel φ sei; mithin sind in diesem Falle alle Normalschnitte unterhalb der Berührungsebene XMY, wenigstens in der Umgegend des Punktes M, und die Fläche ist convex in diesem Punkte. Nimmt man ferner an R sei kleiner als R′, so sieht man leicht, daß R alsdann das absolute Minimum aller Krümmungshalbmesser der durch M gehenden Normalschnite ist, und R′ das absolute Maximum der nämlichen Halbmesser; denn schreibt man die Formel (3) nach einander unter der einen und der andern dieser Formen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} - \sin.\varphi^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right);\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R'} + \cos.\varphi^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

so ist immer, was auch der Winkel φ sein mag,

$$\frac{1}{\varrho} < \frac{1}{R} \text{ und } \frac{1}{\varrho} > \frac{1}{R'}, \text{ und mithin } \varrho > R \text{ und } \varrho < R'.$$

Aehnliche Folgerungen würden sich ergeben, wenn beide Haupthalbmesser zugleich negativ wären; nur befände sich alsdann die Fläche oberhalb der Berührungsebene, wenigstens um den Punkt M herum.

§. 692.

Sind für einen besonderen Punkt M irgend einer Fläche die beiden Haupthalbmesser R und R′ einander gleich und haben sie dasselbe Zeichen, so reducirt sich die Formel (3) auf

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}$$

und der Winkel φ verschwindet; man findet also ϱ = R für alle Normalschnitte, welche durch diesen Punkt gehen, um welchen herum die Fläche eine durchaus gleichförmige Krümmung hat, wie die Fläche einer Kugel. Solche besondere Punkte heißen Nabelpunkte (ombilics), deren mehrere beim Ellipsoid (§. 739) vorkommen werden;

*) Analyt. Geom. im Raum, Kap. 16.

aber man wird ſchon hier einſehen, daß ein Punkt in welchem der Meridian einer Umdrehungsfläche die Axe unter einem rechten Winkel ſchneidet, ſtets ein Nabelpunkt iſt.

§. 693.

Wenn die beiden Haupthalbmeſſer entgegengeſetzte Zeichen haben, wie in Fig. 134., wo der Halbmeſſer Fig. 13
$MG = R$, der zu dem Schnitte $(MA, M'A')$ gehört, poſitiv und $MH = R'$, der zum Schnitte $(MB, M'B')$ gehört, negativ iſt, ſo verwandelt ſich die Formel (3) in

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos.\varphi^2 - \frac{1}{R} \sin.\varphi^2 \qquad (4)$$

und zeigt unter dieſer Geſtalt, daß ϱ bald poſitiv, bald negativ ſei, je nach dem Werthe des Winkels φ; d. h. von den Normalſchnitten liegen einige unter, andere oberhalb der Berührungsebene XMY, die Fläche iſt alſo nicht-convex und hat entgegengeſetzte Krümmungen. Um die Gränzen dieſer verſchiedenen Schnitte zu beſtimmen, ſuche man den beſondern Werth ω des Winkels φ, welcher der Gleichung

$$\frac{1}{R} \cos.\omega^2 - \frac{1}{R'} \sin.\omega^2 = 0$$

Genüge leiſtet, ſo erhält man $\text{tang.}\,\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}$; hierauf ziehe man auf der Berührungsebene XMY, oder auf der ihr parallelen Horizontalebene*) zwei Gerade $M'P$ und $M'Q$, deren jede mit $M'X'$ einem dem ω gleichen Winkel bilde. Alsdann wird für alle Werthe von φ zwiſchen $\varphi = -\omega$ und $\varphi = +\omega$, ſo wie auch für alle diejenigen, welche zwiſchen $\varphi = 180° - \omega$ und $\varphi = 180° + \omega$ fallen, die Formel (4) offenbar poſitive Werthe für ϱ liefern; d. h. alle Normalſchnitte zwiſchen den Winkeln $PM'Q$ und $pM'q$ liegen unterhalb der horizontalen Berührungsebene XMY. Fällt dagegen der Werth von φ zwiſchen ω und $180° - \omega$, oder auch zwiſchen $180° + \omega$ und $360° - \omega$, ſo gibt die Formel (4) für ϱ einen negativen Werth; daraus aber geht hervor, daß alle Normalſchnitte zwiſchen den Winkeln $PM'q$ und $QM'p$ oberhalb der Berührungsebene XMY liegen, wenigſtens in der Umgegend des Punktes M.

§. 694.

Nimmt endlich φ einen der Werthe $\varphi = \pm\omega$, oder $\varphi = 180° \pm \omega$ an, ſo wird der Halbmeſſer ϱ un- Fig. 13
endlich in der Formel (4), und folglich ſchneiden in dieſem Fall die beiden Grenznormalebenen $PM'p$ und $QM'q$ die krumme Fläche in Curven, welche, ohne geradlinig zu ſein wie im Hyperboloid (§. 673), in der Umgegend des Punktes M wenigſtens eine ſehr geringe und in dieſem Punkte ſelbſt gar keine Krümmung haben; d. h. jede von ihnen hat an dieſer Stelle zwei Elemente mit ihrer Tangente gemeinſchaftlich, welche der Durchſchnitt $M'P$ oder $M'Q$ der Grenznormalebene mit der Berührungsebene XMY iſt. Hieraus folgt jedoch nicht, daß in dem Punkte M dieſer beiden Grenzſchnitte immer eine wirkliche Inflexion ſtatt finde; denn beim Wulſte z. B. iſt ſolches nicht der Fall, vielmehr liegen jene beiden Curven ganz auf einer und derſelben Seite ihrer Tangenten.

§. 695.

Weil in nicht-converen Flächen die poſitiven Krümmungshalbmeſſer, nach der Formel (4) von $\varrho = +R$

*) Es wird hier wieder, um der Deutlichkeit willen, eine perſpectiviſche Darſtellung der Figur auf einer Vertikalebene, und eine Projection derſelben auf einer Horizontalebene gegeben. Will man ſich jedoch eine recht beſtimmte Vorſtellung davon machen, ſo betrachte man die Fläche, von der hier die Rede iſt, als die Kehlrinne einer Rolle, deren Axe horizontal und in $(B'L', G)$ projicirt iſt. Der betrachtete Punkt (M, M') befindet ſich alsdann auf dem Kehlkreis $(EMA, E'M'A')$, und der Schnitt $(BML, B'M'L')$ iſt ein Halbkreis, und zwar ein Meridian an der Wulſtfläche der Rolle.

bis $\varrho = +\infty$, und die negativen von $\varrho = -R'$ bis $\varrho = -\infty$ sich ändern, so folgt hieraus, daß R hier in Beziehung auf die Halbmesser der ersten Klasse, ein Minimum und $-R'$ ein analytisches Maximum in Beziehung auf die Halbmesser der zweiten Klasse ist, wenn man deren Zeichen berücksichtigt; betrachtet man hingegen blos die absolute Größe dieser letzteren, so ist R' auch ein Minimum.

Beispiele über die graphische Darstellung der Hauptschnitte und ihrer Krümmungshalbmesser werden erst vorkommen, wenn zuvor von den Krümmungslinien die Rede gewesen sein wird, welcher man sich bei geometrischen Constructionen mit großem Vortheil bedient.

§. 696.

135. Für jeden Punkt M irgend einer Fläche S läßt sich eine Fläche Σ vom zweiten Grade construiren, welche um jenen Punkt herum mit S oskulirt. — Man nehme zuerst an, die gegebene Fläche S sei in M convex und MA und MB seien ihre beiden Hauptschnitte oder die Normalschnitte der größten und kleinsten Krümmung, deren Halbmesser $MG = R$ und $MH = R'$ seien. Nun nehme man auf der Normale MZ ein beliebiges Stück $MO = c$ als eine der Axen einer Ellipse MA', welche, in der Ebene des Schnittes MA verzeichnet, mit letzterem oskulire; um aber diese Bedingung zu erfüllen, darf man nur die zweite Axe OA' so wählen, daß der Krümmungshalbmesser der Ellipse im Punkte M gleich R sei, woraus sich die Gleichung $\frac{a^2}{c} = R$, und hieraus $a = \sqrt{Rc}$ ergibt, d. h. die Halbaxe $OA' = a$ ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen R und c. Eben so construire man in der Ebene des Schnittes MB eine Ellipse MB', welche mit ihm oskulire und deren Hauptaxen $OM = c$ und $OB' = b$ seien, welche letztere man ebenfalls aus der Gleichung

$$\frac{b^2}{c} = R', \text{ als } b = \sqrt{R'c} \text{ erhält.}$$

Dieses vorausgesetzt, bestimmen die beiden Ellipsen MA' und MB' vollständig ein Ellipsoid Σ, dessen drei Halbaxen OM, OA', OB' sind, weil die Ebene der Curve MB senkrecht auf der Curve MA steht; und ein dieses Ellipsoid ist das mit der Fläche S oskulirende, weil sich beweisen läßt, daß jede Normalebene MO die Flächen S und Σ in zwei Curven MD und MD' schneidet, welche denselben Krümmungshalbmesser haben (§. 684). Bezeichnet man nämlich durch ϱ und ϱ' die Halbmesser dieser beiden Schnitte, so sind sie gegeben (§§. 690 und 685) durch die Formeln:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos.\varphi^2 + \frac{1}{R'}\sin.\varphi^2 \text{ und } \frac{1}{\varrho} = \frac{c}{a^2}\cos.\varphi^2 + \frac{c}{b^2}\sin.\varphi^2,$$

aus welcher, unter Berücksichtigung der vorhin angegebenen Werthe von a und b, hervorgeht, daß $\varrho = \varrho'$ ist.

§. 697.

Man bemerke, daß das Krümmungs- oder Oskulations-Ellipsoid Σ von S für den Punkt M nicht das einzige ist; denn die Länge der Axe c ist willkürlich angenommen worden, und nähme man $c = a = R$ oder $c = b = R'$, so erhielte man ein Umdrehungs-Ellipsoid aber nicht um die Normale MZ. Man hätte auch zwei Hyperbeln oder zwei Parabeln als oskulirende Curven der Hauptschnitte MA und MB annehmen können und hätte alsdann als oskulirende Fläche für S ein Hyperboloid mit zwei Mänteln oder ein elliptisches Paraboloid erhalten, welche beide convexe Flächen sind.

§. 698.

136. Es sei ferner S eine nicht-convexe Fläche, in deren Hauptschnitten MA und MB die Krümmungshalbmesser $MG = R$ und $MH = R'$ eine entgegengesetzte Richtung haben. Man construire nun wie oben eine Ellip-

A′, welche mit MA im Punkte M oskulire, und deren Halbaxen MO = c und Oa′ = a seien, von welchen
: erste beliebig auf der Normale genommen, die zweite aber durch die Gleichung $a = \sqrt{Rc}$ bestimmt worden
. Zur Oskulationscurve des Schnittes MB kann keine Ellipse mehr genommen werden, denn es gibt keine
äche vom zweiten Grad, die zwei Schnitte dieser Art zuließe, von denen der eine unterhalb und der andere
erhalb der Berührungsebene läge. Man construire daher eine Hyperbel B′ML′, welche zur reellen Halbaxe
: Linie MO = c und zur imaginären Halbaxe eine Gerade OB″ = b habe, welche senkrecht auf der Ebene
r Ellipse steht, und der Krümmungshalbmesser dieser Hyperbel (§. 200) entspreche der Gleichung

$$\frac{b^2}{c} = R', \text{ woraus } b = \sqrt{R'c}.$$

um wird durch die Ellipse MA′ und die Hyperbel MB′ ein Hyperboloid Σ mit einem Mantel bestimmt, das
t S am Punkte M oskuliren wird (§. 684); denn jede Normalebene, welche einen Winkel φ mit MA macht,
neidet S und Σ in zwei Curven, deren Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' durch die Formeln

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos.^2\varphi - \frac{1}{R'}\sin.^2\varphi; \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{c}{a^2}\cos.^2\varphi - \frac{c}{b^2}\sin.^2\varphi$$

geben sind (§. 693 und 686), aus welchen man, wenn man für a und b ihre oben gegebenen Werthe setzt,
$= \varrho'$ erhält. Man hätte noch ein Oskulationshyperboloid von S, das jedoch seiner Lage nach dem vorigen
nz entgegengesetzt gewesen wäre, erhalten können, wenn man an die Stelle der Hyperbel die Ellipse, und
gekehrt, an die Stelle der Ellipse die Hyperbel gesetzt hätte; auch darf man nicht vergessen, daß die auf der
rmale MG oder MH genommene Axe c eine beliebige Länge erhalten kann. Hätte man endlich zwei Para-
n als Oskulationscurven der Schnitte MA und MB angenommen, so hätte man als Oskulationsebene von S
ı hyperbolisches Paraboloid erhalten.

§. 699.

Krümmungslinien irgend einer Fläche S. So nennt Monge diejenige stetige Reihe von Punkten, Fig. 135.
: welche die Normalen der Flächen sich nacheinander schneiden, und es soll nun bewiesen werden, daß es
n jedem auf der Fläche gegebenen Punkte M an im Allgemeinen zwei Krümmungslinien $M\alpha U$ und
βV gebe, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden und die Hauptschnitte MA und
B berühren (§. 690), von denen sie sich jedoch unterscheiden, weil sie nicht, wie diese, eben sind. Zuerst
len nun diejenigen Krümmungslinien betrachtet werden, welche durch den Scheitel einer Fläche vom zweiten
rade gehen.

§. 700.

Es seien CA und CB die beiden Hauptschnitte, welche sich im Scheitel C eines Ellipsoids schneiden, für Fig. 131.
elchen CO die Normale an der Fläche ist; legt man nun in unendlich kleiner Entfernung C∞ von der Be-
hrungsebene XCY eine Parallelebene mit dieser durch das Ellipsoid, so erhält man einen elliptischen Schnitt
$\beta\alpha$, dessen Scheitel α und β auf CA und CB liegen; und nimmt man auf dieser Curve irgend einen von α
d β verschiedenen Punkt N, so kann bewiesen werden, daß die diesem Punkt entsprechende Normale NK des
llipsoides die zum Scheitel C gehörige Normale CO nicht schneide. Denn diese letztere projicirt sich im Mittel-
unkte ∞ der kleinen Ellipse, während NK, welche senkrecht auf der Tangente NT sein muß, sich auf der Ebene
r nämlichen Ellipse in einer Geraden NK′ projicirt, welche ebenfalls senkrecht auf NT ist; nun ist bekannt,
ß eine Normale NK′ der Ellipse $\alpha\beta\alpha$ nicht durch den Mittelpunkt ∞ geht; mithin wird auch die Normale
K im Raum die C∞ niemals schneiden, so nahe bei C man auch den Punkt N nehmen mag, wenn man
r diesen nicht auf den beiden Hauptschnitten CA oder CB nimmt, weil alsdann die Normale des Ellipsoids

sich nach einer der durch den Mittelpunkt ω gehenden Aren $\alpha\omega$ oder $\beta\omega$ projicirte. Hieraus folgt, daß den Scheitel C eines Ellipsoids nur zwei Krümmungslinien gibt, und daß diese anfangs die nämliche haben wie die Elemente $C\alpha$ und $C\beta$ der beiden Hauptschnitte; ferner fallen für diesen besondern P beiden Krümmungslinien ganz mit den Schnitten CAF und CBF zusammen, weil die durch alle Pu Curve CA gezogenen Normalen des Ellipsoids in der Ebene dieser Curve liegen, indem die Tangenten Scheitel α, A ... der Horizontalschnitte alle senkrecht auf der Ebene der Ellipse CAF stehen. Das gilt auch für den Schnitt CBF.

§. 701.

132. In dem Hyperboloid mit Einem Mantel der Fig. 132. sieht man leicht, daß ein mit der Berührun XCY paralleler und in unendlich kleiner Entfernung unter ihr gemachter Schnitt eine Hyperbel liefern deren beide reelle Scheitel α und ε auf ACE lägen; während dieser Schnitt, wenn man ihn über XCY eine umgekehrte Hyperbel liefern würde, deren reelle Scheitel β und λ auf BCL sich befänden. Da Normale der Fläche sich wieder auf die Normale der einen oder der andern dieser Hyperbeln sich würde, und letztere Gerade auch nicht durch den Mittelpunkt geht, wenn nicht der Berührungspunkt m der Scheitelpunkte zusammen fällt, so folgt hieraus, wie oben, daß die Normale OCH an dem Punk Hyperboloids von einer unendlich nahen Normale nicht geschnitten werden kann, wenn diese nicht Punkt des Hauptschnittes CA oder CB gehört; mithin gibt es für den Scheitel C des Hyperboloids nur zwei Krümmungslinien, welche — aus denselben Gründen wie beim Ellipsoid — ganz mit ACE u zusammen fallen.

§. 702.

135. Es werde nun wieder eine allgemeine Fläche S angenommen, welche um irgend einen Punkt M fürs Erste convex sei. Nun gibt es nach §. 696 stets ein Ellipsoid Σ, das mit S in M oskulirt; und man diese beiden Flächen durch eine mit der Berührungsebene parallele und ihr unendlich nahe Ebene, nicht nur alle Punkte des auf diese Art erhaltenen Schnittes $\alpha N\beta$ den Flächen S und Σ gemeinschaftlich, es werden auch die Normalen dieser beiden Flächen für jeden der Punkte α, N, β, ... die nämlich Man hat nämlich gesehen, daß zwei Schnitte MD, MD', welche in irgend einer nämlichen Normaleb halten sind, oskuliren, d. h. daß sie zwei aufeinanderfolgende Tangenten gemeinschaftlich haben, die ein die andere in N; nun aber wird durch diese letztere Tangente und durch die Tangente NT an der Cur eine Ebene bestimmt, welche S und Σ zugleich in dem Punkt N berührt, und mithin wird auch dieser Ebene senkrechte Gerade eine den beiden Flächen S und Σ gemeinschaftliche Normale sein. Nun §. 686 bewiesen worden, daß in dem Ellipsoid Σ die Normale MO des Scheitels von einer ihr nahen Normale nicht geschnitten werde, wenn diese nicht von dem auf MA' liegenden Punkt α oder von MB' liegenden Punkt β ausgeht; mithin gibt es auch auf der Fläche S nur zwei Normalen αG und βH, die Normale MO schneiden, und folglich gibt es nur zwei durch den Punkt M gehende Krümmungslinien, erste Elemente $M\alpha$ und $M\beta$ mit den Hauptschnitten MA und MB zusammen fallen. Woll nun vom Punkt α aus einen unendlich nahen Punkt α' finden, dessen Normale die vorhergehende αG so müßte man diesen neuen Punkt auf einem der beiden zu α gehörigen Hauptschnitte wählen; nun liegt gemeinen, keiner dieser letzteren in der Ebene von MA, folglich ist die erste Krümmungslinie $M\alpha\alpha' U$ lich windschief und berührt blos den Hauptschnitt $M\alpha A$. Eine ähnliche Folgerung findet auch für die Krümmungslinie $M\beta V$ statt, welche den Hauptschnitt $M\beta B$ ebenfalls berührt, aber in ihrer Verlängeru wöhnlich von diesem abweicht; hieraus folgt also, daß die beiden Krümmungslinien MU und MV

l unter einem rechten Winkel ſchneiden, weil von den beiden Hauptſchnitten, welche ſie berühren, das ämliche gilt.

§. 703.

Ferner ſind die beiden Stücke MG und MH der Normale MO, welche durch ihren Durchſchnitt mit den eiden nächſtgelegenen Normalen beſtimmt worden ſind, und welche Monge die Krümmungshalbmeſſer der läche für den Punkt M genannt hat, nichts anderes als die beiden in §. 690 definirten Haupthalbeſſer. Denn da die Geraden MG und αG Normalen an der Fläche S ſind, ſo ſind ſie es nothwendig auch n der Curve MA, und da ſie überdieß in der Ebene dieſer Curve liegen, ſo iſt ihr Durchſchnitt G der Mittelunkt des Krümmungskreiſes (§. 650) des Schnittes MA; eben ſo iſt H der Krümmungsmittelpunkt des chnittes MB; aber die von Monge angenommene Benennung hat ihren Grund in einer merkwürdigen Eigenhaft jener Halbmeſſer.

Wenn man nämlich aus dem Punkt G als Mittelpunkt mit einer der Normalen GM, Gα, welche gleich nd (§. 650), eine Kugel beſchreibt, ſo berührt dieſe die Fläche S in zwei aufeinanderfolgenden Punkten M nd α, weil zwei ihrer Radien Normalen an S ſind; dieſes geſchieht auch wenn man aus H mit dem Halbeſſer HM = Hβ eine Kugel beſchreibt. Würde man dagegen mit dem Krümmungshalbmeſſer MI = NI eines ndern Normalſchnittes MND eine Kugel beſchreiben, ſo würde dieſe die Fläche S nur in M und nicht auch in I berühren; denn der Halbmeſſer NI iſt keine Normale an der Fläche S, weil vorhin bewieſen wurde, daß ie wahre Normale NK die MO nicht ſchneiden könne. Mithin ſind die Stücke MG und MH der zu M geörigen Normale die Halbmeſſer der beiden Kugeln, welche allein zwei aufeinanderfolgende mit S geeinſchaftliche Tangenten haben können und deren Krümmung das Maximum und das Minimum der krümmung ausdrückt, welche die verſchiedenen Normalſchnitte um den Punkt M herum haben. Deſſen ungeachtet ann man nicht ſagen, dieſe beiden Kugeln oskuliren mit S, weil die doppelte Berührung, welche jede derelben mit dieſer Fläche hat, nur nach einer Richtung hin ſtattfindet, und nicht rings um den Punkt M herum, vie die wahre Oskulation es erfordert (§. 684).

§. 704.

Man darf auch nicht glauben, MG ſei der Krümmungshalbmeſſer der Linie MαU, d. h. der Halbmeſſer des Kreiſes, der mit dieſer Linie zwei Elemente gemein hätte. Es ſind zwar die beiden Geraden MG und αG, als Normalen an der Fläche, auch Normalen an der Curve MαU; aber damit ihr Durchſchnitt G den Krümmungsmittelpunkt von MαU gäbe, müßten dieſe beide Normalen in der Krümmungsebene dieſer Curve liegen (§. 650); dieſes findet aber nur in dem beſondern Falle ſtatt, da MU mit MA zuſammenfällt, oder wenigſtens wenn MU und MA eine Berührung zweiter Ordnung haben.

§. 705.

Für eine nicht-convexe Fläche beweist man auf ähnliche Art das Vorhandenſein und die Eigenſchaften Fig. 136
er zwei Krümmungslinien für irgend einen Punkt M, indem man (§. 698) das Oskulationshyperboloid dieſer läche in M conſtruirt und auf daſſelbe anwendet, was für den Durchſchnitt der Normalen am Scheitel eines hyperboloids erwieſen wurde (§. 701). Nur liegen hier von den beiden Krümmungsmittelpunkten G und der eine unter, der andere über der Berührungsebene; ſonſt gilt auch hier Alles, was im Vorhergehenden ſagt worden iſt.

§. 706.

Ist der auf irgend einer Fläche betrachtete Punkt M ein Nabelpunkt (§. 692), so ist die Anzahl der Krümmungslinien, wie auch die der Hauptschnitte, an welchen sie Tangenten sein müssen, unbestimmt; aber dieser besondere Fall kommt nie bei nicht-converen Flächen vor, weil, wenn auch die Haupthalbmesser gleiche absolute Größe hätten, sie doch hinsichtlich der Lage verschieden wären.

§. 707.

z. 139. . 140. Nachdem nun die Existenz zweier Krümmungslinien für jeden Punkt irgend einer Fläche bewiesen worden, mögen hier verschiedene Beispiele angeführt werden, wo die Bestimmung dieser Linien unmittelbar geschieht.

In einer von einem beliebigen Meridian AME beschriebenen Umdrehungsfläche, ist dieser Meridian selbst eine erste Krümmungslinie für jeden ihrer Punkte, wie z. B. M; denn da die Normalen MG, αG, α'G' .. der Fläche alle in der Meridianebene enthalten sind (§. 130), so schneiden sie sich nacheinander in der Evolute GG'G''G''' ... der Curve MA. Die zweite durch den Punkt M gehende Krümmungslinie ist offenbar der Parallelkreis MβV, weil alle Normalen der Fläche, welche von den Punkten M, β, V ... ausgehen, sich in demselben Punkt H der Axe schneiden (§. 130). Die beiden Krümmungshalbmesser der Fläche sind also hier der Krümmungshalbmesser MG des Meridians und das Stück MH der Normale, das zwischen dem betrachteten Punkt M und der Umdrehungsaxe liegt.

§. 708.

Was die beiden Hauptschnitte der Fläche betrifft (§. 690), welche durch irgend einen Punkt M gehen, so ist der erste ebenfalls wieder der Meridian MA; denn die Ebene dieses Schnittes muß die Normale MG der Fläche und das Element Mα der Krümmungslinie, die ihn berührt (§. 702), enthalten; und dieses völlige Zusammenfallen des Hauptschnittes mit der Krümmungslinie findet offenbar jedesmal statt, wenn letztere eben ist und ihre Ebene die Normale der Fläche enthält. Hingegen fällt der zweite Hauptschnitt für den Punkt M nicht mit der andern Krümmungslinie MβV zusammen; weil diese, obschon sie eben ist, die Normale MH nicht enthält; aber man erhält leicht diesen zweiten Hauptschnitt MβB, wenn man durch MHG eine schneidende Ebene legt, welche senkrecht auf der Ebene des ersten Schnittes MA steht; die Durchschnittscurve MβB wird alsdann wirklich ein mit dem Parallelkreis MβV gemeinschaftliches Element Mβ enthalten. Die Krümmungshalbmesser MG und MH der Fläche sind zugleich auch die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte MA und MB (§. 703).

§. 709.

In einem Cylinder mit beliebiger Grundlinie ist die geradlinige Erzeugende, welche durch den betrachteten Punkt geht, offenbar eine erste Krümmungslinie; denn da die Berührungsebene den Cylinder nach der ganzen Länge dieser Erzeugenden berührt, so sind die verschiedenen Normalen parallel unter sich und liegen also in einer und derselben Ebene, obgleich sie sich hier erst in unendlicher Entfernung schneiden. Diese Erzeugende ist zugleich ein erster Hauptschnitt aus dem im vorigen Paragraph angegebenen allgemeinen Grunde, und die Krümmung der Fläche ist Null in der Richtung der Erzeugenden, weil der, durch den Durchschnitt zweier nächst aufeinanderfolgenden Normalen bestimmte Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Legt man hierauf durch den betrachteten Punkt eine Ebene senkrecht auf die Erzeugende, so ist der hiedurch erzeugte senkrechte Schnitt die zweite Krümmungslinie, weil die verschiedenen Normalen des Cylinders, welche den Punkten dieser Curve entsprechen, sich offenbar in der Ebene derselben befinden und sich in der Evolute dieses senkrechten Durchschnittes schneiden.

en Krümmungshalbmeſſer ſomit der kleinſte Halbmeſſer der Fläche wird; d. h. die größte Krümmung Cylinders findet in der Richtung des ſenkrechten Durchſchnittes ſtatt, der offenbar auch der zweite Haupt- itt iſt (708).

§. 710.

Eben ſo leicht iſt einzuſehen, daß in einem Kegel mit beliebiger Grundlinie jede geradlinige Erzeugende leich eine Krümmungslinie und einen Hauptſchnitt vorſtellt, in deſſen Richtung die Krümmung der Fläche ll iſt. Da ferner alle dieſe Erzeugenden von den Linien der zweiten Krümmung rechtwinklig geſchnitten den müſſen, ſo erhält man dieſe letzteren aus den Durchſchnitten des Kegels mit Kugeln, deren Mittelpunkt der Kegelſpitze liegt. Um den zweiten Hauptſchnitt für einen auf einer Erzeugenden gegebenen Punkt zu en, muß man durch die zu dieſem Punkte gehörige Normale des Kegels eine auf der Erzeugenden ſenkrecht ende Ebene legen.

§. 711.

In einer entwickelbaren Fläche überhaupt iſt die geradlinige Erzeugende immer zugleich eine Krümmungs- e und ein Hauptſchnitt, deſſen Krümmungshalbmeſſer unendlich groß iſt, weil die Berührungsebene der Fläche ; der ganzen Länge dieſer Erzeugenden berührt. Den zweiten Hauptſchnitt für einen gegebenen Punkt M ilt man, wenn man durch die dieſem Punkt entſprechende Normale eine Ebene legt, die ſenkrecht auf der ch eben jenen Punkt gehenden Erzeugenden ſteht; und die zweite Krümmungslinie, welche alle Erzeugenden er rechten Winkeln ſchneiden muß, wird eine Evolvente der Wendecurve der krummen Fläche ſein. So in der entwickelbaren Schraubenfläche der Figur 96. die geradlinigen Erzeugenden zugleich die Linien der te Krümmung, und die Linien der zweiten Krümmung ſind die Horizontalſchnitte wie ABCDLMPQ...; n dieſe Spirale ſchneidet alle Erzeugenden unter rechten Winkeln und iſt auch eine Evolvente der Schrauben- e ($A\beta\gamma\delta\ldots$, $A'\beta'\gamma'\delta'\ldots$) nach §. 661.

§. 712.

Iſt die Fläche S windſchief, ſo iſt die Erzeugende GMP keine Krümmungslinie mehr, weil die Normalen Fig. 143.
ge dieſer Geraden, ſtatt ſich zu ſchneiden, ein hyperboliſches Paraboloid bilden (§. 595); da aber GMP in der zu M gehörigen Berührungsebene befindet, ſo iſt ſie der Schnitt einer der beiden Grenznormal- nen (§. 694), welche die oberhalb der Berührungsebene liegenden Normalſchnitte von den unteren ſcheiden. e ſchneidet die Berührungsebene an M die windſchiefe Fläche auch in einem zweiten Aſte $M\alpha$; zieht man er an dieſen die Tangente MQ, welche die Spur der zweiten Grenznormalebene iſt und theilt ſowohl den nkel PMQ als auch ſein Supplement durch die Geraden MA und MB in zwei gleiche Theile, ſo ſind letztere Durchſchnitte der beiden Hauptſchnitte mit der Berührungsebene, und zugleich auch die Tangenten in den en durch M gehenden Krümmungslinien.

§. 713.

Aehnliche Reſultate ergeben ſich auch für eine Fläche S, welche, ohne windſchief zu ſein, nicht-convex iſt, n die Berührungsebene einer ſolchen Fläche ſchneidet ſie nothwendig in zwei Aeſten, welche durch den Be- rungspunkt gehen, und durch deren Tangenten ebenfalls die Lage der Grenznormalebenen beſtimmt wird; aus aber ergibt ſich, wie oben, die Richtung der Hauptſchnitte und der Krümmungslinien, welche jenem kt entſprechen.

§. 714.

Fig. 142. Um nun von diesen verschiedenen Beispielen wieder zur allgemeinen Theorie zurückzukehren, werde angenommen, man suche von dem, auf irgend einer Fläche S beliebig genommenen Punkt M aus, unter den ihm unendlich nahe gelegenen Punkten, blos diejenigen beiden M′ und K, deren Normalen die Normale von M schneiden; hierauf suche man eben so vom Punkte M′ aus die Punkte M″ und K′, und fahre so fort in Beziehung auf die Punkte M‴, ... K, K′, ... R, R′, ...; so erhält man auf diese Art zwei Reihen von Krümmungslinien

MM′U, KK′U′, RR′U″, ... und MKV, M′K′V′, M″K″V″, ...

welche die gegebene Fläche in krummlinige Vierecke theilen, deren Seiten sich immer unter rechten Winkeln schneiden (§. 702) und die Richtungen der beiden Krümmungen der Fläche anzeigen, d. h. die Richtungen, in welchen diese, um jeden Punkt herum, eine größte oder kleinste Krümmung zeigt (§. 703).

§. 715.

Denkt man sich nun für alle Punkte einer der Linien der ersten Krümmung MU die verschiedenen Normalen an die Fläche S gezogen, so bilden diese Geraden, welche sich nacheinander schneiden, eine entwickelbare Fläche, deren Wendecurve GG′G″, aus den Mittelpunkten der ersten Krümmung von S, in Beziehung auf die Linie MU, besteht, und an welcher alle jene Normalen Tangenten sind. Man bemerke ferner, daß diese Wendecurve eine Evolute der Linie MU ist (§. 658), und daß letztere also auch eine Krümmungslinie für die durch jene Normalen gebildete entwickelbare Fläche darstellt (§. 711). Verfährt man auf gleiche Weise in Beziehung auf jede der Linien KU′, RU″, TU‴, ... der ersten Krümmung, so erhält man eine Reihe entwickelbarer Flächen, deren jede sich zu S als Normalfläche verhält, und deren Wendecurven zusammengenommen eine Fläche Σ bilden, welche der Ort aller Mittelpunkte der zweiten Krümmung von S ist, und an welcher alle Normalen dieser letzteren Fläche Tangenten sind. Eben so gibt es eine zweite Fläche Σ', welche der Ort aller Mittelpunkte der zweiten Krümmung von S ist, und welche gebildet wird von den Wendecurven HH′H″ aller der entwickelbaren Flächen, die durch die Normalen längs jeder der Linien MV, M′V′, M″V″, ... zweiter Krümmung erzeugt werden; und diese zweite Fläche Σ' wird von der nämlichen Normalen berührt wie Σ.

§. 716.

Gewöhnlich sind diese Oerter Σ und Σ' der Krümmungsmittelpunkte nichts Anderes, als zwei von einander unterschiedene Mäntel einer und derselben krummen Fläche, die übrigens einer gemeinschaftlichen Erzeugungsart unterliegen, und durch Eine Gleichung ausgedrückt werden können. Manchmal jedoch sind sie auch zwei von einander unabhängige Flächen, wie z. B. bei den Umdrehungsflächen, wo der Mantel Σ, der die Krümmungsmittelpunkte der Parallelkreise enthält, sich auf die Umdrehungsaxe selbst reduzirt (§. 707), während der Mantel Σ', der die Krümmungsmittelpunkte aller Meridiane enthält, eine neue Umdrehungsfläche ist, welche durch die Umdrehung der ebenen Evolute des Meridians (§. 707), um die nämliche Axe erzeugt wird. Man sieht leicht ein, daß die Mäntel, welche die Krümmungsmittelpunkte einer Fläche S enthalten, in Beziehung auf letztere das Nämliche sind, was die Evoluten in Beziehung auf krumme Linien.

§. 717.

Man bemerke ferner, daß die entwickelbaren Flächen, welche aus den Normalen an S längs der Linien
Fig. 142. MU, KU′, RU″, ... der ersten Krümmung gebildet werden, Tangentialflächen an der zweiten Mittelpunktsfläche

Σ' sind, während der erste Mäntel Σ von den entwickelbaren Flächen berührt wird, die ihre Entstehung den Normalen von S längs den Linien MV, M'V', M''V'', ... der zweiten Krümmung verdanken. Denn die von M, M', M'', ausgehenden Normalen schneiden sich auf dem ersten Mantel Σ in G, G', so wie die von K, K', K'' ausgehenden Normalen sich in G_1, G'_1 schneiden; aber der Durchschnitt der Normale an M mit der an K, der an M' mit der an K', der an M'' mit der an K'' geschieht in H, H_1, H_2, auf dem zweiten Mantel Σ'; mithin ist dieser Mantel der Ort der aufeinanderfolgenden Durchschnitte aller entwickelbaren Flächen der ersten Reihe, oder er ist vielmehr ihre Umhüllung (§. 190); mithin berührt er jede derselben. Eben so beweist man, daß der Mantel Σ die Umhüllung aller entwickelbaren Flächen in Beziehung auf die Linien der zweiten Krümmung ist.

§. 718.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, daß zwei entwickelbare Normalflächen an S, welche der nämlichen Reihe angehören oder durch zwei Krümmungslinien derselben Art, wie MU und KU', gehen, sich in einer Curve HH_1H_2 schneiden, welche auf der Mittelpunktsfläche der entgegengesetzten Art liegt. Vergleicht man aber die entwickelbaren Flächen, welche zu verschiedenen Reihen gehören, so findet man, daß sie sich zu zwei und zwei in einer zu S gehörigen Normale schneiden, wie GMM'U und GMKV, deren Durchschnitt die Gerade MG ist. Dieser Durchschnitt geschieht ferner unter einem rechten Winkel, weil die Ebenen M'MG und KMG, die offenbar Berührungsebenen an jenen entwickelbaren Flächen sind, senkrecht auf einander stehen, indem die Elemente MM' und MK der beiden Krümmungslinien unter sich und auf der Normale MG senkrecht sind.

§. 719.

Die Berührungsebene MM'G an einer entwickelbaren Fläche der ersten Reihe wird die zweite Mittelpunktsfläche Σ' (§. 717), und eben so die Berührungsebene KMG den ersten Mantel Σ berühren; da nun diese Ebenen senkrecht aufeinander stehen, so werden jedesmal, wenn man jene beiden Mäntel Σ und Σ' von einem beliebig auf S genommenen Gesichtspunkte M aus betrachtet, die sichtbaren Umrisse derselben sich immer unter rechten Winkeln schneiden.

§. 720.

Man bemerke ferner, daß die Ebene M'MG die Krümmungsebene der auf dem Mantel Σ liegenden Wendecurve GG'G'' ... ist; da nun diese Ebene senkrecht auf KMG steht, welche jenen Mantel berührt (§. 717), so sind mithin alle Krümmungsebenen der Curve GG'G'' .... Normalebenen an dem Mantel Σ; und folglich ist diese Curve die kleinste Linie zwischen zwei Punkten der Fläche Σ (§. 189). Das Nämliche gilt für alle andere Wendecurven dieser Fläche, so wie auch für alle diejenigen, aus welchen die Fläche Σ besteht.

§. 721.

Wenn die beiden Mäntel Σ und Σ' sich irgendwo schneiden, so schneiden sie sich unter rechten Winkeln, wie vorhin gesagt wurde, und ihr Durchschnitt Φ heißt der Ort der Mittelpunkte sphärischer Krümmung, weil jede Tangente an der Curve Φ eine Normale von S ist, welche diese Fläche in einem Punkt λ schneidet, für welchen der Halbmesser und Mittelpunkt beider Krümmungen derselbe ist, so daß diese letzteren also gleich sein werden, wie es in jedem Punkt einer Kugel der Fall ist. Mithin werden alle Tangenten des Durchschnitts Φ zusammen die Fläche S in einer Curve $\lambda\lambda'\lambda''$ .... schneiden, welche die Linie der

sphärischen Krümmungen heißt, und welche nothwendig alle Krümmungslinien der ersten und zweiten Art schneidet.

§. 722.

„Es ist einleuchtend", sagt Monge „daß die Linien der sphärischen Krümmungen auf der Fläche S eine Evolvente der Linie Φ ist, welche die Mittelpunkte der sphärischen Krümmungen enthält. Befestigt man also in einem der Punkte dieses Durchschnitts der beiden Mittelpunktsflächen einen Faden, spannt ihn an, und wickelt ihn so um die Durchschnittscurve, daß sein geradliniger Theil stets Tangente an derselben bleibt, so wird einer der Punkte des Fadens die Linie der sphärischen Krümmungen durchlaufen. Spannt man hingegen den Faden an, ohne ihn irgend einer Bedingung zu unterwerfen, und denkt man sich alle Wirkungen, welche die Reibung desselben an den Mittelpunktsflächen veranlassen könnte, aufgehoben, so ist er, in jeder Lage, in welcher man ihn auch betrachten mag, in drei Theile getheilt; der erste derselben ist um einen Theil der Durchschnittscurve beider Mittelpunktsflächen gewickelt; der zweite ist über die Mittelpunktsfläche, der er am nächsten ist, hergespannt, und zwar über eine der Wendecurven,*) von welcher diese Fläche der Ort ist, und diese beiden Curventheile berühren sich an dem ihnen gemeinschaftlichen Punkte. Der dritte geradlinige Theil des Fadens ist eine Tangente an jener Wendecurve und Normale an der Fläche S; der Endpunkt des Fadens endlich befindet sich in dieser Fläche selbst. Bewegt man nun den Faden, während man ihn in beständiger Spannung erhält, so kann man den Endpunkt desselben nach und nach in alle Punkte der Fläche bringen. Man sieht also, daß jede Fläche durch die beiden stetigen Bewegungen des Endpunktes eines angespannten Fadens, der um die beiden Mittelpunktsflächen gewickelt wird, erzeugt werden kann: gerade so wie eine ebene Curve erzeugt wird durch den Endpunkt eines angespannten Fadens, den man auf die Evolute der Curve aufwickelt."

§. 723.

„Wir wollen nun," fährt Monge fort, „an einigen Beispielen sehen, welchen Nutzen diese allgemeinen Sätze in gewissen Künsten gewähren. Das erste Beispiel nehmen wir aus der Baukunst."

„Die steinernen Gewölbe bestehen aus verschiedenen Theilen, denen man den Namen Gewölbsteine (voussoirs) gibt. Jeder Gewölbstein hat mehrere Seitenflächen, deren Ausführung die größte Aufmerksamkeit erfordert: 1) die Vorderseite, welche einen Theil der sichtbaren Fläche des Gewölbes ausmachen soll und gewöhnlich die Wölbung, Bogenfläche (douelle) heißt; 2) diejenigen Seitenflächen, in welchen die Gewölbsteine sich aneinander anschließen und welche im Allgemeinen Fugen (joints) genannt werden. Die Fugen müssen äußerst genau gearbeitet sein; denn da der Druck sich von einem Gewölbsteine zum andern senkrecht auf die Fugenfläche fortpflanzt, so müssen beide Steine sich in der größtmöglichen Anzahl Punkte berühren, damit für jeden Berührungspunkt der Druck so klein als möglich und unter alle nahezu gleichmäßig vertheilt sei. Die Fugen eines jeden Gewölbsteines müssen sich also so sehr als möglich der Fläche nähern, von welcher sie einen Theil ausmachen sollen, und damit dieses möglich sei, muß die Fugenfläche von sehr einfacher Natur sein, damit sie so genau als möglich ausgeführt werden könne. Aus diesem Grunde macht man die Fugen gewöhnlich eben; aber nicht alle Gewölbe gestatten eine solche Form der Fugen, und bei einigen würde man einen allzugroßen Verstoß wider die Uebereinstimmung der Theile begehen, wenn man den Fugen nicht eine krumme Fläche gäbe. In diesem Falle aber muß man unter allen krummen Flächen, welche den sonstigen Bedingungen des Gewölbes entsprächen, diejenigen wählen, deren Erzeugungsart die einfachste ist, weil solche gewöhnlich auch am genauesten ausgeführt werden können. Unter allen krummen Flächen nun lassen sich diejenigen am leichtesten

*) Weil diese Wendecurve die kürzeste Linie ist zwischen zweien ihrer Punkte, nach §. 720.

ausführen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden, und unter diesen hauptsächlich die entwickelbaren; erfordert also die Construction eines Gewölbes krumme Fugen, so gibt man diesen wo möglich die Gestalt entwickelbarer Flächen."

„Eine der Hauptbedingungen für die Form der Gewölbsteinfugen ist, daß sie durchaus senkrecht seien auf der Fläche des Gewölbes. Denn wenn die beiden Winkel, welche eine Fuge mit der Fläche des Gewölbes machen, merklich ungleich wären, so könnte derjenige von ihnen, welcher größer wäre als ein Rechter, einen größeren Widerstand leisten als der andere; und bei der Wirkung, den zwei an einander liegende Gewölbsteine auf einander ausüben, könnte derjenige, dessen Winkel kleiner ist als ein Rechter, zerspringen, was das Gewölbe zum Mindesten verunstalten würde, ihm aber auch seine Festigkeit rauben und die Dauerhaftigkeit des Gebäudes vermindern könnte. Die krumme Fläche einer Gewölbefuge muß daher durch eine Gerade erzeugt sein, welche durchaus senkrecht auf der Fläche des Gewölbes steht; und will man noch überdieß, daß die Fugenfläche entwickelbar sei, so müssen alle Normalen auf der Gewölbefläche, welche, so zu sagen, die Fuge bilden, in ihrer Aufeinanderfolge zu zwei und zwei in einerlei Ebenen liegen. Nun aber haben wir gesehen, daß diese Bedingung nicht erfüllt werde, wenn nicht alle Normalen durch eine und dieselbe Krümmungslinie der Gewölbefläche gehen; sollen also die Gewölbsteinfugen entwickelbar sein, so müssen sie nothwendig die Gewölbefläche in ihren Krümmungslinien schneiden."

„So genau nun aber auch die Gewölbesteine ausgearbeitet sein mögen, so sind doch immer die Linien, wo sie aneinander grenzen, auf der Gewölbefläche sichtbar, und diese Linien müssen gewissen allgemeinen Gesetzen unterworfen sein, und dabei auch besonderen, der Natur der Gewölbefläche entsprechenden Verhältnissen genügen. Von den allgemeinen Gesetzen betreffen einige die Stabilität, andere die Dauer des Gebäudes; unter diese gehört z. B. die Regel, daß die Fugen eines und desselben Gewölbesteines rechtwinklig unter sich sein sollen, und zwar aus demselben Grunde, aus welchem sie senkrecht auf der Gewölbefläche stehen müssen. Auch sollen die Theilungslinien der Gewölbesteine so beschaffen sein, daß diejenigen, welche das Gewölbe in Steinschichten theilen, senkrecht seien auf denen, durch welche eine Schichte in ihre Gewölbesteine zerlegt wird. Was die besondern Verhältnisse betrifft, so gibt es mehrere Arten derselben, deren vollständige Aufzählung nicht hieher gehört; wir heben daher aus ihnen nur die Hauptbestimmung heraus, daß die Theilungslinien der Gewölbesteine, deren es, wie wir gesehen haben, zwei Arten gibt, welche alle sich unter rechten Winkel schneiden müssen, zugleich auch die Kennzeichen des Gewölbes, dem sie angehören, an sich tragen sollen. Unter allen Linien aber, die auf der krummen Fläche gezogen werden können, gibt es keine, welche alle diese Bedingungen zugleich erfüllten, als die beiden Reihen Krümmungslinien, von welchen in den vorhergehenden Paragraphen die Rede war. Mithin muß die Theilung eines Gewölbes in Gewölbesteine immer durch die Krümmungslinien der Gewölbefläche geschehen, und die Fugen müssen Theile entwickelbarer Flächen sein, die aus den Normalen der Gewölbefläche, von denen je zwei nächst aufeinanderfolgende sich in einerlei Ebene befinden, gebildet werden, so daß für jeden Gewölbestein die Flächen der vier Fugen und die des Gewölbes rechtwinklig auf einander stehen."

„Vor Entdeckung der geometrischen Sätze, auf welche Alles, was wir hier gesagt haben, sich gründet, hatten die Baukünstler ein gewisses dunkles Gefühl von den Gesetzen, welche wir aus jenen Sätzen abgeleitet haben, und in allen Fällen war dieses Gefühl ihr einziger Leiter. War z. B. das Gewölbe eine Umdrehungsfläche, etwa ein Sphäroid, oder ein Ringgewölbe, so theilten sie dasselbe durch Meridiane und Parallelkreise, d. h. durch die Krümmungslinien der Fläche in seine Gewölbesteine ein."

„Die den Meridianen entsprechenden Fugen waren Ebenen, die, verlängert, durch die Umdrehungsaxe gingen; die Fugen hingegen, welche den Parallelkreisen entsprachen, waren conische, durch Umdrehung um dieselbe Axe erzeugte Flächen; und diese beiden Fugenarten waren rechtwinklig unter sich und senkrecht auf der Gewölbefläche. Waren aber die Gewölbeflächen nicht von so einfacher Natur, daß sich ihre Krümmungslinien gleichsam von selbst

ergaben, wie z. B. bei den länglichten Sphäroiden und einer Menge anderer Flächen so waren die Baukünstler n mehr im Stande allen jenen Bedingungen Genüge zu leisten, und sie gaben daher, in jedem besondern Fa diejenigen auf, deren Erfüllung die meisten Schwierigkeiten mit sich führte."

„Es sollte daher in jeder Schule, wo beschreibende Geometrie gelehrt wird, vom Lehrer auch die Bes mung und Construction der Krümmungslinien solcher krummen Flächen vorgenommen werden, welche in Künsten gewöhnlich ihre Anwendung finden, damit im Nothfalle die Künstler, denen ihre Zeit nicht erlaubt sch liche Untersuchungen anzustellen, wenigstens die Resultate derselben mit Nutzen zu Rathe ziehen können."

§. 724.

„Das zweite Beispiel, das wir hier anführen wollen, nehmen wir aus der Kupferstecherkunst."

„In der Kupferstecherkunst werden die Schatten an den verschiedenen Theilen der Oberfläche der dar stellten Gegenstände, durch Schraffirungen ausgedrückt, die man um so stärker und dichter macht, je dunkler Schatten sein soll. Ist nun die Entfernung, von welcher aus der Kupferstich gesehen werden soll, so groß, die einzelnen Striche der Schraffirung nicht wahrgenommen werden können, so ist es gleichgültig, was für Schraffirungsart man anwendet, und der Künstler kann, welche Gestalt auch die Striche haben mögen, sie Gefallen verstärken und vermehren, um den gewünschten Schatteneffect hervorzubringen. Soll aber der Kupfers und dieser Fall ist der gewöhnlichere, in einer Nähe betrachtet werden, in welcher die Schraffirstriche wohl einander unterschieden werden können, so ist die Gestalt derselben nicht mehr gleichgültig. Für jeden Gegen und für jeden Theil der Oberfläche eines solchen gibt es besondere Schraffirstriche, welche mehr als andere geeignet sind, eine Vorstellung von der Krümmungsart der Oberfläche zu geben; dieser besondern Strichart es alsdann immer zwei, und manchmal wenden die Kupferstecher beide zumal an, wenn sie, um ihre Sch leichter hervorzubringen, die Schraffirungen kreuzweis gehen lassen. Diese Schraffirstriche nun, bei deren wendung die Künstler meistens sich nur durch ein dunkles Gefühl leiten lassen, sind aber nichts Anderes, als Projectionen von den Krümmungslinien der Fläche, welche sie darstellen wollen. Da jedoch die Oberfläch vieler Gegenstände keine genaue geometrische Definition zulassen, so können freilich auch ihre Krümmungsli weder durch den Calcul noch durch Construction bestimmt werden. Sind aber in ihren jüngeren Jahren Künstler darin geübt worden, die Krümmungslinien recht vieler verschiedener und einer genauen Definition fäh Flächen zu suchen, so hat sich dadurch gewiß auch ihr Gefühl für die Gestalt und Lage dieser Linien, selbst weniger bestimmbaren Gegenständen, geschärft; ihre Wahl wird daher meistens das Richtige treffen und Arbeiten werden an Ausdruck gewinnen."

„Wir wollen diesen Gegenstand, welcher vielleicht den geringsten der Vortheile darstellt, den die Errich einer Schule für beschreibende Geometrie in jeder bedeutenden Stadt den Künsten und der Industrie überha bringen würde, nicht weiter verfolgen."

§. 725.

135. **Graphische Bestimmung der Krümmungslinien.** Es sind schon mehrere Flächenarten ge geführt worden (§§. 707, 708, . . .), für welche die Form der Krümmungslinien leicht unmittelbar bes werden kann; will man aber die Richtung dieser Linien für einen auf irgend einer Fläche S gegebenen Pun finden, so muß man auf folgende Art verfahren, wobei zuerst vorausgesetzt wird, die Fläche sei convex. denke sich, ohne es zu construiren, an dem Punkte M der Fläche S das Krümmungsellipsoid, das in Fig. dargestellt ist; hierauf erinnere man sich (§. 696), daß jede Normalebene diese beiden Flächen in Curven M und MD′ schneidet, welche denselben Krümmungshalbmesser ϱ in M haben, und daß ferner zwischen dies

halbmesser und den Halbaxen $MO = c$ und $OD' = d$ der Ellipse MD' die Gleichung $\varrho = \frac{d^2}{c}$ oder $d = \sqrt{c\varrho}$ besteht. Kennt man also ϱ und die Halbaxe c, deren Größe beliebig ist, so darf man nur zwischen diesen beiden eine mittlere geometrische Proportionale suchen, um d zu finden; diese wird alsdann, für jede Normalebene, ein Halbmesser der Ellipse $A'B'E'$ sein, deren, ihrer Größe und Lage nach hier unbekannte Axen hinreichten, um die Krümmung und Lage der Hauptschnitte MA und MB der Fläche S in M zu finden; aus diesem Grunde heißt auch diese Ellipse $A'B'E'$, welche ein Schnitt des Krümmungsellipsoids mit einer durch einen Mittelpunkt und parallel mit der Berührungsebene des Punktes M gelegten Ebene ist, die anzeigende Ellipse.

§. 726.

Nun*) lege man durch die zu M gehörige Normale verschiedene schneidende Ebenen ziemlich nahe bei einander, und nachdem man die auf diese Art mit S erzeugten Schnitte in ihrer wahren Größe construirt hat, suche man nach der Methode des §. 666 ihre Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ', ϱ'', ... in Beziehung auf den Punkt M; hierauf verzeichne man auf irgend einer Ebene von irgend einem beliebigen Punkt m derselben aus die Leitstrahlen md, md', md'', ... und zwar so, daß sie unter sich die nämlichen Winkel bilden, wie die schneidenden Ebenen und an Länge folgenden Ausdrücken entsprechen: Fig. 135 u. 137.

$$md = \sqrt{c\varrho},\quad md' = \sqrt{c\varrho'},\quad md'' = \sqrt{c\varrho''},\ \ldots$$

wo c eine beliebig genommene aber constante Länge bezeichnet. Alsdann wird die durch die Punkte d, d', d'', ... gehende Curve die vorerwähnte anzeigende Ellipse sein; hat man nun diese gezeichnet, so beschreibe man mit dem Halbmesser md einen Kreisbogen, der die Ellipse in f schneidet, so werden die durch die Mitte dieses Bogens gezogene Gerade ma und die auf ihr Senkrechte mb die beiden Hauptaxen der anzeigenden Ellipse und auch die des Krümmungsellipsoides sein, dessen dritte, auf der Normale genommene Axe die Linie $2c$ ist. Man hat also jetzt (§§. 696, 703) für die Krümmungshalbmesser der Fläche S in M

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c} \text{ und } R' = \frac{\overline{mb}^2}{c}$$

und die Lage der Hauptschnitte ist nun ebenfalls bekannt, denn ihre Ebenen müssen durch die zu M gehörige Normale gehen und mit der Ebene des Schnittes md Winkel bilden, die gleich dma und dmb sind; oder wenn man die Ebene der Figur 137. als parallel mit der Berührungsebene von S in M betrachtet (Fig. 135) die Geraden ma und mb sind die Spuren der Normalebenen, in welchen diese Hauptschnitte enthalten sind und auch die Projectionen der Tangenten an den durch M gehenden Krümmungslinien, so daß also das erste Element einer jeden dieser Linien die Richtung ma oder mb hat.

§. 727.

Wenn die gegebene Fläche S nicht-convex ist um den Punkt M herum, so denke man sich, ohne es zu construiren, das Oskulationshyperboloid, das schon in Figur 136. dargestellt worden ist, und erinnere sich (§. 686), daß zwischen den Krümmungshalbmessern der durch die Spitze M dieses Hyperboloids gemachten Normalschnitte und den Durchmessern des parallel mit der Berührungsebene gemachten und durch den Mittelpunkt O gehenden Schnittes die Gleichung $\varrho = \frac{d^2}{c}$ besteht; da nun jene Normalschnitte die nämliche Krümmung haben wie diejenigen, welche von den nämlichen Ebenen mit der Fläche S erzeugt wurden, so kann hieraus folgendes graphische Verfahren abgeleitet werden. Fig. 136 u. 138

Durch die zu dem Punkt M der Fläche S gehörige Normale lege man verschiedene schneidende Ebenen

*) Dieses Verfahren ist zuerst von Dupin in seinen Développements de géométrie angewendet worden.

ziemlich nahe bei einander, und nachdem man die durch sie erzeugten Schnitte und ihre Krümmungshalb
ϱ, ϱ', ϱ'', ... in Beziehung auf M in ihrer wahren Größe construirt hat (§. 666), suche man

$$d = \sqrt{c\varrho},\ d' = \sqrt{c\varrho'},\ d'' = \sqrt{c\varrho''}, \ldots$$

wo c eine nach Belieben genommene aber constante Linie bezeichnet; hierauf trage man die gefundenen
d, d', d'', ... auf die Geraden m d, m d', m d'', ..., die man auf irgend einer Ebene so verzeichnet ha
sie die nämlichen Winkel unter sich bilden, wie die Normalebenen, deren man sich bediente; alsdann wi
durch die Punkte d, d', d'', ... gehende Curve die anzeigende Hyperbel sein, welche in dem Oskul
hyperboloid durch eine schneidende Ebene erzeugt würde, wenn man solche parallel mit der Berührungsebe
M, durch den Mittelpunkt legte.

§. 728.

Bei den vorhergehenden Constructionen wurde vorausgesetzt, alle Halbmesser ϱ, ϱ', ϱ'', ... seien
denn wenn eine der Normalebenen von S einen oberhalb der Berührungsebene liegenden Schnitt liefer
wäre der Krümmungshalbmesser ϱ_2 dieses Schnittes negativ (§. 686, Anmerk.), und mithin die mittlere
portionale $\sqrt{c\varrho_2}$ imaginär; ein Resultat, das, obgleich es mit der Natur der Hyperbeldurchmesser d, d', d
übereinstimmt, indem diese, wenn sie außerhalb einer gewissen Grenze liegen, der Hyperbel nicht mehr beg
gleichwohl eine Modification des graphischen Verfahrens nöthig macht. Wenn man daher auf Normal
stößt, welche oberhalb der Berührungsebene des Punktes M der Fläche S liegen, so nehme man blos die
lute Größe ihrer Krümmungshalbmesser ϱ_2, ϱ_2', ϱ_2'', ... in Rücksicht, und nachdem man die mittleren P
tionalen

$$m\delta = \sqrt{c\varrho_2},\ m\delta' = \sqrt{c\varrho_2'},\ m\delta'' = \sqrt{c\varrho_2''}, \ldots.$$

construirt hat, sondere man sorgfältig diese Klasse von Leitstrahlen von den ersten und verbinde ihre End
durch eine Hyperbel $\delta b \delta'$, welche ein neuer Ast der Anzeigecurve sein wird, und welchen man als den
betrachten kann, den eine mit der Berührungsebene parallele aber oberhalb M in der Entfernung c
Ebene mit dem Oskulationshyperboloid erzeugen würde.

§. 729.

138. Dieses vorausgesetzt, construire man nun die erste Are m a der Anzeigecurve, indem man eine
durch die Mitte des mit einem der Durchmesser m d beschriebenen Kreisbogens d f zieht; hierauf die zwei
m b, welche auf der ersten senkrecht ist, und bestimme nun auch die Asymptoten m P und m Q, welche
beiden zusammengehörigen Hyperbeln gemeinschaftlich sind. Alsdann findet man für die Krümmungshalb
der Fläche S im Punkte M nach §. 698

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c} \text{ und } R' = \frac{\overline{mb}^2}{c}$$

und die Hauptschnitte sind nun gegeben durch die beiden Normalebenen, welche mit der bekannten Eben
die Winkel d m a und d m b bilden; oder vielmehr, wenn man die Ebene der Figur 138. als parallel m
Berührungsebenen von S in M betrachtet: die Geraden m a und m b sind die Spuren der Normalebene
welchen diese Hauptschnitte enthalten sind, und zugleich sind sie die Projectionen der Tangenten an den
durch M gehenden Krümmungslinien.

§. 730.

Was die Gränznormalebenen betrifft, welche die convexen oder unterhalb der Berührung
liegenden Schnitte von denen scheidet, welche oberhalb dieser Ebene liegen und concav sind, so ist bekannt (§.

daß ſie die Fläche S in Curven ſchneiden, deren Krümmungshalbmeſſer in M unendlich groß ſind; mithin haben dieſe Ebenen zu Spuren auf der Berührungsebene die unendlich großen Durchmeſſer der Anzeigecurve, d. h. die beiden Aſymptoten m P und m Q, die man vermittelſt des um die Aren m a und m b conſtruirten Rechtecks beſtimmt. Hieraus folgt, daß jede dieſer Aſymptoten eine Berührung der zweiten Ordnung hat, wenigſtens mit den beiden Grenznormalſchnitten; und man ſieht auch wirklich leicht ein, daß ſie die Durchſchnitte der Berührungsebene an M mit dem Oskulationshyperboloid ſind.

§. 731.

Da nun dieſe Berührungsebene hier die nicht-convexe Fläche S in einer durch M gehenden Curve mit zwei Aeſten ſchneiden muß, ſo werden ebenfalls wieder die Geraden m P und m Q Tangenten an dieſen beiden Aeſten ſein. Denn jede dieſer Geraden befindet ſich in der Berührungsebene und hat zwei Elemente mit S gemeinſchaftlich, nach dem was im vorigen Paragraph geſagt wurde; folglich gehören dieſe beiden Elemente dem Durchſchnitte der Fläche mit ihrer Berührungsebene zu, einer Curve, deren beide Aeſte mithin eine Berührung zweiter Ordnung mit m P oder m Q bilden. Und eben dieſe beiden Aeſte ſind es, welche die vier, theils concaven, theils convexen Regionen (§. 694) von einander abſondern, welche die Fläche S um den Punkt M herum darbietet.

§. 732.

Die vorhergehenden Betrachtungen geſtatten eine Vereinfachung der Methode des §. 727 für eine nicht-convexe Fläche S, unter der Vorausſetzung, daß man die Tangenten an den vielfachen Punkt des Durchſchnittes dieſer Fläche mit ihrer Berührungsebene zu conſtruiren wiſſe; oder auch, wenn man ſich damit begnügt, dieſelben nur näherungsweiſe zu ziehen, was hier um ſo eher angeht, als die Richtung dieſer Tangenten hier ſehr in die Augen fällt, indem jeder Aſt des Durchſchnitts in der Gegend des betrachteten Punktes M faſt geradlinig iſt (§. 731). Es iſt in der That hinreichend, dieſen Durchſchnitt auf eine mit der Berührungsebene des zu S gehörigen Punktes M parallele Ebene zu conſtruiren, die Tangenten an den vielfachen Punkt zu ziehen, welche die Aſymptoten der anzeigenden Curve ſein werden, und hierauf die ſpitzen und ſtumpfen Winkel, welche dieſe Aſymptoten bilden, zu halbiren; alsdann werden die Halbirungslinien die Spuren der Hauptnormalebenen und zugleich auch die Tangenten an den beiden durch M gehenden Krümmungslinien ſein; nun darf man nur noch die Schnitte conſtruiren, welche durch jede dieſer Hauptebenen in der Fläche S gemacht werden und nach §. 666 die Krümmungshalbmeſſer dieſer Schnitte ſuchen, welche die der Fläche ſelbſt ſind.

Dieſes Verfahren läßt ſich mit Vortheil für jeden Punkt eines windſchiefen Hyperboloids oder Paraboloids anwenden, weil der von der Berührungsebene erzeugte Schnitt bei dieſen Flächen aus zwei Geraden beſteht, welche die Stelle der Tangenten vertreten, die man oben näherungsweiſe ziehen mußte. Für irgend eine windſchiefe Fläche (Fig. 143.) iſt eine jener Tangenten die geradlinige Erzeugende G P M, und den zweiten Aſt M α des Durchſchnitts erhält man durch das allgemeine Verfahren des §. 583.

§. 733.

Wollte man hingegen die Tangenten an dem vielfachen Punkt des Durchſchnitts irgend einer nicht-converen Fläche mit ihrer Berührungsebene nach geometriſcher Strenge conſtruiren, ſo dürfte man nur, wie in §. 727 die Richtungen und Krümmungshalbmeſſer der beiden dem gegebenen Berührungspunkt entſprechenden Hauptſchnitte conſtruiren, und hierauf nach §. 730 die Aſymptoten der anzeigenden Curve ſuchen, welche alsdann die geſuchten Tangenten wären.

§. 734.

Fig. 45. Man wende nun dieſes Verfahren auf den in Fig. 45 dargeſtellten Wulſt an, der von ſeiner zu (M, M') gehörigen Berührungsebene M'T'T in einer zweiaſtigen Curve MHRE... und Mhre... geſchnitten wird, die in §. 268 conſtruirt wurde. Um die Tangenten der Curvenäſte in M zu finden, bemerke man, daß hier wo man es mit einer Umdrehungsfläche zu thun hat, der Meridian A'M'B' ſowohl eine erſte Krümmungslinie als auch ein Hauptſchnitt iſt (§. 708), der $R = M'\omega$ zum Krümmungshalbmeſſer hat; der andere Hauptſchnitt liegt in der ſenkrecht auf dem vorigen Meridian ſtehenden Ebene $\omega M'\zeta$ und hat zum Krümmungshalbmeſſer $R' = M'\zeta$, d. h. denjenigen Theil der Normale, der zwiſchen dem Punkt M' und der Umdrehungsare O'Z' enthalten iſt (§. 708). Um nun hieraus das Krümmungshyperboloid an (M, M') zu finden, muß man als reele Axe dieſer Fläche eine beliebige Länge c in der Richtung der Normale (M'ω, MB) nehmen (§. 698); hier iſt dieſe Länge dem Radius M'ω gleich genommen, weil man alsdann für die zweite in (ωα, BC) genommene reelle Axe den ſehr einfachen Werth $a = \sqrt{c.R} = M'\omega$ erhält; d. h. das dieſen Axen entſprechende Hyperboloid iſt eine Umdrehungsfläche und hat zum Kehlkreis den gegebenen Meridian (A'M'B'α, AC). Was nun die imaginäre Axe betrifft, die ſenkrecht auf dieſem Meridian ſtehen und durch ſeinen Mittelpunkt (ω, B) gehen muß, ſo findet man dieſelbe, wenn man — der Gleichung $b = \sqrt{c.R'}$ zufolge — zwiſchen M'ω und M'ζ die mittlere Proportionale M'β ſucht. Da nun auf dieſe Art das Krümmungs- oder Oskulationshyperboloid vollkommen beſtimmt iſt, ſo braucht man die anzeigende Curve nicht erſt durch Punkte zu conſtruiren, weil ſie nichts Anderes iſt (§. 727) als der Durchſchnitt, den die mit der Berührungebene M'T'T parallele Ebene αωε in dem Hyperboloid erzeugt; ſie iſt mithin eine Hyperbel, die zur reellen Axe die Gerade ωα und zur imaginären eine Gerade M'β hat, welche durch den Mittelpunkt (ω, B) ſenkrecht auf die Vertikalebene errichtet iſt. Die Aſymptoten dieſer anzeigenden Curve wären nun ſehr leicht zu conſtruiren; aber da man ſie nachher doch auf die Berührungsebene M'T'T projiciren muß, ſo darf man alſo nur $M'\delta' = \omega\alpha$ nehmen, hierauf in δ' eine Senkrechte von der Länge M'β auf die Vertikalebene errichten: alsdann iſt die Hypotenuſe des auf dieſe Art conſtruirten rechtwinkligen Dreiecks die Projection der Aſymptote auf der Berührungsebene und mithin auch die Tangente des Schnittes, den dieſe Ebene mit dem Wulſte bildet (§. 731). Um endlich dieſe Tangente auf der Horizontalebene zu erhalten, muß man die Seite M'δ' jenes rechtwinkligen Dreiecks in Mδ projiciren und hierauf eine Senkrechte $\delta\lambda = M'\beta$ errichten, ſo wird die Gerade λM die Tangente des Aſtes Mhre ſein. Die Tangente λ''M des andern Aſtes MHRE erhält man vermittelſt der zweiten Aſymptote, was darauf hinaus läuft $\delta\lambda'' = \delta\lambda$ zu nehmen; das praktiſche Verfahren, durch welches dieſe beiden Tangenten conſtruirt werden, erfordert alſo nur wenige ſehr einfache Operationen.

§. 735.

Nachdem man nun durch die vorhergehenden Methoden die Tangenten oder die erſten Elemente der beiden Krümmungslinien für einen gegebenen Punkt auf einer allgemeinen Fläche S beſtimmt hat, muß man, um den ganzen Lauf dieſer Linien zu erhalten, ähnliche Operationen für einen dem Punkte M ſehr nahe gelegenen Punkt M_1, den man auf einer der beiden ſchon gefundenen Tangenten wählt, wiederholen; hierauf eben ſo verfahren für einen dem M_1 ſehr nahen Punkt M_2, den man auf einer der beiden Richtungen gewählt hat, welche die Krümmungslinien in M_1 zeigen, und ſo weiter fort. Aber das Verwickelte und Ungewiſſe eines ſolchen Verfahrens beweiſ't hinlänglich, daß die vollſtändige Beſtimmung der Krümmungslinien eine Aufgabe iſt, welche im Allgemeinen ſich durch geometriſche Operationen nicht wohl ausführen läßt, daher man, wenn man etwas Sicheres in dieſer Hinſicht erhalten will, zur Analyſis ſeine Zuflucht nehmen muß; auf dieſem Wege gelangt

nach Monge bei Unterſuchung eines Ellipſoids mit drei ungleichen Axen zu den ſchönen Reſultaten, die ſchließlich hier noch angeführt werden mögen. *)

§. 736.

Es ſeien a, b, c die drei Halbaxen des gegebenen Ellipſoids und $a > b > c$. Als Horizontalebene Fig. 144
nehme man eine den beiden größeren Axen parallele Ebene und die Vertikalebene nehme man der größten und kleinſten Axe parallel; iſt nun (O, O′) der Mittelpunkt der Fläche und beſchreibt man über den Halbaxen $OA = a$ und $OB = b$ eine Ellipſe (ABDE, A′D′), ſo wird dieſe der ſichtbare Umriß des Ellipſoides auf der Horizontalebene ſein; während der ſichtbare Umriß auf der Vertikalebene die mit den Halbaxen $O'A' = a$ und $O'C' = c$ beſchriebene Ellipſe (A′C′D′F′, AD) iſt. Die dritte Hauptellipſe, deren Hauptaxen b und c ſind, iſt in BE und C′F′ projicirt, und in EC″ aufgeklappt. Die Excentritäten dieſer drei Ellipſen findet man graphiſch durch die bekannten Ausdrücke:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2},\quad e' = \sqrt{a^2 - c^2},\quad e'' = \sqrt{b^2 - c^2};$$

hiernach iſt es leicht auch die beiden Abſtände

$$O\alpha = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{ae}{e'},\quad O\beta = b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} = \frac{be}{e''}$$

zu finden, über welchen, als über Halbaxen man eine Hilfsellipſe $\alpha\varepsilon\beta$ und hierauf eine Hilfshyperbel $\varepsilon\delta\gamma$ conſtruirt. Alsdann trage man auf die Axen der Vertikalprojection zwei Entfernungen

$$O'X' = a\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = \frac{ae'}{e},\quad O'Z' = c\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}} = \frac{ce'}{e''},$$

mit welchen man wieder, als mit Halbaxen, eine neue Hilfsellipſe X′λZ′ beſchreibt, welche ſich ſtets außerhalb des Ellipſoids befinden wird, weil ihre beiden Axen offenbar größer als a und c ſind.

§. 737.

Nun lehrt die Analyſis, daß die Krümmungslinien erſter Art horizontal in den Hyperbeln TU, LS, KR, ... und vertikal in den Ellipſen T′U′, L′S′, K′R′, ... projicirt ſind, welche man aus den vorhin gegebenen Stücken auf folgende Art conſtruirt. Nachdem man auf OA einen beliebigen, aber zwiſchen O und α liegenden Punkt T angenommen, zeichne man die beiden Coordinaten Tε und $\varepsilon\theta$ der Hilfsellipſe $\alpha\beta$, und beſchreibe alsdann mit der Abſciſſe OT als der reellen, und mit der Ordinate $O\theta$ als der imaginären Axe eine Hyperbel TU. Hierauf projicire man den Punkt U, in welchem dieſe Hyperbel den ſichtbaren Umriß ABD ſchneidet, in U′, von wo aus man die beiden Coordinaten $U'\pi$ und $\pi\zeta$ der Hilfsellipſe zieht, und beſchreibe nun mit der Abſciſſe O′U′ und der Ordinate $O'\zeta$ als Halbaxe eine Ellipſe $\zeta T'U'$, welche die Vertikalprojection der bereits in TU horizontal projicirten Krümmungslinie iſt. Man ſieht leicht ein, daß dieſe Krümmungslinie **unterſchief**, aber **geſchloſſen** iſt, und daß ſie über und unter, vor und hinter den Hauptebenen des Ellipſoids ſymmetriſche Parthien hat, weßhalb ihre beiden Projectionen nur ein begrenztes hyperboliſches oder elliptiſches Stück darſtellen.

§. 738.

Was die Krümmungslinien der zweiten Art betrifft, ſo projiciren ſie ſich horizontal und vertikal in den Fig. 144
Ellipſen (φMV, $\varphi' M'V'$), (ηNI, $\eta' N'I'$), ... welche auf folgende Art conſtruirt werden. Nachdem man einen beliebigen Punkt V zwiſchen α und A angenommen, ziehe man die beiden Coordinaten Vδ und $\delta\psi$ der Hilfs-

*) Analyt. Geom. im Raum, Kap. 16.

hyperbel $\alpha\gamma$; alsdann beſchreibe man über den Geraden OV und Oψ, als Halbaxen, eine Ellipſe ψVφ. Hierauf projicire man den Scheitel φ oder ψ dieſer Curve auf die in EC'' aufgeklappte Ellipſe und erhebe den Punkt φ'' in φ' auf der Vertikalebene. Zieht man nun die beiden Coordinaten $\varphi'\mu$ und μW' der Hilfsellipſe X'Z'; ſo erhält man die beiden Halbaxen O'W' und O'φ' der geſuchten Ellipſe φ'V'W', von welcher nur ein Theil zur Vertikalprojection der Krümmungslinie gehört, welche windſchief und geſchloſſen iſt.

§. 739.

Es möge nun auch noch unterſucht werden, welche Veränderungen die Krümmungslinien beider Arten hinſichtlich ihrer Form erleiden, wenn die Punkte T und V ſich dem Punkt α nähern oder ſich von ihm entfernen. Iſt der Punkt T in O und der Punkt V in A, ſo reduzirt die Projection der erſten Krümmungslinie ſich offenbar auf die Gerade BOE und die zweite wird zur Ellipſe ABD, woraus hervorgeht, daß die beiden Hauptellipſen EC'' und ABDE ſelbſt Krümmungslinien ſind; denn die durch alle Punkte der einen oder der andern dieſer Curven gezogenen Normalen des Ellipſoids liegen in ihrer Ebene und müſſen ſich daher nach einander ſchneiden. Wenn die Punkte T und V ſich dem Punkte α nähern, ſo verengen die Hyperbel TU und die Ellipſe VMφ ſich immer mehr, und ſind endlich jene Punkte in α angekommen, ſo reduzirt die Ellipſe ſich auf die Gerade $\alpha\omega$, während die Hyperbel ſich in die zwei geradlinigen Stücke αA und ωD verwandelt, ſo daß hier die beiden Krümmungslinien zuſammenfallen und mit einander die Hauptellipſe (AD, A'C'D') bilden. Man ſieht hieraus, daß der Punkt α und ſein homologer ω auf dem Ellipſoid vier beſondere Punkte (α, α'), (α, α''), (ω, ω'), (ω, ω'') beſtimmen, für welche die Krümmungslinien beider Arten zuſammenfallen, wie es auch die Vertikalprojection zeigt, wo die Ellipſen ζT'U' und φ'V'W' nach und nach breiter werden, die eine in horizontaler, die andere in vertikaler Richtung; oder vielmehr: in dieſen vier Punkten wird die Richtung der Krümmungslinien unbeſtimmt, wie die Analyſis beweist, und die Krümmung der Fläche iſt gleichförmig um jeden derſelben herum, daher ſie denn, der Definition des §. 692 zufolge, Nabelpunkte ſind.

§. 740.

Die Analyſis beweist ferner, daß auf der Vertikalebene alle Ellipſen beider Reihen in die Raute X'F X''Z'', welche die Hauptellipſe A'C'D'F' in den vier Nabelpunkten berührt, eingeſchrieben ſeien. Um nun eine Anwendung dieſer ſchönen Theorie zu zeigen, möge hier ſtehen, was Monge über dieſen Gegenſtand geſchrieben hat.

§. 741.

„Wenn ein Raum, deſſen Horizontalprojection von einer Ellipſe umſchrieben iſt, gewölbt werden ſollte, ſo könnte man dem Gewölbe keine paſſendere Form geben, als die eines Halbellipſoids, deſſen eine Hauptellipſe zugleich die ſeines Anfangs wäre; und falls das Gewölbe in Stein ausgeführt werden ſollte, müßte die Eintheilung der Fläche in Gewölbſteine vermittelſt der Krümmungslinien geſchehen, deren Conſtruction wir angegeben haben, und die Fugen müßten entwickelbare und normal auf dem Gewölbe ſtehende Flächen ſein. Durch die Theilungslinien der Gewölbeſteine aber würde die ganze Gewölbefläche in rechtwinklige, zur Aufnahme von Decorationen geeignete Felder getheilt, welche durchaus nichts Unnatürliches hätten, weil ſie eine nothwendige Folge der zuerſt gegebenen Ellipſe wären; dagegen würde die Größe, welche man der halben Vertikalaxe geben wollte, von der Beſtimmung des Gebäudes abhängen.“

„Falls nun kein Grund vorhanden wäre, die Vertikalaxe einer der beiden Horizontalaxen gleich zu machen, ſo hätte man alſo drei ungleiche Axen. Unter dieſer Vorausſetzung aber könnte die Vertikalaxe größer als kleiner als die beiden andern oder zwiſchen dieſen enthalten ſein. Im erſten Falle erhielte man ein übervolles

im zweiten ein gedrücktes und im dritten ein volles oder mittleres Gewölbe. Das übervolle Gewölbe hat in der Regel mehr Kühnheit und Würde, und falls der Anfang des Gewölbes sich in beträchtlicher Höhe befände, so müßte, was auch das Gebäude für eine Bestimmung haben möchte, ein übervolles Gewölbe angewendet werden; denn bei einer großen Höhe erscheinen die vertikalen Dimensionen stets kleiner als sie wirklich sind, so daß jedes andere Gewölbe sich dem Auge als allzu platt darstellen würde. Dagegen wäre das gedrückte Gewölbe, insofern es das Luftvolumen vermindert, der Stimme eines Redners günstiger. Sollte der innere Raum durch zwei an dem Gewölbe aufgehängte Kronleuchter erleuchtet werden, so müßte man entweder ein übervolles oder ein gedrücktes Gewölbe wählen, weil in beiden Fällen die Fläche desselben zwei Nabelpunkte erhielte, welche, symmetrisch über der großen Are der Horizontalellipse liegend, und durch die Art, wie die Felder um sie her vertheilt sind, sehr sichtbar gemacht, die natürlichen Aufhängepunkte wären; das Verhältniß zwischen den Aren müßte man natürlich so wählen, daß jene Punkte eine schickliche Stelle bekämen."

„Wenn hingegen das Gebäude vier große Thüröffnungen bekommen, oder wenn das Gewölbe von vier Säulengruppen getragen werden sollte, oder endlich, wenn man bei der innern Verzierung vier symmetrisch vertheilte Träger anwenden wollte, so müßte man das mittlere Gewölbe wählen, bei welchem die vier Nabelpunkte in der Anfangsellipse liegen, und die Grundmauern oder Träger müßte man an den vier Endpunkten der Aren anbringen, weil in der Gegend dieser Punkte und fern von den Nabelpunkten, die durch die Decoration des Gewölbes sichtbar gemachten Krümmungslinien, welche alle die Anfangsellipse vertikal schneiden, sich langsamer von der Linie des größten Falles der Fläche entfernen."

§. 742.

„Man beschäftigt sich gegenwärtig mit dem Bau der Säle für die beiden gesetzgebenden Kammern; die Räume, über welche man bisher für solche Säle verfügen konnte, nöthigten den Baumeister dem Amphitheater weniger Tiefe gegenüber vom Redner als auf den beiden Seiten desselben zu geben; da aber die Erfahrung gelehrt hat, daß die Stimme viel weiter dringt, wenn sie geradeaus geht, so erscheint jene Anordnung des Baus ganz derjenigen entgegen, die man hätte treffen sollen. Unter allen länglichten Formen nun, die man dem Amphitheater geben könnte, ist keine einfacher und schöner als die Ellipse; man muß daher dem Saale eine elliptische Form geben und ihn durch ein gedrücktes Ellipsoid überwölben."

„Nun ist in dem Saale erstlich Raum für ein Büreau erforderlich, vor welchem sich die Rednertribüne befindet. Weist man diesem Büreau an einem der Scheitel der Ellipse seine Stelle an, so kann man ihm daselbst hinreichenden Raum geben für alle Bedürfnisse, welche der Dienst beim Büreau erfordert; die Rednertribüne muß natürlich unter einen der Nabelpunkte des Gewölbes kommen, und für das Amphitheater bleibt alsdann der entgegengesetzte Theil der Ellipse. Eine rings um den Saal herum laufende Gallerie, die sich aber in ziemlicher Höhe befinden müßte, damit sie weit genug vom Amphitheater entfernt wäre, enthielte die Plätze für das Publikum. Der Saal, der weder Tribünen, noch sonstige Unregelmäßigkeiten enthielte, könnte durch Säulen gestützt sein, und jeder derselben könnte eine Rippe des Gewölbes (nervure de la voute) in aufsteigender Krümmungslinie entsprechen. Alle diese, vertikal auf der Anfangsellipse stehenden Rippen würden sich um den einen oder den andern Nabelpunkt herum krümmen und auf der andern Seite wieder nach den entgegengesetzten Säulen senkrecht hinab steigen; zugleich würden sie von andern Rippen, in der Richtung der Krümmungslinien zweiter Art rechtwinklig durchschnitten. Die Zwischenräume zwischen diesen Rippen könnten durchbrochen sein, um als Fenster zu Erhellung und Lüftung des Saales zu dienen, und gewiß würde ein solches Fensterwerk ein weniger seltsames Aussehen haben, als die Rosen unserer gothischen Kirchen. Endlich würden zwei Kronleuchter, welche an den Nabelpunkten des Gewölbes, in denen das ganze Gewölbe zusammen zu laufen scheint, aufgehängt wären, zur Erleuchtung des Saales bei nächtlichen Sitzungen dienen."

„Wir gehen nicht weiter ins Einzelne hierüber ein; es genügt uns, den Künstlern die Anwendung unserer Theorie an einem einfachen Gegenstande nachgewiesen zu haben, dessen Ausschmückung bei allem Reichthum doch nichts Willkürliches enthielte, weil sie hauptsächlich darin bestände, den Augen des Beschauers das höchst anmuthige Gesetz zu enthüllen, das in der Natur jenes Gegenstandes gegründet ist."

§. 743.

Um die von Monge angegebenen Ideen auf die Figur 144. anwenden zu können, müßte man die aufsteigenden Krümmungslinien so vertheilen, daß sie die Anfangsellipse ABDE in gleiche Theile US, SR, ... theilten. Hierauf würde man den gegebenen Punkt U in U′ projiciren, wodurch man die beiden Halbaxen U′π und πζ der Ellipse ζT′U′ erhielte; diese aber würde, wenn man sie zeichnete, den Punkt T′ liefern, der, in T projicirt, den Scheitel und die Axen Tε, εθ der gesuchten Hyperbel TU bestimmte. Was die Linien der zweiten Krümmung betrifft, so müßten sie durch Punkte gehen, welche die Halbellipse EC″B in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilten, und aus jedem Theilpunkte φ″, den man in ψ projicirte und nach φ′ erhöbe, würde man, wie in §. 738, die Halbaxen ψδ und δV′, φ′μ und μW′ der Ellipsen ψVφ und φ′V′W′ bestimmen können, in welchen eine Linie der zweiten Krümmung sich projicirt.

§. 744.

143. Das Oskulationshyperboloid längs einer Erzeugenden einer windschiefen Fläche S. Aus §. 578 ist bekannt, daß, wenn man in den zu den drei Punkten M, M′, M″ einer Erzeugenden G gehörigen Berührungsebenen beliebige Gerade MQ, M′Q′, M″Q″ zöge, und sie als Leitlinien der beweglichen Geraden G annähme, man auf diese Art ein Hyperboloid mit Einem Mantel erhalten würde, welches die Fläche S der Geraden GMM′M″ berührte, d. h. welches in jedem Punkt dieser Linie die nämliche Berührungsebene hätte, wie S, so daß das Flächenelement MM′M″m″m′m von unbestimmter Länge beiden Flächen gemeinschaftlich wäre. Nun gibt es unendlich viele Hyperboloide, welche diese Eigenschaft haben, weil die drei Leitlinien MQ, M′Q′, M″Q″ nach Belieben in den Berührungsebenen gezogen werden können. Wählt man aber die Gerade MQ so, daß sie die Curve Mα, in welcher die Fläche S von ihrer Berührungsebene an M geschnitten wird, berührt, so hat bekanntlich (§. 731) diese Tangente zwei Elemente Mm und mn mit Mα und mithin auch mit S gemeinschaftlich; ebenso ist es auch mit den Geraden M′Q′, M″Q″, wenn man sie so wählt, daß sie Tangenten an den Schnitten M′α′, M″α″ sind, welche von den Berührungsebenen an M′ und M″ mit der Fläche gebildet werden; indem man also diese drei besondern Tangenten als Leitlinien des Hyperboloids annimmt, wird letzteres zwei Flächenelemente MM″m″m und mm″n″n mit S gemeinschaftlich erhalten und daher das Oskulationshyperboloid dieser Fläche sein, längs der gegebenen Geraden GMM′M″. Da bei Erzeugung dieses Hyperboloids nur ganz bestimmte Gegebene angewendet werden, so ist es auch das einzige, und hat mit der Fläche S eine innigere Berührung als alle andern; ferner sind für jeden Punkt der Geraden GM die Krümmungslinien von S Tangenten an denen des Oskulationshyperboloids, und diese letzteren können leicht, nach der Bemerkung des §. 732 bestimmt werden.

Anhang.

rſchiedene Sätze, welche in der Perſpective, Schattenlehre und Stereotomie ihre Anwendung finden.

§. 745.

Wenn ein Cylinder durch eine ebene Curve in eine Kugel eindringt, ſo iſt der zweite Aſt Durchſchnitts ebenfalls **eben**, ferner iſt dieſe Austrittscurve, welche ein der Eintrittscurve her Kreis iſt, ſenkrecht auf derjenigen Ebene, welche rechtwinklig auf der Eintrittscurve ſteht, und den Seiten Cylinders parallel iſt.

Man lege durch den Mittelpunkt der Kugel eine Projectionsebene, welche mit den Erzeugenden des Cylinders Fig. 145.
llel iſt und ſenkrecht auf der Eintrittscurve ſteht, ſo wird dieſe Curve, welche nothwendig ein Kreis iſt, h die dem Durchmeſſer dieſes Kreiſes gleiche Sehne AB dargeſtellt ſein, und die Erzeugenden AC und werden in den Punkten A′ und B′, die mit A und B auf demſelben größten Kreiſe liegen, wieder aus Kugel herausgehen, während irgend eine andere Seite DM die Kugel in einem Punkte verläßt, deſſen Pro- on M′ auf der Geraden A′B′ liegen muß. Denn alle die parallelen Sehnen AA′, BB′, MM′, ... der el werden durch die auf ihre Richtung ſenkrechte, durch den Mittelpunkt gehende Ebene OR halbirt; da die Ordinaten FA, PM, IB beziehlich den Ordinaten EA′, P′M, IB′ gleich ſind, ſo müſſen die drei Punkte M′, B′, ſich in gerader Linie befinden, weil auch die drei Punkte A, M und B es ſind. Hieraus aber folgt, die Austrittscurve auf der Geraden A′M′B′ projicirt und mithin eben iſt; und da ſie offenbar ſenkrecht der Projectionsebene ſteht, und der Durchmeſſer AB = A′B′ iſt, ſo entſpricht ſie auch den übrigen, oben geſprochenen Bedingungen.

Wenn alſo der Cylinder in die Kugel durch einen größten Kreis aOb eindränge, ſo wäre die Austritts- e, der andere größte Kreis a′Ob′, und um alſo letztere Curve, welche bei den Schatten einer Niſche ommt, leichter zu conſtruiren, darf man nur eine Projectionsebene anwenden, welche den Lichtſtrahlen llel und ſenkrecht auf der Eintrittscurve iſt, weil auf einer ſolchen Ebene die Austrittscurve ſich in einer aden projicirt.

§. 746.

Wenn bei dem Durchſchnitt eines Kegels mit einer Kugel die Eintrittscurve **eben** iſt, ſo es auch die Austrittscurve.

Man nehme als Ebene der Figur diejenige an, welche durch den Mittelpunkt der Kugel und die Spitze Fig. 146.
Kegels geht und zugleich ſenkrecht auf der Eintrittscurve iſt, und nenne ſie die Horizontalebene. Alsdann

projicirt die Eintrittscurve, welche nothwendig ein Kreis ist, sich in einer Sehne AB der Kugel, und v die in der Horizontalebene liegende Spitze des Kegels ist, so gehen die Seiten SA und SB desselben i in den Punkten a und b wieder aus der Kugel heraus; und es läßt sich beweisen, daß die Gerade Totalprojection der Ausgangscurve sei. Denn legt man durch denjenigen Punkt der conischen Fläche, in m projicirt ist, eine mit AB parallele Vertikalebene A′mB′, so schneidet diese den Kegel in einem vom Durchmesser A′B′, der in A′m′B′ aufgeklappt ist; und da bekanntlich die Ordinate m′m der Kegmittlere Proportionale ist zwischen den beiden Theilen jenes Durchmessers, so hat man

$$\overline{mm'}^2 = A'm \,.\, mB'.$$

Aber die beiden Dreiecke mA′a und mB′b sind ähnlich; denn der Winkel A′ ist gleich dem Winkel SA dieser hat den nämlichen Bogen zum Maße wie der Winkel abB; mithin ist

$$A'm \,.\, mB' = am \,.\, mb,$$ und aus dieser und der vorigen Gleichung folgt, daß auch

$$\overline{mm'}^2 = am \,.\, mb;$$

woraus sich ergibt, daß die in mm′ aufgeklappte Ordinate auch dem über ab als Durchmesser beschr Vertikalkreise angehört; und da dieser neue Kreis sich offenbar auf der gegebenen Kugelfläche befind liegt mithin auch die Spitze der Ordinate mm,′ d. h. der in m projicirte Punkt des Kegels in der Kug Hieraus aber folgt, daß die Vertikalebene ab den Kegel und die Kugel in einem gemeinschaftlichen schneidet, welcher der zweite Ast des Durchschnittes oder die Austrittscurve des Kegels ist, was weisen war.

§. 747.

Der Vertikalkreis ab ist eben derjenige, den man den anti-parallelen Schnitt des kreisförmigen SAB nennt. Denn dieser Schnitt muß erstlich senkrecht auf der Hauptebene des Kegels stehen, nämlderjenigen Ebene, welche, durch den Scheitel S und den Mittelpunkt C der kreisförmigen Grundlinie zugleich senkrecht auf letzterer steht; nun aber fällt diese Ebene offenbar mit der der Figur zusammen, we Punkte S, O und den Halbmesser OC enthält. Hernach soll der anti-parallele Schnitt auf der Hau ein Dreieck Sab bilden, das dem Dreiecke SAB ähnlich, aber ihm in Beziehung auf die Seiten nicht sei, — eine Bedingung, welche hier gleichfalls erfüllt ist, weil, wie oben bemerkt wurde, die Winkel SA Sba denselben Bogen zum Maße haben.

§. 748.

§. 147. Wenn der erste Durchschnitt zweier Cylinder vom zweiten Grade eine **ebene Curve** ist die Austrittscurve gleichfalls **eben.**

Man nehme an, die Ellipse EMM′FN′N sei die den beiden Cylindern gemeinschaftliche Eintritt (die auch eine Hyperbel oder eine Parabel sein könnte, ohne daß der Beweis sich änderte); wendet ma verschiedene schneidende Ebenen an, welche den Erzeugenden beider Cylinder zugleich parallel sind, so sd dieselben die Ellipse in den unter sich parallelen Sehnen MN, M′N′, ... und außerdem schneidet je Ebenen die beiden Cylinder in vier Geraden. Diejenige nun von diesen Geraden, welche der schneidenden MN entsprechen, nämlich MA und NB, Ma und Nb bilden durch ihren wechselseitigen Durchschnitt ein lelogram MnNm, dessen zwei Spitzen m und n offenbar der Austrittscurve angehören; eben so wird auch Curve durch die Punkte m′ und n′ gehen, in welchen sich die in der schneidenden Ebene M′N′ enthaltene Seiten M′A′ und N′B′, M′a′ und N′b′ schneiden, u. s. w. Nun sind alle die Diagonalen mn, m′n′, offenbar parallel, gehen durch die Mitten der Sehnen MN, M′N, . . . und schneiden folglich alle den zu Sehnen gehörigen Durchmesser EF der Ellipse. Mithin bilden diese Diagonalen, indem sie alle auf der

n EF aufliegen, eine ebene Fläche, welche die ganze Austrittscurve m m′ F n′ n enthält, und somit ist der en ausgesprochene Lehrsatz erwiesen.

§. 749.

Die Curve m m′ F n′ n ist von der nämlichen Art, wie die Eintrittscurve; denn offenbar sind die zu den meinschaftlichen Abszissen OP, OP′, . . . gehörigen Ordinaten MP und mP, M′P′ und m′P′ proportionirt, daß also die beiden Durchschnittscurven Ellipsen sind, die einen gemeinschaftlichen Durchmesser EF haben. Es auch einleuchtend, daß die Tangenten ET, EV, . . beider Curven an den Endpunkten dieses Durchmessers n vorhin angewendeten schneidenden Ebenen ebenfalls parallel sind, wie die Seiten beider Cylinder; folglich ben die gegebenen Cylinder zwei gemeinschaftliche und parallele Berührungsebenen.

§. 750.

Wenn zwei Flächen vom zweiten Grade eine, hinsichtlich der Größe und Lage gemein- aftliche Axe haben, so können sie sich nur in zwei ebenen Curven schneiden, welche beide rch die gemeinschaftliche Axe gehen.

Nach der Voraussetzung haben beide Flächen einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, und läßt man durch Fig. 148.
sen die horizontale Projectionsebene gehen, welche man diesesmal senkrecht auf der gemeinschaftlichen Axe , O′C′) annimmt, so schneidet sie die beiden gegebenen Flächen in zwei concentrischen Curven ABDE und de vom zweiten Grade. Schneiden sich nun diese letzteren in zwei Punkten G und H, so muß es noth- ndig noch zwei andere Punkte I und K geben, welche den ersteren diametral entgegengesetzt und ebenfalls beiden rven gemeinschaftlich sind. Alsdann aber schneidet die Vertikalebene GI die gegebenen Flächen in zwei Curven, lche völlig zusammenfallen, weil sie dieselben Halbaren OG nnd O′C′ haben; mithin ist dieser eine Schnitt ier der Aeste des Totaldurchschnittes beider Flächen, und der andere Ast desselben ist der durch die Vertikalebene K erzeugte Schnitt.

Dieser Beweis läßt sich auf alle Flächen vom zweiten Grade, welche einen Mittelpunkt haben, anwenden, m sie von einerlei Art oder nicht, vorausgesetzt, daß die gemeinschaftliche Axe in beiden Flächen zugleich reell er imaginär sei.

§. 751.

Wenn die erste der beiden Flächen keinen Mittelpunkt hätte, so wäre ihre Axe unendlich groß, und folglich ßte die zweite Fläche, um dem vorigen Lehrsatze zu genügen, ebenfalls ein Paraboloid mit demselben Scheitel . Schnitte man alsdann diese beiden Paraboloide durch eine auf der gemeinschaftlichen Axe senkrechte Ebene, würden die beiden dadurch erzeugten Schnitte, welche offenbar den nämlichen Mittelpunkt hätten, sich in vier ander diametral entgegengesetzten Punkten schneiden, wie G und I, H und K in der vorigen Figur; hieraus gte alsdann, daß die durch die Gerade GI oder HK und durch die gemeinschaftliche Axe gelegte Ebene, die den Paraboloide in zwei Parabeln schneiden würde, die, weil sie einerlei Axe, denselben Scheitel und einen meinschaftlichen Punkt G oder H hätten, nothwendig in eine zusammenfallen müßten.

§. 752.

Man kann den Lehrsatz des §. 750 verallgemeinern, wenn man ihn auf zwei Flächen vom zweiten Grade wendet, welche zwei gemeinschaftliche und parallele Berührungsebenen haben. Denn offenbar muß Gerade, welche die Berührungspunkte dieser Ebenen verbindet, ein, beiden Flächen gemeinschaftlicher Durch- sser sein; da nun die diesem Durchmesser conjugirte Diametralebene mit den gegebenen Berührungsebenen

parallel sein muß, so ist sie die nämliche für die erste und für die zweite Fläche und schneidet diese beiden in zwei concentrischen Curven wie ABDE und abde, so daß die durch GI oder HK und durch den gemeinschaftlichen Durchmesser gelegte Ebene in den gegebenen Flächen zwei Durchschnitte erzeugen wird, welche zusammenfallen müssen, weil sie zwei nach Richtung und Länge gemeinschaftliche conjugirte Durchmesser haben; mithin schneiden sich die beiden Flächen in zwei ebenen Curven.

§. 753.

Fig. 149. Ein besonderer Fall dieses Lehrsatzes kommt beim Durchschnitt zweier cylindrischer Gewölbebogen vor, welche die nämliche Anfangsebene und die nämliche Höhe haben. Denn wenn der Kreis AMNB und die Ellipse amnb, deren Vertikalaxen gleich sind, die Cylindergrundlinien vorstellen, welche hier um die in der horizontalen Anfangsebene liegenden Axen AB und ab aufgeklappt sind, so sieht man erstlich, daß die vier Erzeugenden AG, BH, aG, bK sich schneiden und das Rechteck GHIK bilden. Schneidet man hierauf die beiden Cylinder durch eine und dieselbe Horizontalebene, so erhält man vier durch die Punkte M, N, m, n gehende Seiten, welche sich nothwendig in Punkten schneiden, deren Projectionen M', N', M'', N'' gerade auf die Diagonalen des Rechtecks GHIK fallen; denn da die beiden Ordinaten pm und PM gleich sind, so verhalten sich bekanntlich die Abszissen ap und AP zu einander, wie die beiden Axen ab und AB, woraus sich die Proportion

$$G\alpha : \alpha M' = GK : KI$$

ergibt; aus dieser aber folgt, daß der Punkt M' mit G und I in gerader Linie liegt. Ebenso beweist man, daß N'' auf die nämliche Diagonale fällt, während N' und M'' auf der Geraden HK liegen; mithin besteht der Totaldurchschnitt der gegebenen Cylinder aus zwei in den Vertikalebenen GI und HK liegenden Ellipsen.

§. 754.

Bemerkung. Wenn zwei beliebige Flächen S und S' sich in einem Punkte berühren und noch überdieß sich in einer Curve mit zwei Aesten schneiden, welche durch den gegebenen Punkt gehen, so ist es nicht mehr möglich, die Tangenten dieser Aeste im vielfachen Punkte durch die Methode der Berührungsebenen zu finden, weil diese zusammenfallen. Setzt man aber statt der Flächen S und S' zwei Flächen Σ und Σ' vom zweiten Grade, welche mit ersteren oskuliren, so ist einleuchtend, daß der Durchschnitt von Σ mit Σ' die nämlichen Tangenten haben muß, wie der Durchschnitt von S und S'. Da es nun in jeder Fläche Σ oder Σ' eine Axe c oder c' gibt, deren Länge willkürlich ist (§. 696), jedoch immer in der zu dem gegebenen Punkt gehörigen Normale liegen muß, so werden, wenn man diese Axe in beiden Flächen Σ und Σ' gleich groß nimmt, diese sich in zwei ebenen Curven schneiden (§. 750), deren Projectionen auf einer senkrecht auf der Normale stehenden Ebene sich auf zwei leicht construirbare Geraden reduciren werden; diese Geraden sind alsdann die Tangenten der zwei Aeste des Durchschnitts von S mit S', für den vielfachen Punkt. Diese scharfsinnige Methode ist von Th. Olivier, und befindet sich im 21. Hefte des Journal de l'Ecole polytechnique; der Erfinder derselben hat sie auch auf das Conoid des ringförmigen Kreuzgewölbes angewendet, dessen Tangenten im §. 648 auf anderem Wege gefunden wurden.

§. 755.

Fig. 150. **Conjugirte** oder reciproke Tangenten. Wenn ein Kegel VMKN um eine krumme Fläche zweiten Grades beschrieben ist, so sind irgend eine Seite VM dieses Kegels und die Tangente MT', welche durch den Durchschnittspunkt jener Seite mit der Berührungslinie MKN an letztere gezogen wird, stets beziehlich

rallel mit den beiden conjugirten Durchmeſſern des Schnittes, den eine der Berührungsebene
T' parallele Ebene mit der Fläche macht.

Um dieſen Lehrſatz*) zu beweiſen, nehme man als Ebene der Figur diejenige Diametralebene an, welche
m ſie durch die Seite MV und den Durchmeſſer VO geht, die Fläche in einer Curve NXMY ſchneidet, in
cher MV eine Tangente iſt. Conſtruirt man nun ferner die mit VO conjugirte Diametralebene, ſo iſt der
nitt dieſer letzteren mit der Fläche eine der NKM parallele und ähnliche Curve (§. 354), und die Tangenten
' und MT' ſind folglich parallel; mithin iſt der zu OY conjugirte Durchmeſſer eine der MT' parallele Gerade
. Da alſo die drei Durchmeſſer OX, OY, OZ, conjugirt unter ſich ſind, ſo folgt, daß die Ebene XOY
Figur alle mit OZ parallelen Sehnen halbirt; das Nämliche wird alſo auch der mit MV parallel gezogene
chmeſſer RY' thun; und da folglich dieſer Durchmeſſer der conjugirte von OZ iſt in dem Schnitte RZY',
cher der Berührungsebene VMT' parallel iſt, ſo hat der Lehrſatz alſo ſeine Richtigkeit, indem OY' und OZ
Seite VM und der Tangente MT' beziehlich parallel iſt.

§. 756.

Dieſe beiden Tangenten der Fläche heißen auch reciproke oder Wechſeltangenten, weil, wenn man auf MT'
Spitze eines neuen um das Ellipſoid beſchriebenen Kegels annähme, alsdann die Berührungscurve dieſes
gels die Gerade MV zur Tangente hätte. Denn der mit der gegebenen Fläche vermittelſt einer zur Berüh-
gsebene an M parallelen Ebene gemachte Schnitt wäre wieder die Curve RZY', deren mit MT' paralleler
chmeſſer zum conjugirten Durchmeſſer die Gerade OY' hat; da nun die Tangente an der neuen Berührungs-
e, nach dem vorigen Lehrſatz, parallel mit OY' ſein muß, ſo kann ſie nur MV ſein; denn dieſe entſpricht
r Bedingung.

§. 757.

Dieſe Wechſelſeitigkeit und der Lehrſatz des §. 755, auf welchen ſie ſich gründet, läßt ſich leicht auf einen Fig. 151.
irgend eine Fläche S beſchriebenen Kegel ausdehnen. Denn es ſei AMB die Berührungscurve dieſer beiden
nmen Flächen, MT eine ihrer Tangenten und VM die Kegelſeite, welche durch den Berührungspunkt der
ngente geht; dieſe Seite kann betrachtet werden (§. 182) als der Durchſchnitt der beiden unendlich nahen Be-
rungsebenen, welche durch die Spitze V an die Fläche gelegt ſind, und die ihre Berührungspunkte p und q
S auf der Curve AMB haben. Stellt man ſich nun das Ellipſoid oder Hyperboloid Σ vor, das in M
S oskulirt, ſo haben die beiden Flächen S und Σ in der Umgegend von M zwei aufeinanderfolgende Be-
rungsebenen gemeinſchaftlich; mithin gehören die Punkte p und q auch der Berührungscurve A'MB' desjeni-
Kegels an, welcher ſeine Spitze in V hat und um Σ beſchrieben iſt; und folglich hat dieſe letztere Curve
Tangente ebenfalls MT. Nun iſt aus §. 755 die Beziehung bekannt, in welcher, in der Fläche Σ, die
aden MV und MT zu einander ſtehen; mithin ſind alſo bei jeder Fläche S die Seite des umſchriebenen
gels und die Tangente an der Berührungscurve beziehlich den beiden conjugirten Durch-
ſſern des Schnittes parallel, welcher parallel mit der Berührungsebene, in der mit S oskulirenden Fläche vom zweiten Grade gemacht wird, und dieſe Tangenten zeigen wieder die in §. 756
geſprochene Wechſelſeitigkeit.

§. 758.

Dieſer Lehrſatz, der bei der perſpectiviſchen Darſtellung eines Wulſtes ſeine Anwendung findet, gilt offen-

*) Er iſt von Dupin, wird aber hier auf eine andere Art bewieſen.

bar auch für einen um eine beliebige Fläche beschriebenen Cylinder, weil man diesen als einen Kegel betrachten kann, dessen Spitze V in unendlicher Entfernung auf MV liegt; und es wäre leicht, ihn durch ähnliche Betrachtungen, auf irgend eine entwickelbare Fläche auszudehnen, welche um eine andere gegebene Fläche beschrieben wäre.

Kottirte Ebenen (Plans cotés).

§. 759.

Um Punkte und Linien graphisch darzustellen, darf man nur, wie man bisher gesehen hat, sie auf zwei feste Ebenen projiciren; aus diesen Projectionen kann man alsdann Alles ableiten, was man in Beziehung auf die Entfernung der Punkte, auf die Form der Linien oder der Flächen, welchen sie angehören, zu wissen wünscht. In gewissen Fällen aber, wie bei Fortificationszeichnungen und bei einigen Aufgaben der Perspective findet man es bequemer, die Gegenstände nur in ihrer Horizontalprojection darzustellen, und dieser alsdann Zahlen, Kotten*) (cotés) beizufügen, welche die Höhe der verschiedenen Punkte über einer festen Horizontalebene anzeigen, die man niedriger nimmt als alle darzustellenden Gegenstände. Es ist einleuchtend, daß diese Methode, bei welcher man nur eine einzige Projectionsebene anwendet, hinreicht, um die Lage eines jeden Punktes im Raum zu bestimmen; denn die ihm beigefügte Zahl vertritt die Stelle seiner Vertikalprojection, und kann selbst noch dienen, diese Projection zu finden, im Falle sie gewünscht würde. Auch wird man gleich sehen, wie man durch diese Methode alle Elementaraufgaben der beschreibenden Geometrie leicht und auf eine Art auflösen kann, welche besonders für solche Fälle tauglich ist, wo die gegebenen Dimensionen durch die Zahlen eines sehr verjüngten Maßstabes ausgedrückt sind. Dazu kommt noch, daß in der Fortification, wegen der geringen Erhebung der meisten Gegenstände über dem Boden, die Anwendung einer vertikalen Projectionsebene dadurch sehr unbequem würde, weil auf derselben viele der betrachteten Linien, bei ihrer fast horizontalen Lage, sich erst in großer Entfernung schneiden würden.

§. 760.

Da dieses Verfahren zuerst bei Küstenabhängen angewendet wurde, welche unterhalb des Meeres lagen und auf das Niveau desselben bezogen werden mußten, so hat man auch später den Gebrauch beibehalten, die vertikalen Ordinaten von oben nach unten zu zählen, indem man sie als Lothe betrachtet, welche von einer über allen darzustellenden Gegenständen erhabenen Vergleichungsebene (plan de comparaison) herab gefällt wurden, während die Projectionsebene, auf welcher man construirt, stets horizontal und in beliebiger Entfernung unterhalb jener Gegenstände angenommen wird. Uebrigens erschweren diese Annahmen die Auffindung des Höhenunterschiedes zweier gegebenen Punkte nicht im Geringsten; man muß sich nur erinnern, daß derjenige zweier Punkte, dem die größere Zahl beigefügt ist, tiefer liegt als der andere.

§. 761.

Tafel 59. Diesem nach wird also ein Punkt dargestellt durch seine Projection und seine Kotte, die z. B. in Fig. 5 durch 12,5 bezeichnet ist. Im Falle mehrere bemerkenswerthe Punkte in derselben Vertikale liegen, muß die Kotte eines jeden derselben ihrer gemeinschaftlichen Projection beigeschrieben werden.

---

*) Da dieser Ausdruck in mehreren der neuesten Werke über Fortification und Terrainzeichnen vorkömmt, so wurde er auch hier beibehalten.

Anmerkung des Uebersetzers.

§. 762.

Eine Gerade ist gegeben durch ihre Projection sammt den Kotten zweier ihrer Punkte. Es ist also leicht, vermittelst eines aufgeklappten Trapeziums, graphisch die Länge eines Theils dieser Geraden, ihre Neigung gegen den Horizont, die Kotte eines dritten durch seine Projection gegebenen Punktes dieser Linie, oder auch umgekehrt, die Projection eines durch seine Kotte bestimmten Punktes zu finden; da man aber bei der wirklichen Anwendung, die hier beabsichtigt wird, zuletzt doch die erhaltenen Resultate in Zahlen ausdrücken müßte, so ist es genauer und bequemer, gleich anfangs den Gefäll- oder Böschungsmaßstab (échelle de pente) der gegebenen Linie zu construiren. Es seien z. B. (14,7) und (12,5)*) die beiden gegebenen Punkte; nun suche man zuerst, wie viel auf der Projection der Geraden die Entfernung L zweier Punkte beträgt, deren Kotten um ein Meter differiren; dieses geschieht durch folgende Proportion, in welcher D die Entfernung der beiden gegebenen Projectionen bezeichnet: Fig. 1.

$$(14{,}7 - 12{,}5) : D = 1 : L = \frac{5}{11} D.$$

Hat man nun D in Theilen des Horizontalmaßstabes der Figur gemessen, so findet man leicht L; und trägt man $^5/_{10}$ dieser Länge an den Punkt (14,7), so erhält man denjenigen, zu welchem die Kotte 15 gehört. Von letzterem Punkt aus trägt man alsdann die Länge L noch mehrere Male auf die Projection der Linie, um die Punkte zu finden, welche den Kotten 14, 13, 12,.... entsprechen, und erhält auf diese Art die Böschungs-Scale der gegebenen Linie.

§. 763.

Es bezeichne nun A die Projection eines auf dieser Geraden liegenden Punktes, dessen Kotte gesucht werden soll. Fällt A z. B. zwischen die Theilpunkte 13 und 14, so nehme man mit dem Zirkel den horizontalen Abstand des Punktes A vom Punkte 13 und trage ihn auf den Theil des Böschungsmaßstabes, der in Decimeter eingetheilt ist, um zu erfahren, wie viele Decimeter man dem Punkte 13 noch zufügen muß, um die Kotte des in A projicirten Punktes zu erhalten. Die Centimeter kann man nach dem Augenmaße schätzen. Fig. 1.

Eben so leicht findet man auch die Projection eines Punktes, dessen Kotte gegeben ist.

§. 764.

Um die wahre Entfernung zweier, durch ihre Projectionen gegebenen Punkte der Geraden zu finden, suche man zuerst ihre Kotten; hierauf berechne man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhe der Differenz jener Zahlen, und dessen Grundlinie der auf dem Horizontalmaßstabe der Figur genommenen Entfernung der beiden Projectionen gleich ist.

§. 765.

Was die Böschung oder den Fall der Geraden betrifft, so versteht man darunter die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Gerade mit dem Horizonte macht; d. h. den Höhenunterschied zweier Punkte dieser Geraden, dividirt durch die Entfernung ihrer Projectionen. So wird z. B. der Fall der in §. 762 angeführten Geraden durch den Bruch Fig. 1.

$$\frac{14{,}7 - 12{,}5}{D} \text{ oder } \frac{1}{L}$$

*) Die Zahlen beziehen sich alle auf das neue französische Maß: Meter, Decimeter . . . ꝛc.
Anmerkung des Uebersetzers.

ausgedrückt, wo L die in Theilen des Horizontalmaßstabes genommene Entfernung der Projectionen zwei bezeichnet, deren Kotten um ein Meter differiren. Man drückt diese Regel auch dadurch aus, daß m die Neigung einer Geraden sei das Verhältniß der Höhe zur Grundlinie der Böschung.

§. 766.

Fig. 1. Ist umgekehrt die Projection einer Geraden und die Zahl 14,7 eines ihrer Punkte sammt dem den die Linie haben soll, gegeben, so nehme man auf dem Horizontalmaßstabe eine Länge von drei M trage sie an den Punkt (14,7), so erhält man den Punkt (13,7). Nun kennt man zwei kottirte P Geraden und kann also ihren Böschungsmaßstab wie in §. 762 construiren.

§. 767.

Fig. 1. Durch einen gegebenen Punkt (10,6) soll eine Gerade gezogen werden, welche einer gegebenen Geraden parallel sei. Man ziehe durch den gegebenen Punkt eine der Projection Geraden parallele Linie, so ist diese offenbar die Projection der zweiten Geraden. Diese beiden Gerade natürlich denselben Fall haben; verbindet man daher den Punkt (10,6) der zweiten mit demjenigen P ersten Geraden, welcher die nämliche Kotte hat, und zieht hierauf mit der Verbindungslinie Parallelen Theilpunkte der ersten Geraden, so erhält man dadurch unmittelbar den Böschungsmaßstab der gesucht die somit völlig bestimmt ist.

§. 768.

Ist die erste Gerade nur durch zwei kottirte Punkte (14,7) und (12,5) gegeben, so trage man stand D ihrer Projectionen unter den Punkt (10,6), so erhält man einen zweiten Punkt der neuen dessen Kotte offenbar (10,6 + 2,2) oder (12,8) ist. Nun construirt man den Böschungsmaßstab der Geraden wie in §. 762.

§. 769.

Eine isolirte Curve wird durch ihre Horizontalprojection und durch die Kotten einer gewissen ihrer Punkte dargestellt, welche letztere so nahe genommen sein müssen, daß das Auge den auf- oder a den Lauf der Curve erkennen, und daß man die zwischen den Punkten liegenden Bögen als gerade Linien kann. Da aber die Curven fast immer in Verbindung mit Flächen vorkommen, deren Darstellung weit gelehrt wird, so wäre es unnöthig, sich hier damit aufzuhalten.

§. 770.

Fig. 2. Eine Ebene, wenn sie eine wirklich vorhandene Größe und daher auf allen Seiten begrenzt ist durch die Projection ihres Umrisses und durch die Kotten bestimmt, welche den Winkeln dieses Umrisse setzt sind; gewöhnlich aber fügt man noch eine gewisse Anzahl Horizontal- oder Niveauschnitte hinz bei einer Ebene lauter Gerade sein werden, die alle mit der horizontalen Spur der Ebene parallel laufen Schnitte, welche man in gleichen Vertikalabständen, z. B. in dem eines Meters, von einander [redacted] an ihren beiden Endpunkten mit derselben Kotte bezeichnet werden; zieht man nun auf diese [redacted] Senkrechte, so ist diese offenbar die Linie des größten Falles oder die Böschungslinie benen Ebene, und kottirt man die Punkte, in welchen sie die verschiedenen Horizontal- sie der Böschungsmaßstab der Ebene, und wird gewöhnlich durch einen doppelten Darstellungsart ist dieselbe, von der man in der beschreibenden Geometrie Gebrauch

ue durch eine ihrer Horizontalen entstehen läßt, welche, sich selbst parallel, über die Linie des größten Falles
:r Ebene hingleitet.

§. 771.

Ist eine Ebene unbegrenzt und wird sie als nicht wirklich vorhanden betrachtet, so stellt man sie blos Fig. 2,
ch eine ihrer kottirten Horizontalen mit ihrem eingetheilten Böschungsmaßstab dar; d. h. man bezeichnet die bis.
eugende und die Leitlinie dieser Fläche, wodurch sie vollkommen bestimmt ist. Oft auch gibt man blos
eingetheilten Böschungsmaßstab an, weil man alsdann so viele kottirte Horizontalen ziehen kann als man
, indem solche immer senkrecht auf der Richtung des Maßstabes sind.

§. 772.

Ist eine Ebene horizontal; so gibt es für sie keinen Böschungsmaßstab, sondern alle Winkel ihres Um-
s haben gleiche Kotten; und ist die Ebene unbestimmt, so bezeichnet man sie als Horizontalebene mit
r Kotte n. Ist die gegebene Ebene vertikal, so wird sie einfach durch ihre horizontale Spur dargestellt.

§. 773.

Man soll die Ebene bestimmen, welche durch drei gegebene Punkte (9, 4), (14) und (17) Fig.2,
ht. Man verbinde den ersten und den letzten dieser Punkte durch eine Gerade und suche auf dieser, vermittelst bis.
er Proportion wie in §. 772, einen Punkt, welcher der Zahl 14 entspricht; alsdann ist die Gerade, welche
sen letzten Punkt mit dem zweiten der gegebenen Punkte verbindet, offenbar eine Horizontale der gesuchten
ene; und eine durch den Punkt (17) gezogene Parallele ist eine zweite Horizontale dieser Ebene, deren
schungsmaßstab nun leicht gezeichnet und eingetheilt werden kann.

Das nämliche Verfahren kann auch in dem Falle angewendet werden, wenn die gegebene Ebene durch
en gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade gehen sollte; und ist diese Gerade schon mit einem Böschungs-
ßstabe versehen, so ist die Auflösung noch leichter.

§. 774.

Durch eine gegebene Gerade soll eine Ebene gelegt werden, deren Böschung $\frac{1}{n}$ betrage. Fig. 3.
an muß wenigstens die Kotten zweier Punkte dieser Geraden kennen; sie seien hier 10 und 12, 5; betrachtet
n alsdann den ersten Punkt als die Spitze eines senkrechten Kegels, dessen Erzeugungslinien die Neigung $\frac{1}{n}$
)en (§. 765), so darf man nur an diesen Kegel eine Berührungsebene legen, welche durch den zweiten Punkt
t. Beschreibt man nun einen Kreis, der zum Mittelpunkt die Projection des Punktes (10) und zum Halb-
sser eine Länge hat, die, dem Horizontalmaßstabe der Figur entnommen, n mal den Unterschied 2, 5 der
tten der gegebenen Punkte beträgt, so ist dieser Kreis die Spur des Kegels auf der Horizontalebene, in welcher
untere Punkt (12, 5) liegt; zieht man daher durch diesen Punkt zwei Tangenten an den Kreis, so erhält
n die horizontalen Spuren der beiden Ebenen, welche der Aufgabe genügen, und ihre Böschungsscalen erhält
n leicht, weil man ihre [redacted] ben zwei kottirte Punkte kennt. Man sieht übrigens
ht ein, daß die [redacted] g zuläßt oder unmöglich ist, je nachdem die be-
hnete Böschr [redacted] der kleiner ist.

[redacted]

[redacted] Neigung hat, so wird der Kreis,

dessen man sich beim vorigen Verfahren bediente, sehr klein ausfallen und daher für die Anwendung wenig tangen. In diesem Falle nimmt man eine unterhalb der beiden Punkte liegende und durch ganze Zahlen kottirte Horizontalebene an; hierauf beschreibt man auf dieser Ebene zwei Kreise, deren Mittelpunkte die Projectionen der beiden gegebenen Punkte, und deren Halbmesser beziehlich n mal so groß sind als die Höhen der Punkte über diese Horizontalebene. So hat man alsdann die Grundlinien zweier Kegel, deren Böschung $\frac{1}{n}$ beträgt, und man darf jetzt nur noch eine den beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente ziehen.

§. 776.

Wäre die gegebene Gerade horizontal, so wäre sofort auch die Projection der Böschungsscale der gesuchten Ebene gegeben; und da die Neigung $\frac{1}{n}$ ebenfalls bekannt ist, so dürfte man nur auf diese Scale, von der gegebenen Linie an, eine Länge von n auf dem Horizontalmaßstabe genommenen Metern auftragen, so würde der Endpunkt dieser Länge einem Punkte der Böschungsscale entsprechen, dessen Kotte einen Meter weniger angäbe als der auf der gegebenen Geraden liegende Punkt. Da man jetzt also zwei kottirte Punkte der Gefällescale hätte, so wäre es leicht, sie vollends einzutheilen.

§. 777.

fig. 4. **Durch einen auf einer gegebenen Ebene liegenden Punkt (10, 3), eine Gerade auf dieser Ebene zu ziehen, deren Böschung $\frac{1}{n}$ betrage.** Man ziehe auf dieser Ebene eine Horizontale, deren Kotte von der des gegebenen Punktes z. B. um vier Meter verschieden sei. Hierauf beschreibe man aus dem gegebenen Punkte, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser, der viermal so groß ist als die Grundlinie n der gegebenen Böschung, einen Kreisbogen, welcher, indem er die oben angenommene Horizontale schneidet, den Punkt bestimmt, welchen man mit dem gegebenen Punkte verbinden muß, um die gesuchte Gerade zu erhalten. Diese Aufgabe hat im Allgemeinen zwei Auflösungen; aber sie reduciren sich auf eine einzige, oder werden unmöglich, je nachdem die für die Gerade gegebene Böschung gleich der der gegebenen Ebene oder größer als diese ist.

§. 778.

Es ist die Projection eines auf einer bekannten Ebene liegenden Punktes gegeben; man soll die Kotte dieses Punktes finden. Man ziehe durch die gegebene Projection eine auf die Scale der Ebene senkrecht stehende Gerade, so ist die Kotte des Durchschnitts zugleich die Kotte des gegebenen Punktes.

Wenn die Scale der Ebene nicht construirt und letztere bloß durch verschiedene Horizontalen dargestellt wäre, so könnte man ein in Millimeter eingetheiltes Lineal an den gegebenen Punkt anlegen, und zwar so, daß zwei ganze Theile auf die nächst gelegenen Horizontalen fielen; auf diese Art erhielte man unmittelbar den Bruch, den man der Kotte der oberen Horizontale noch anhängen müßte, um die Kotte des gegebenen Punktes zu finden.

§. 779.

fig. 5. **Den Durchschnitt zweier gegebenen Ebenen zu finden.** Man ziehe in jeder Ebene zwei Horizontalen, welche, beziehlich, die nämlichen Kotten haben, so liefert der Durchschnitt dieser vier Geraden zwei kottirte Punkte des gesuchten Durchschnitts, woraus seine Projecton und seine Böschung bestimmt werden können.

§. 780.

Wenn der Durchschnitt der Horizontalen beider Ebenen in zu weite Entfernung fällt, so wendet man zwei Fig. 6.
lfsebenen an, welche, indem sie jede der gegebenen Ebenen in zwei Geraden schneiden, zwei Punkte des
ichten Durchschnitts liefern.

Und wären die Horizontalen der beiden Ebenen beziehungsweise parallel, so würde eine einzige Hilfsebene
reichen, weil alsdann der gesuchte Durchschnitt ebenfalls parallel mit jenen Horizontalen sein müßte.

§. 781.

Den Durchschnitt einer Geraden mit einer Ebene zu finden. Man lege durch die gegebene Fig. 7.
rade eine Hilfsebene, deren Horizontalen zwei beliebig durch zwei Punkte der Geraden gezogene Parallelen
; sucht man hierauf den Durchschnitt dieser Hilfsebene mit der gegebenen Ebene, so schneidet dieser Durch-
itt die Gerade in dem gesuchten Punkte.

§. 782.

Eben so findet man den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden, welche in derselben Vertikalebene Fig. 8.
en. Denn legt man durch jede derselben eine beliebige Ebene, so geht der Durchschnitt dieser beiden Ebenen
ch den gesuchten Punkt, dessen Kotte man hierauf wie in §. 763 findet.

§. 783.

Durch ein ähnliches Mittel kann man auch finden, ob zwei gegebene Gerade, deren Projectionen verschieden
, sich wirklich schneiden; denn in diesem Falle muß der Durchschnitt der beiden durch diese Geraden gelegten
fsebenen durch den Punkt gehen, den beide gegebene Projectionen gemeinschaftlich haben.

§. 784.

Durch einen gegebenen Punkt (10, 4) soll eine Ebene gelegt werden, die einer gegebenen Taf. 60.
ene parallel sei. Die Böschungsscale der gesuchten Ebene wird parallel sein mit der der gegebenen Ebene Fig. 9.
wird durch den gegebenen Punkt gehen. Und da ferner die Neigung beider Ebenen gleich sein soll, so darf
ı nur den Punkt (10, 4) mit demjenigen verbinden, der auf der gegebenen Böschungsscale die nämliche Kotte
, und hierauf mit dieser Verbindungslinie Parallelen durch die andern Theilpunkte der Böschungsscale der
:benen Ebene ziehen.

§. 785.

Durch zwei gegebene Gerade zwei Ebenen zu legen, welche parallel seien. Man ziehe durch Fig. 10.
n Punkt der ersten Geraden eine Parallele mit der zweiten, und durch einen Punkt dieser letzteren eine
allele mit der ersten. Legt man hierauf eine Ebene durch die erste und die dritte Gerade, und hierauf eine
:re Ebene durch die zweite und die vierte Gerade, so erhält man die beiden gesuchten Ebenen. Man sieht
l ein, daß diese sich auf eine einzige reduciren, wenn die gegebene Geraden sich schneiden; oder daß sie
:stimmt werden hinsichtlich ihrer Richtung, wenn jene Geraden parallel sind.

§. 786.

Von einem gegebenen Punkte (8, 2) soll eine Senkrechte auf eine bekannte Ebene gefällt
den. Die Projection dieser Senkrechten muß offenbar parallel sein mit der Projection des Böschungsmaß-

stabes der Ebene; aber ihre Neigungen sind das Umgekehrte von einander, d. h. wenn die Böschung der gegebenen Ebene z. B. $^3/_5$ beträgt, so ist die der gesuchten Geraden $^5/_3$. Nimmt man nun auf dem Horizontalmaßstabe eine Länge von drei Metern, und trägt diese auf die unbestimmte Senkrechte unterhalb des gegebenen Punktes (8, 2), so erhält man einen zweiten Punkt dieser Senkrechten mit der Kotte (8, 2 + 5) oder (13, 2). Hierdurch aber ist diese Senkrechte völlig bestimmt.

§. 787.

Wenn man ferner den Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit der gegebenen Ebene sucht (§. 765), und hierauf den wahren Abstand dieses Durchschnittspunktes von dem gegebenen Punkte berechnet (§. 748), so erhält man den kürzesten Abstand dieses letzteren Punktes von der gegebenen Ebene.

§. 788.

Sollte die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Geraden gefunden werden, so müßte man durch diesen Punkt eine Ebene legen, welche senkrecht auf der Geraden wäre; den Maßstab dieser Ebene fände man alsdann durch das umgekehrte Verfahren des §. 786. Hierauf müßte man den Durchschnittspunkt dieser Ebene und der gegebenen Geraden suchen und endlich den wahren Abstand dieses Durchschnittspunktes von dem gegebenen Punkte.

Diese Aufgaben sind ohne Zweifel hinreichend, um den Leser in den Stand zu setzen, alle Aufgaben zu lösen, bei welchen es sich nur um die Verbindung gerader Linien mit Ebenen handelt.

§. 789.

Fig. 11. Die krummen Flächen werden, besonders wenn sie keiner strengen Definition fähig sind, wie z. B. die Fläche des Erdbodens, durch die Projectionen einer gewissen Anzahl von Horizontalcurven dargestellt, d. h. durch die Projectionen der Schnitte, welche Horizontalebenen von gleichem vertikalen Abstand mit der krummen Fläche erzeugen; alsdann nimmt man an, jede zwischen zwei aufeinanderfolgenden Horizontalcurven enthaltene Zone sei entstanden durch eine Gerade, welche, über diese beiden Curven hingleitend, stets normal auf einer von ihnen blieb, z. B. auf der unteren. So erhält man alsdann statt der wirklichen Fläche des Erdbodens eine windschiefe Fläche, deren Form eine strenge Definition zuließe, wenn das geometrische Gesetz bekannt wäre, in welchem die verschiedenen Horizontalschnitte unter einander stehen; doch ist folgende Näherung hinreichend.

§. 790.

Gewöhnlich werden die Horizontalcurven einander so nahe genommen, daß man die geradlinige Erzeugende jeder Zone als Normale an beiden Curven zugleich ansehen kann. Unter dieser Voraussetzung wird die Fläche, welche man einer Bodenzone substituirt, entwickelbar; denn jede Erzeugende bewegt sich bei ihrem Uebergange von einer Lage zu der folgenden, unendlich nahen, auf zwei Tangenten hin, welche in einerlei Ebene liegen (§. 180), weil sie offenbar parallel sind.

§. 791.

Fig. 11. Ist der Abstand der Horizontalschnitte in gewissen Regionen allzu beträchtlich, als daß man die geradlinigen Erzeugenden als Normalen an zwei benachbarten Curven zugleich annehmen könnte, so ersetzt man diese geraden Erzeugungslinien durch Curvenbögen, welche jene Bedingung erfüllen; hierdurch ändert die Art der Erzeugung sich nicht, denn es ist nun gerade so, als hätte man zwischen die ersten andere Horizontalschnitte eingeschoben,

ß diese einander so nahe genommen, daß die zwischen ihnen enthaltenen Bögen der krummlinigen Erzeugenden it ihren Sehnen verwechselt werden können.

§. 792.

Zieht man von einem auf der Fläche gegebenen Punkte eine Normale auf die nächst unter ihm liegende urve, hierauf vom Fußpunkt dieser Normale wieder eine Senkrechte auf die dritte Curve, und so fort, so den diese verschiedenen Normalen zusammen die Linie des größten Falls, in Beziehung auf den gege- nen Punkt.

§. 793.

Man soll die Kotte eines durch seine Horizontalprojection gegebenen und auf einer be- Fig. 11.
nnten Fläche liegenden Punktes finden. Wenn diese Projection zwischen die mit 12 und 13 bezifferten beencurven fällt, so ziehe man durch diesen Punkt eine normale Erzeugende, deren Endpunkte eben jene Ziffern ben werden; alsdann findet man durch eine einfache Proportion für den gegebenen Punkt die Kotte (12, 7).

§. 794.

Die umgekehrte Aufgabe: alle diejenigen Punkte der Fläche zu finden, welche eine gegebene Kotte (14, 5) ben, ist eben so leicht aufzulösen; und eben durch sie kann man neue Horizontalcurven zwischen die anfäng- hen einschieben, wie die Figur es zeigt.

§. 795.

Man soll eine Berührungsebene an einen auf einer bekannten Fläche gegebenen Punkt legen. Fig. 11.
egt der Punkt auf einer der Horizontalcurven, so muß die Berührungsebene durch die Tangente dieser Curve d durch die geradlinige Erzeugende, welche normal auf ihr steht, gehen; verlängert man daher diese Normale s zur oberen Curve, so bestimmt der zwischenliegende Theil die Richtung des Böschungsmaßstabes der gesuchten bene und die Kotten zweier Punkte dieser Scale, deren Eintheilung nun leicht gemacht werden kann. Unter r Voraussetzung des §. 790, berührt diese Ebene die Zone nach der ganzen Länge der zwischenliegenden Er- gendert, während sie, wenn man die Erzeugungsart des §. 789 beibehält, die Fläche nur in dem gegebenen unkte berührt.

§. 796.

Wenn der gegebene Berührungspunkt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Horizontalcurven liegt, so zieht an wieder durch diesen Punkt eine Normale an die untere Curve; und wenn diese Gerade auch Normale an r oberen Curve ist, so gibt das zwischenliegende Stück derselben die Richtung und Größe eines Scalentheiles r Berührungsebene. Im umgekehrten Falle zeichne man nach §. 794 den Horizontalschnitt, der durch den ge- benen Punkt geht, alsdann werden die Tangente und Normale dieser Curve die Berührungsebene bestimmen e im vorigen Paragraph.

§. 797.

Bei Anwendung dieser Methode muß man wohl zu unterscheiden wissen, welche Lage die Berührungs- ene rücksichtlich der Fläche bekomme, in der Umgegend des Berührungspunktes. Hierüber lassen sich aus i Beispielen des Kapitels über die Krümmung der Flächen im achten Abschnitt leicht folgende Regeln leiten:

1) Die Fläche ist convex, d. h. sie ist unterhalb der Berührungsebene in der ganzen Umgegend des Berührungspunktes, wenn alle nächstgelegenen Horizontalcurven convex sind, und wenn ihr horizontaler Abstand aufwärts zunimmt oder wenigstens constant bleibt.

2) Die Fläche ist concav, oder sie befindet sich in der Umgegend des Berührungspunktes oberhalb der Berührungsebene, wenn alle Horizontalcurven concav sind und wenn ihr horizontaler Abstand aufwärts abnimmt oder wenigstens constant bleibt.

3) Wenn die Horizontalcurven convex sind und ihr Horizontalabstand aufwärts abnimmt, so ist die Fläche convex in horizontaler Richtung, aber concav nach der Linie des größten Falls, wie der Hals einer Rolle, deren Axe vertikal ist.

4) Wenn die Horizontalcurven concav sind und ihr Horizontalabstand aufwärts zunimmt, so ist die Fläche concav in horizontaler Richtung, und convex nach der Linie des größten Falls, wie der Hals einer Rolle deren Axe horizontal ist.

In diesen beiden letzten Fällen aber und bei den andern Verschiedenheiten der Form, die in Beziehung auf die Horizontalcurven stattfinden können, ist die Berührungsebene theils über, theils unterhalb der Fläche; mithin durchschneidet sie dieselbe und kann nicht mehr wohl angewendet werden bei den Aufgaben der Fortification. Der nämliche Uebelstand kommt in dem weiter oben angeführten zweiten Falle vor.

§. 798.

Fig. 12. Es soll der Durchschnitt einer gegebenen Ebene mit einer bekannten Fläche gefunden werden. Man ziehe diejenigen Horizontalen der Ebene, welche die nämlichen Kotten haben, wie die Horizontalcurven der gegebenen Fläche, so erhält man aus ihren wechselseitigen Durchschnitten die Punkte des gesuchten Flächendurchschnittes. Hiebei muß man aber wohl die Eintrittspunkte von den Punkten des Austritts unterscheiden, und muß manchmal neue Horizontalcurven da einschieben, wo die gegebenen nicht nahe genug sind. Um den höchsten Punkt des Durchschnitts zu erhalten, muß man näherungsweise eine auf zwei benachbarten Horizontalcurven normale Erzeugende suchen, deren Projection der Böschungsscale der schneidenden Ebene parallel sei; denn die Berührungsebene, welche die Fläche längs dieser Erzeugenden berührt (§. 790), kann die schneidende Ebene nur in einer Horizontalen schneiden, welche die Tangente des höchsten Punktes sein wird. Man darf daher jetzt nur noch den Durchschnittspunkt dieser Erzeugenden mit der gegebenen schneidenden Ebene suchen (§. 781).

§. 799.

Wenn die gegebene Ebene vertikal ist, so projicirt sich der Flächenschnitt auf die Spur der Ebene; da man aber die Kotten der Punkte kennt, in welchen jene Ebene die Horizontalcurve schneidet, so kann man leicht eine Profilzeichnung dieses Schnittes ausführen.

§. 800.

Fig. 13. Den Durchschnitt einer Geraden mit einer Fläche zu finden. Man lege durch diese Gerade eine beliebige Ebene und suche den Durchschnitt, welchen diese mit der Fläche macht, so wird der Punkt, in welchem die Durchschnittscurve die gegebene Gerade schneidet, der gesuchte Punkt sein.

§. 801.

Den Durchschnitt zweier gegebenen Flächen findet man aus denjenigen Horizontalcurven, welche beziehlich gleiche Kotten in beiden Flächen haben.

§. 802.

Will man den Durchſchnitt einer Fläche mit einer Curve finden, ſo muß man ſich durch letztere einen rizontalen Cylinder gelegt denken und deſſen Durchſchnitt mit der gegebenen Fläche ſuchen, nach §. 798; dieſer urchſchnitt, ſchneidet alsdann die gegebene Curve in Punkten, welche ihr und der gegebenen Fläche gemeinaftlich ſind.

An dieſen kurzen Andeutungen möge dem Leſer genügen; die übrigen Aufgaben, welche ſich noch auf dieſe t behandeln ließen, haben nur dann ein Intereſſe, wenn man ſie unter der Form aufſtellt, unter welcher ſie der Fortification vorkommen.

Fig. 1.

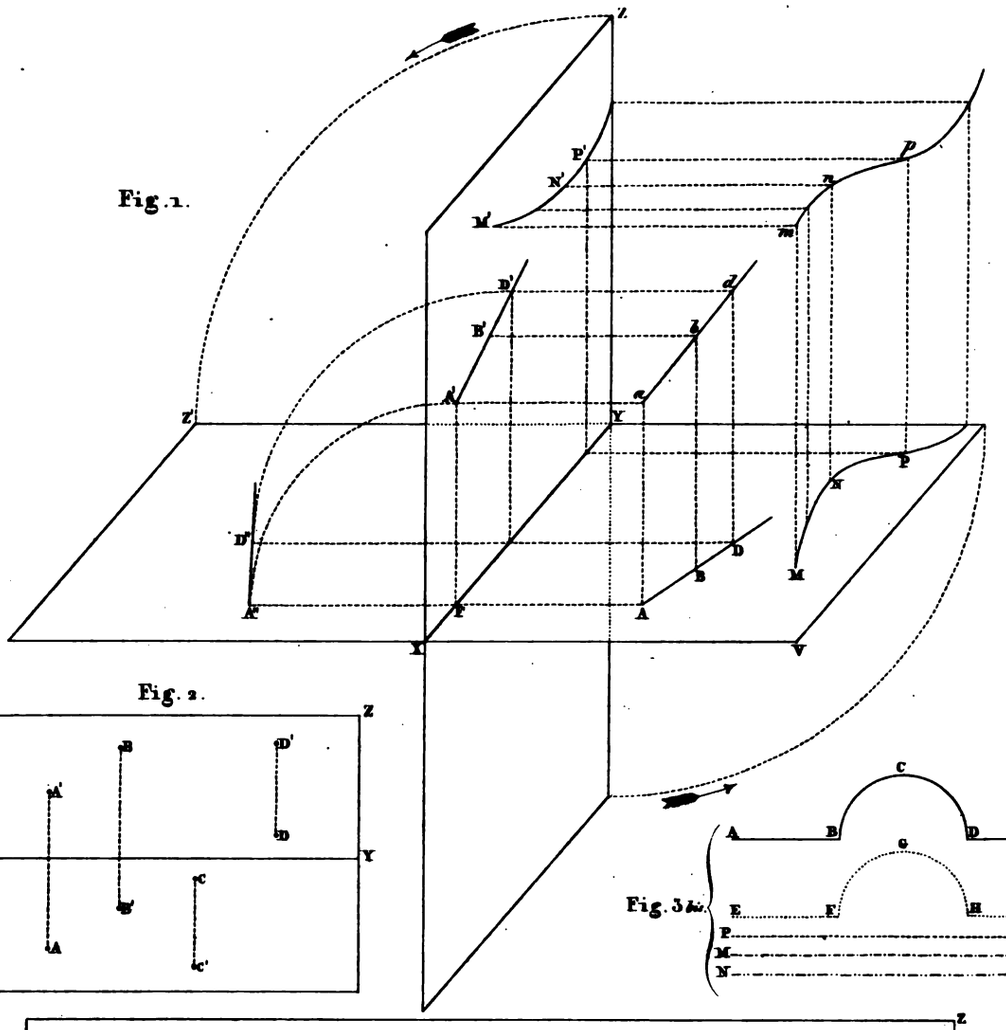


Fig. 2.

Fig. 3.

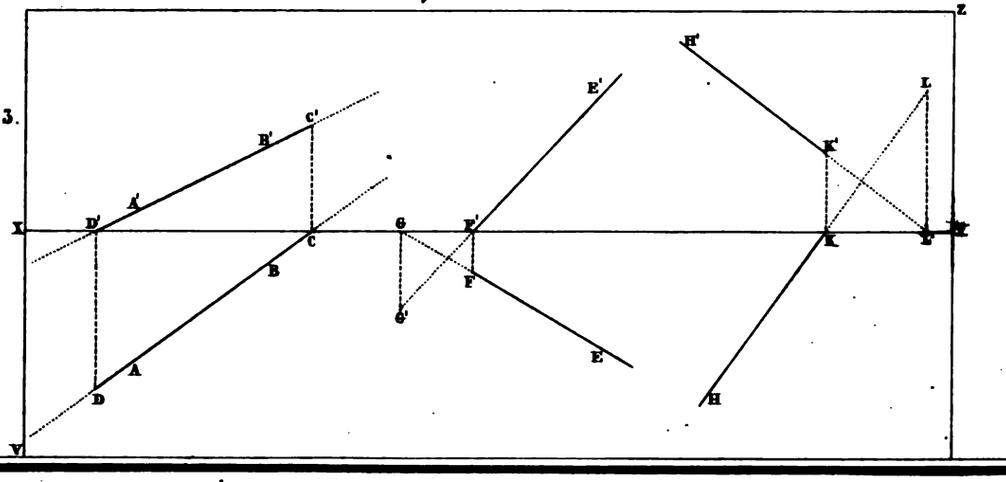
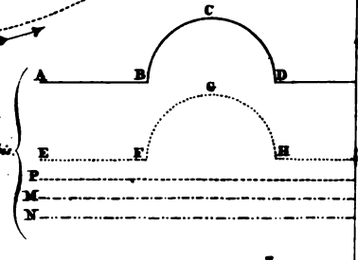


Fig. 3a.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 4.

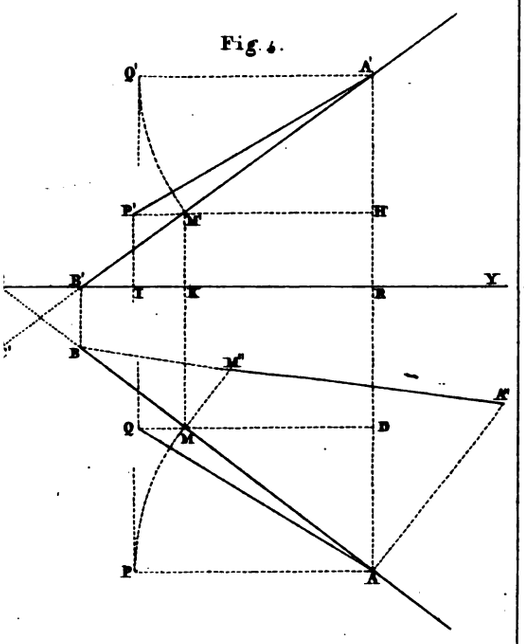


Fig. 5.

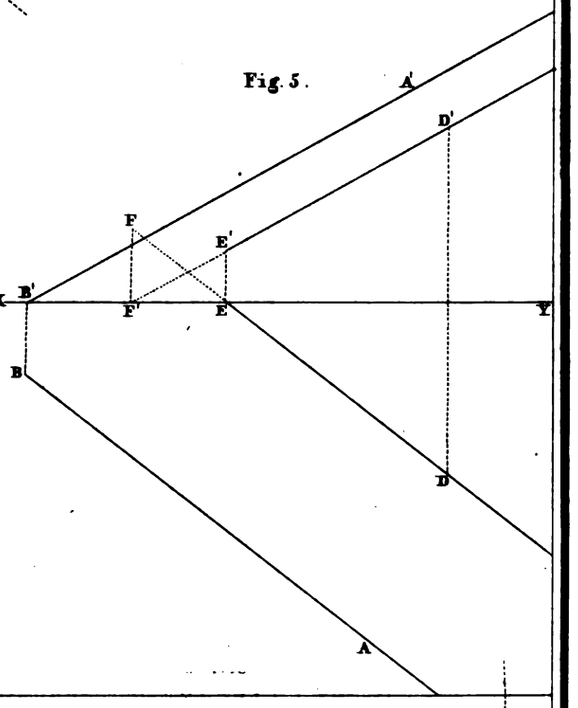


Fig. 6.

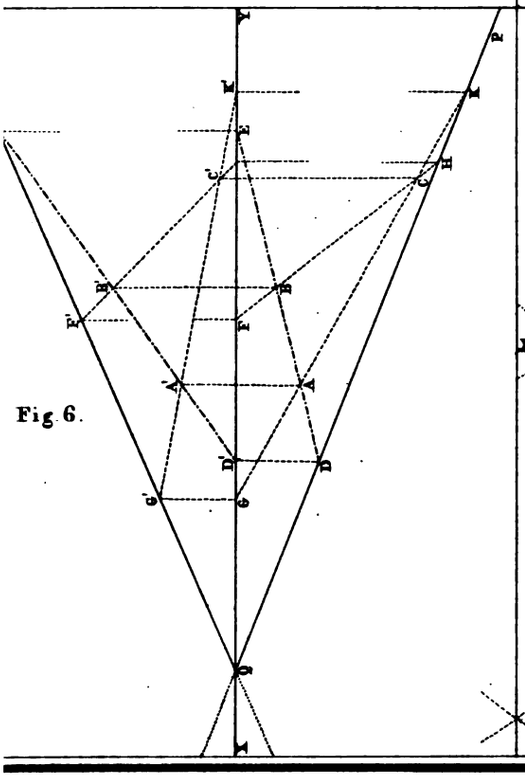
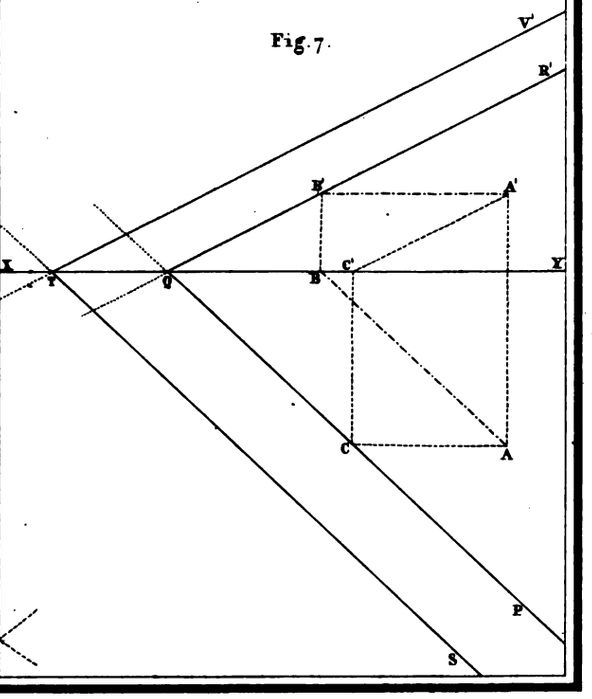


Fig. 7.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 3.

Fig. 8.

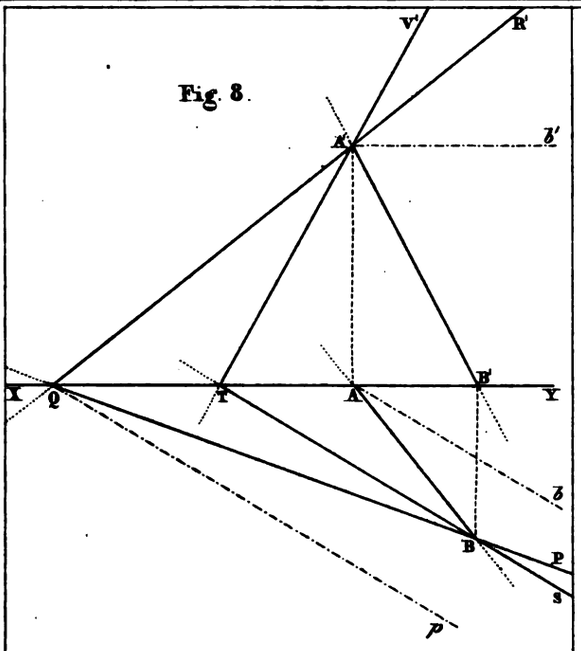


Fig. 9.

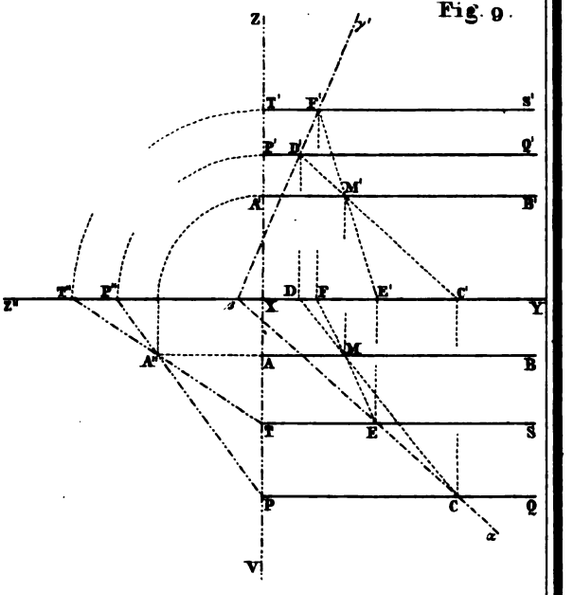


Fig. 10.

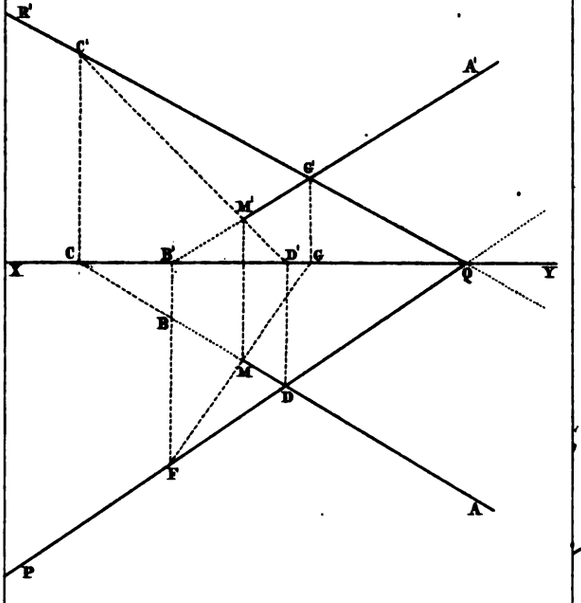
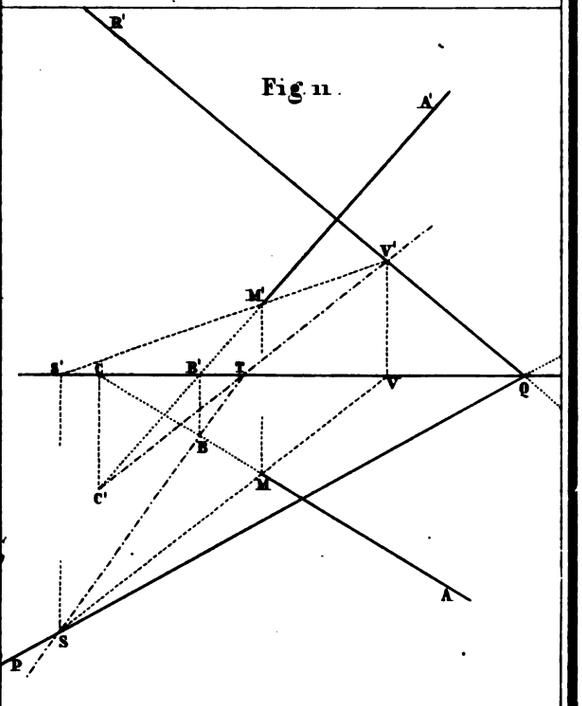


Fig. 11.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 12.

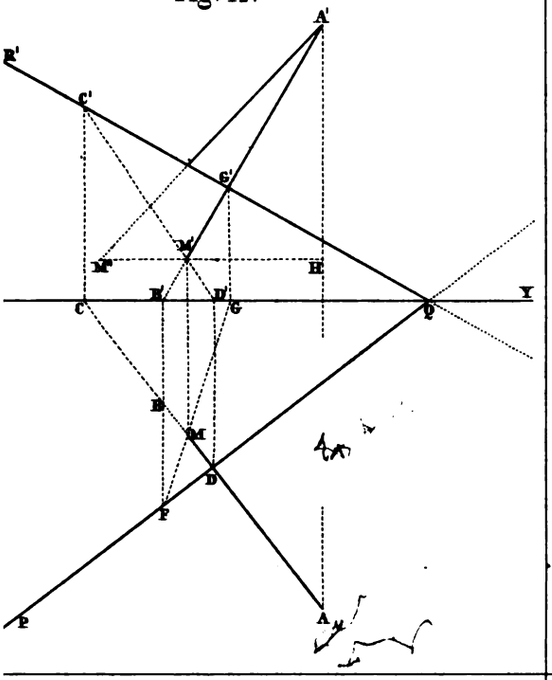


Fig. 13.

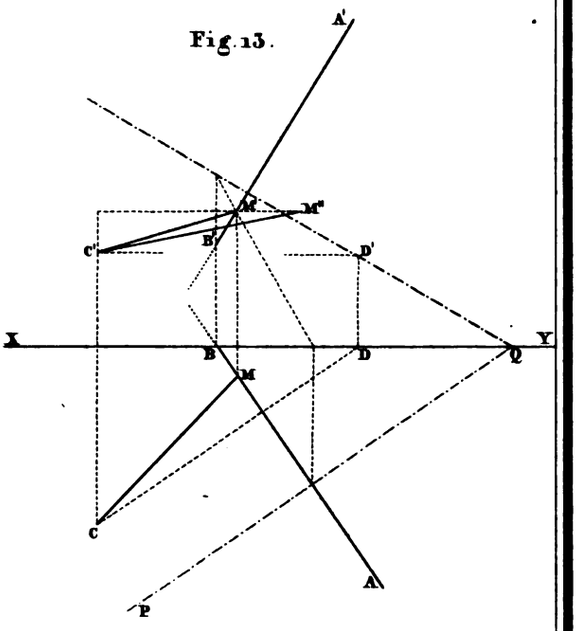


Fig. 15.

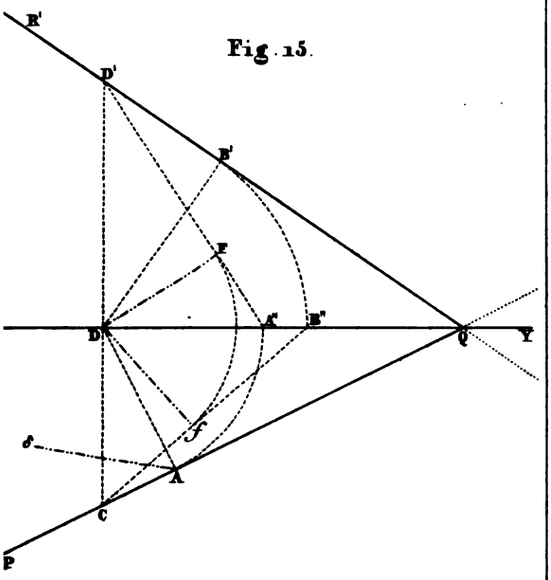
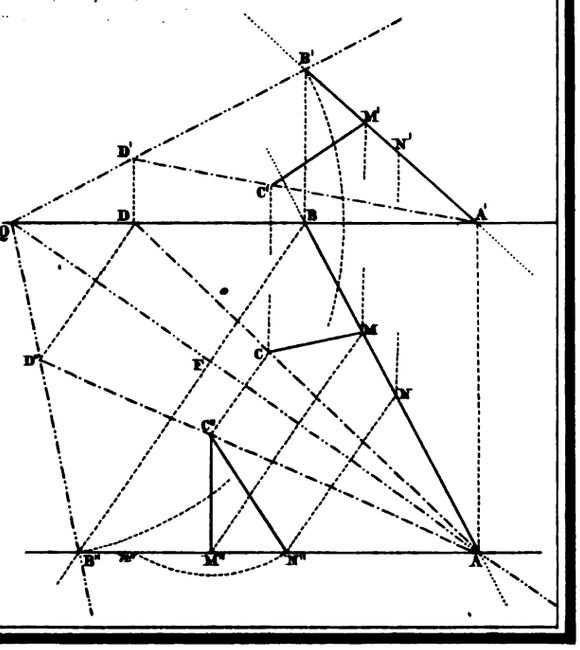


Fig. 14.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 16.

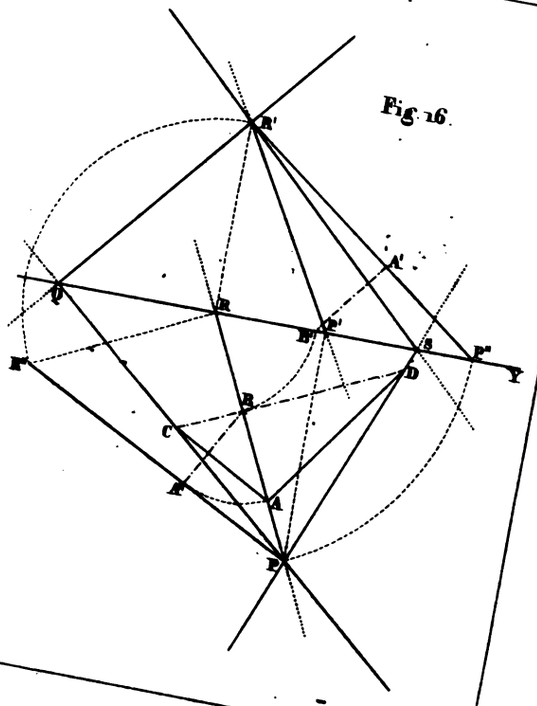


Fig. 17.

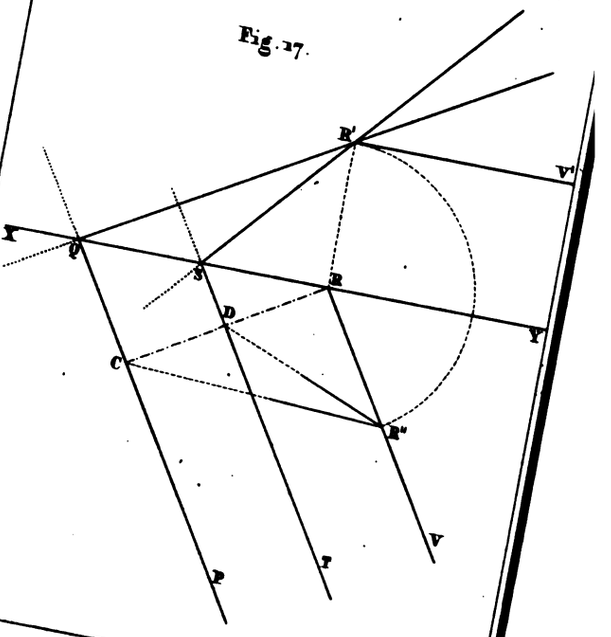


Fig. 18.

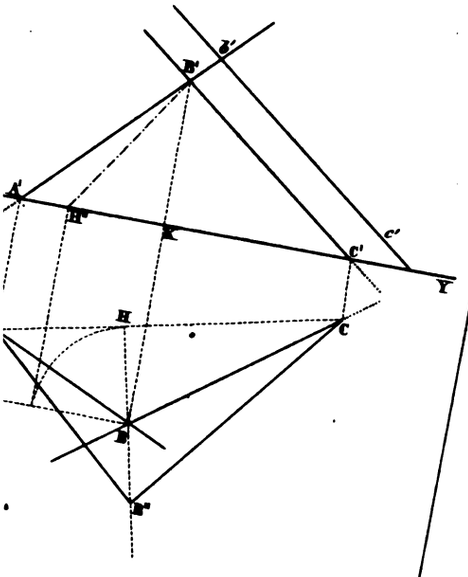
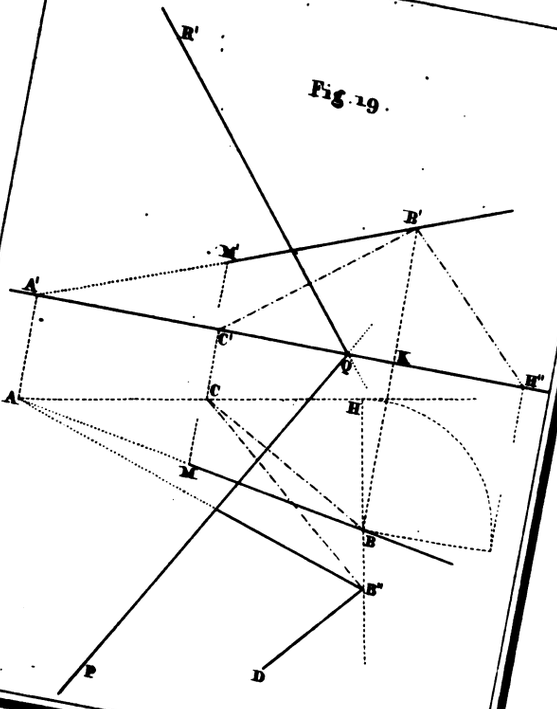


Fig. 19.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

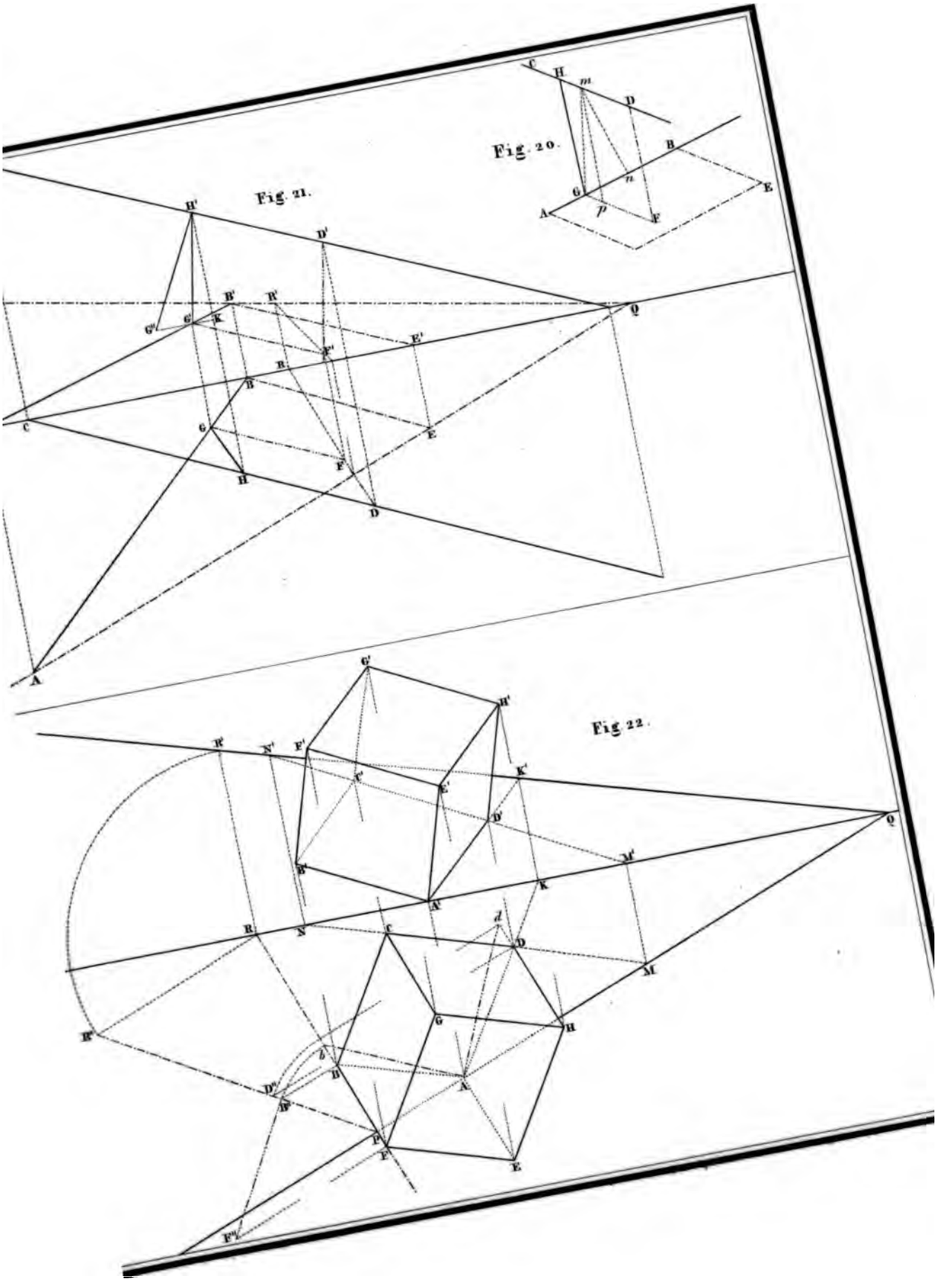


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 7.

Fig. 23.

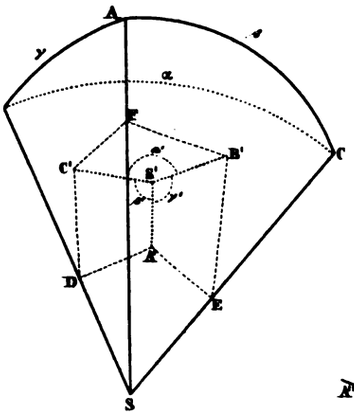


Fig. 24.

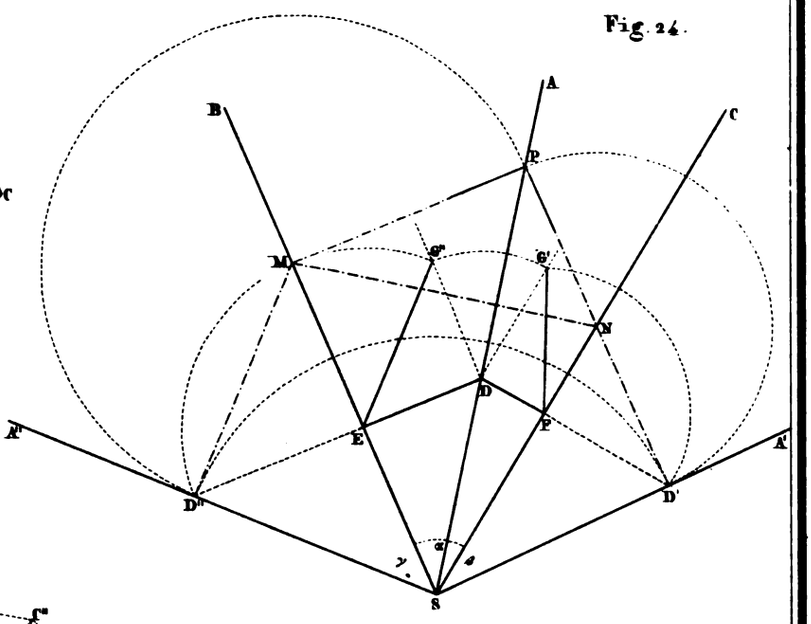


Fig. 25.

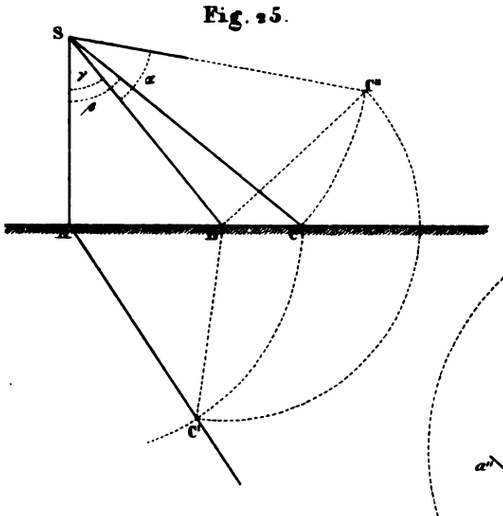
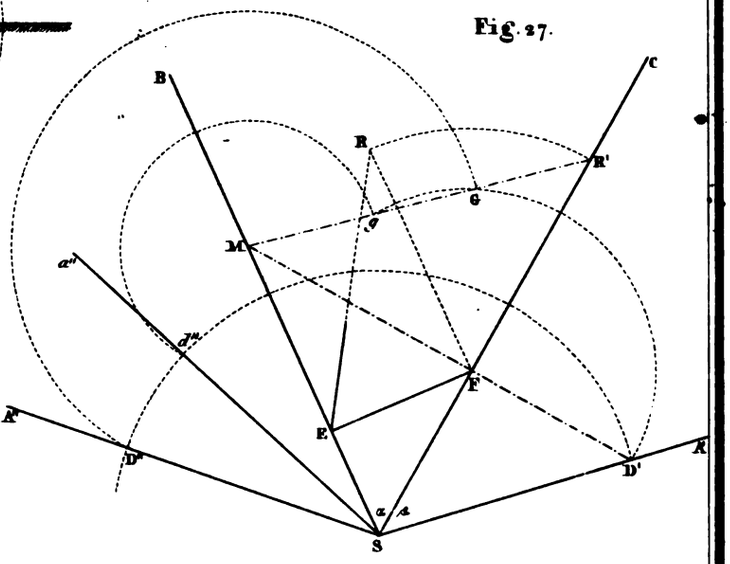


Fig. 27.



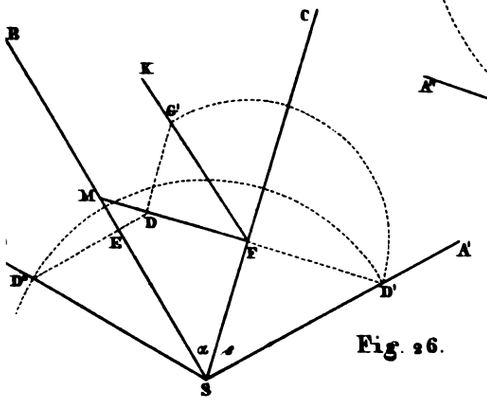


Fig. 26.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

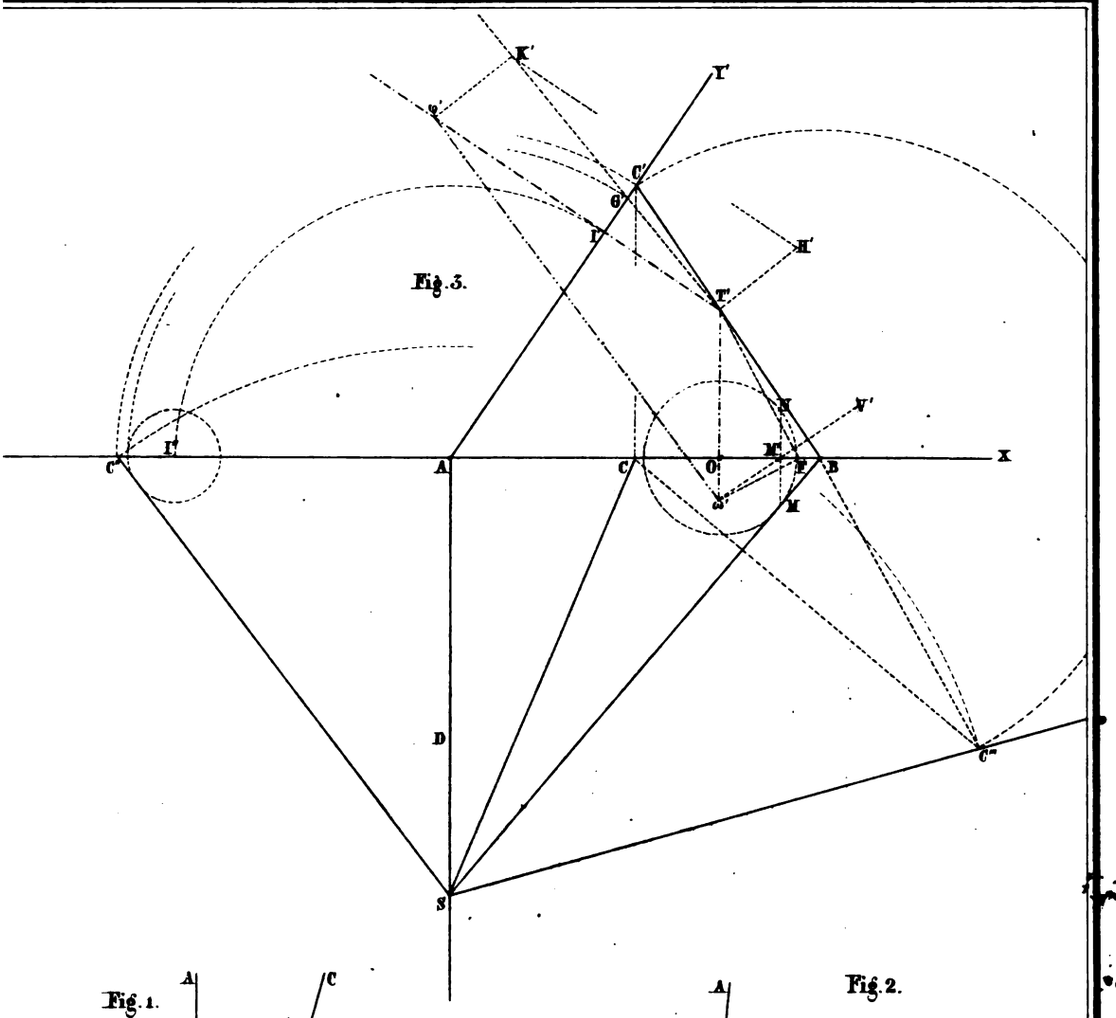


Fig. 3.

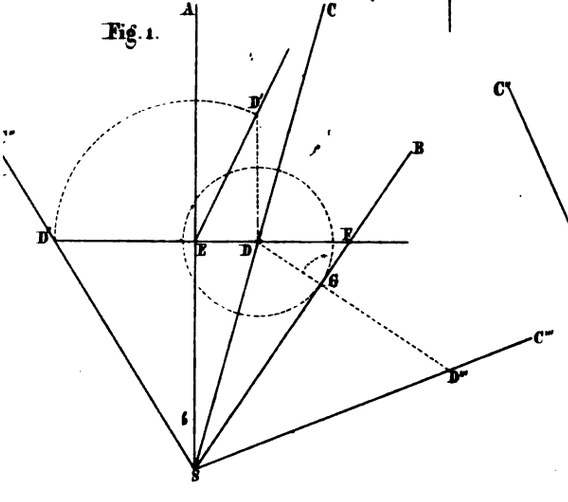


Fig. 1.

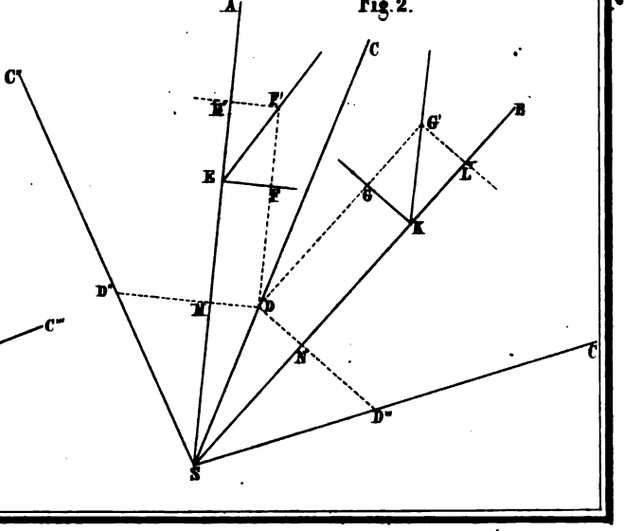


Fig. 2.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 8.

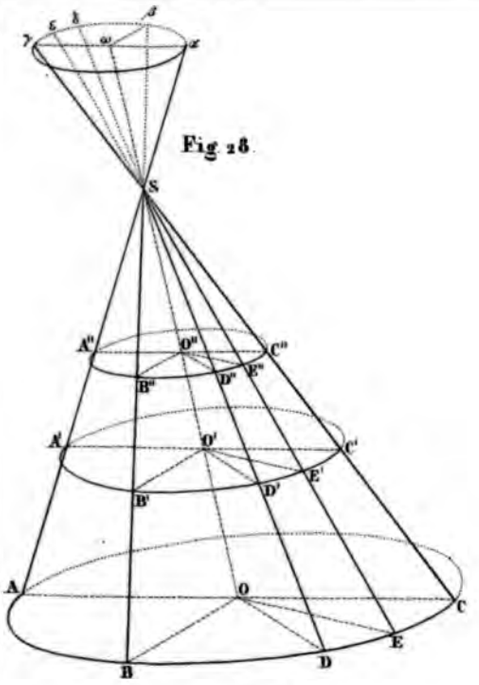


Fig. 28.

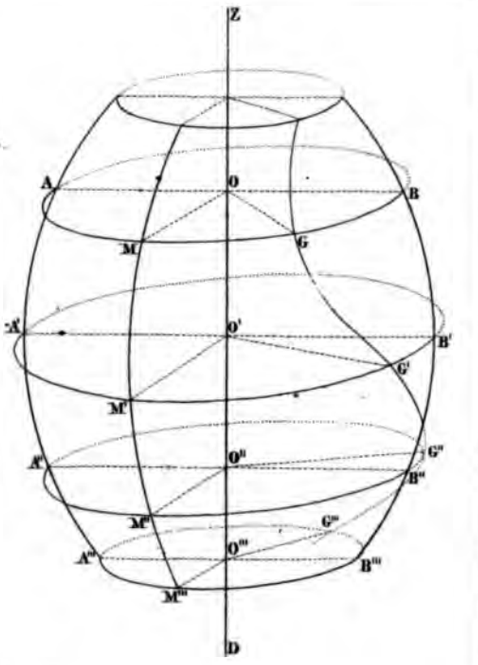


Fig. 30.

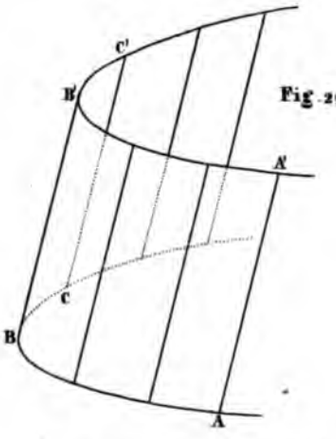


Fig. 29.

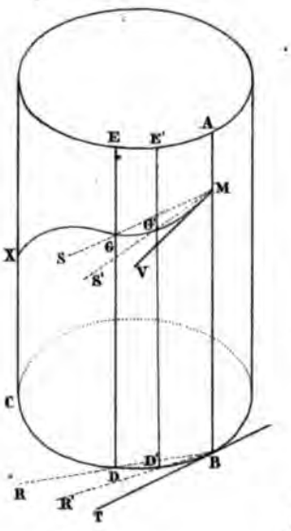


Fig. 32.

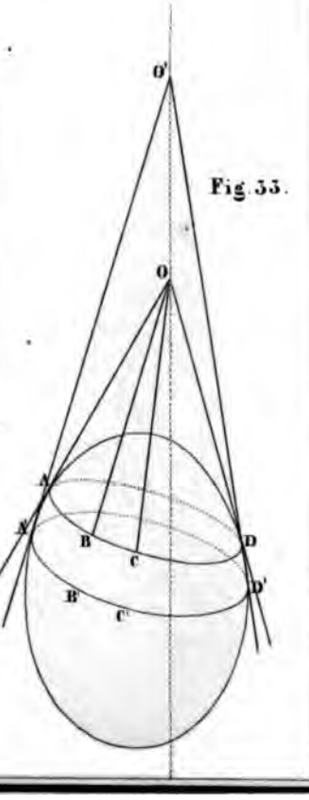


Fig. 33.

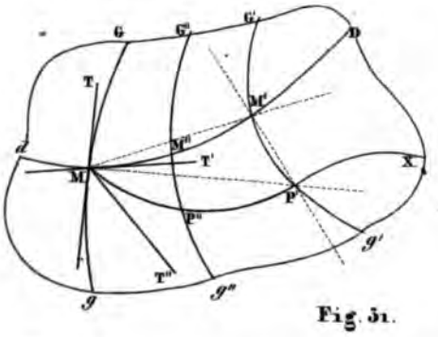


Fig. 31.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 9.

Fig. 34.

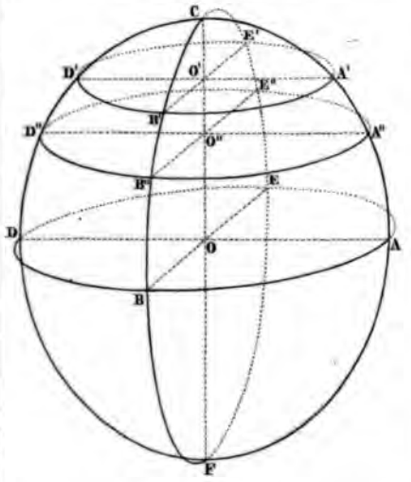


Fig. 35.

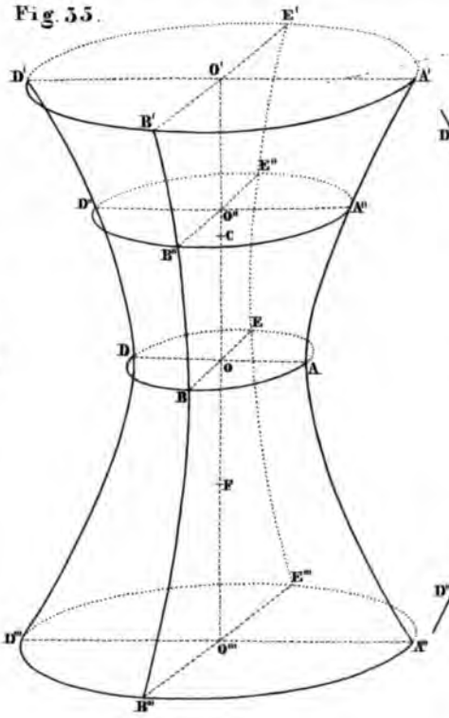
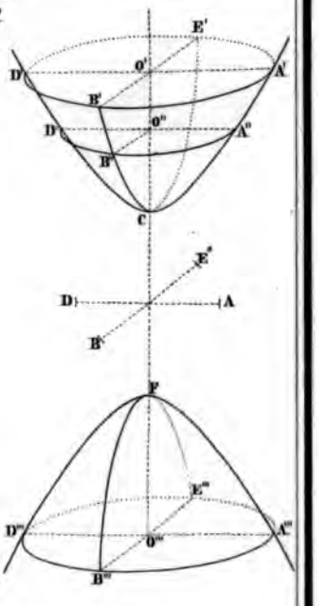


Fig. 36.



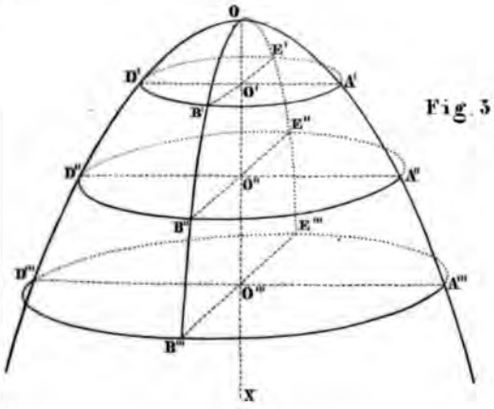
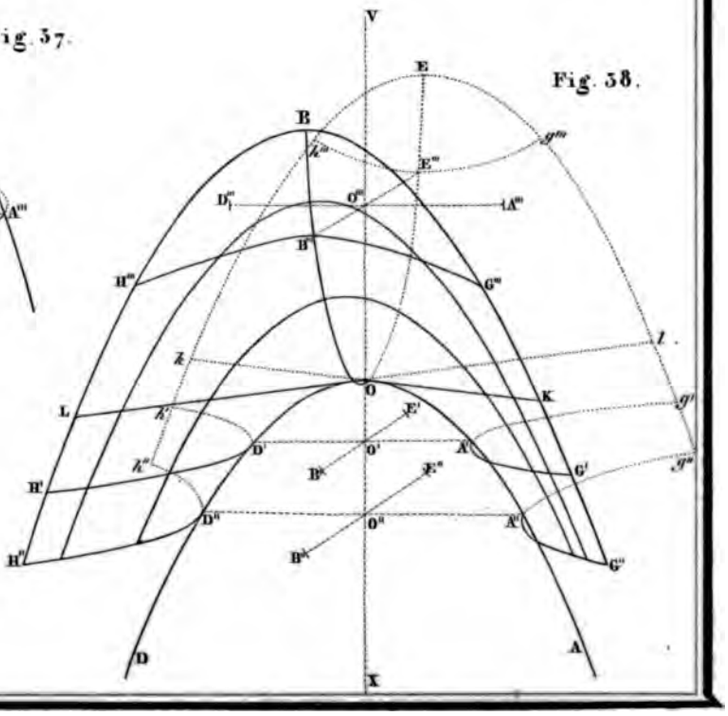


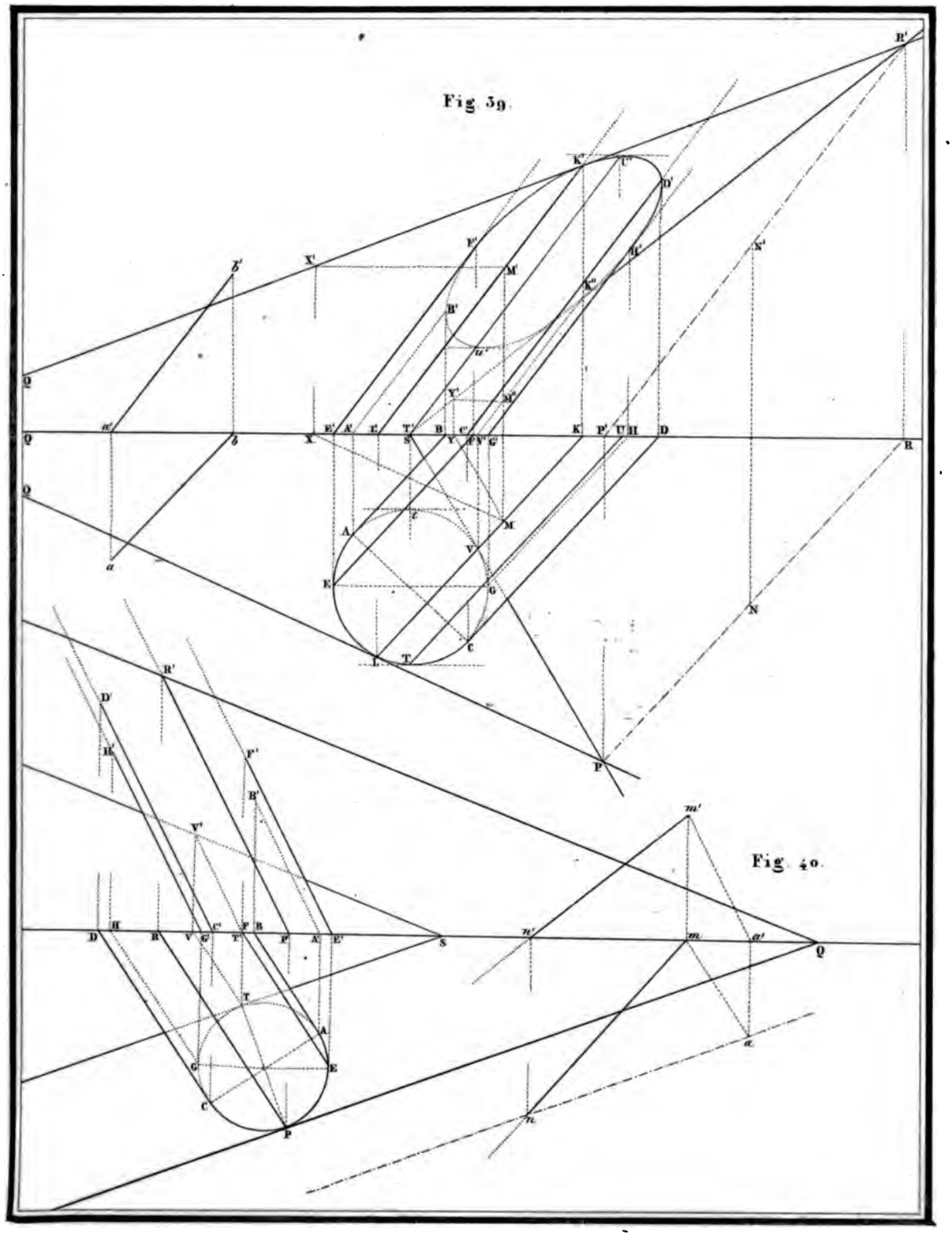
Fig. 37.

Fig. 38.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOU ION

Tafel 10.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

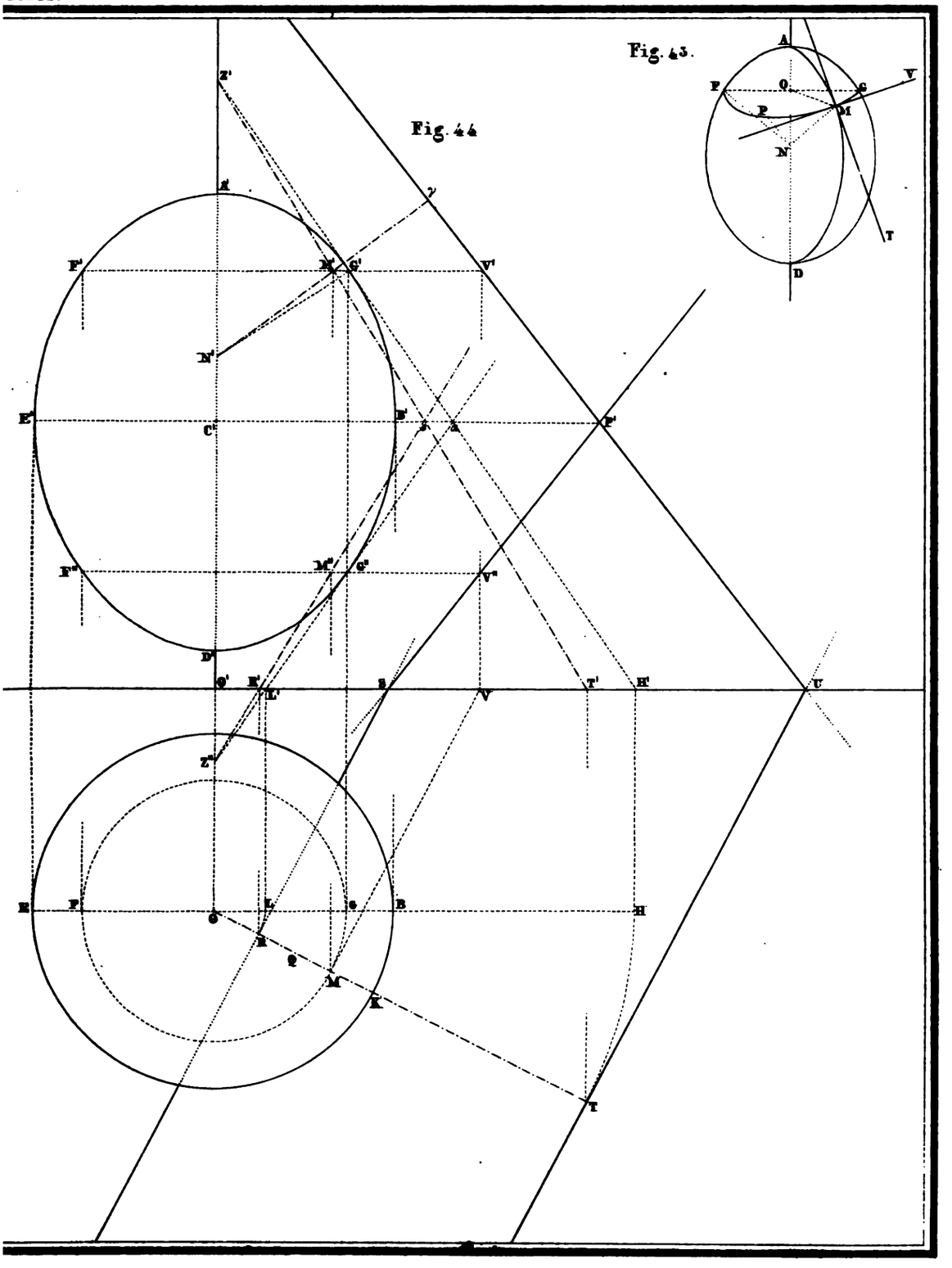


Fig. 43.
A
F
Q
G
V
P
M
N
T
D
Fig. 44
Z'
A'
γ
F'
M'
G'
V'
N'
E'
C'
B'
δ
α
F'
F''
M''
G''
V''
D'
Q'
K'
L'
δ
V
T'
H'
U
Z''
E
F
Q
L
e
B
H
K
Q
M
K
T

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

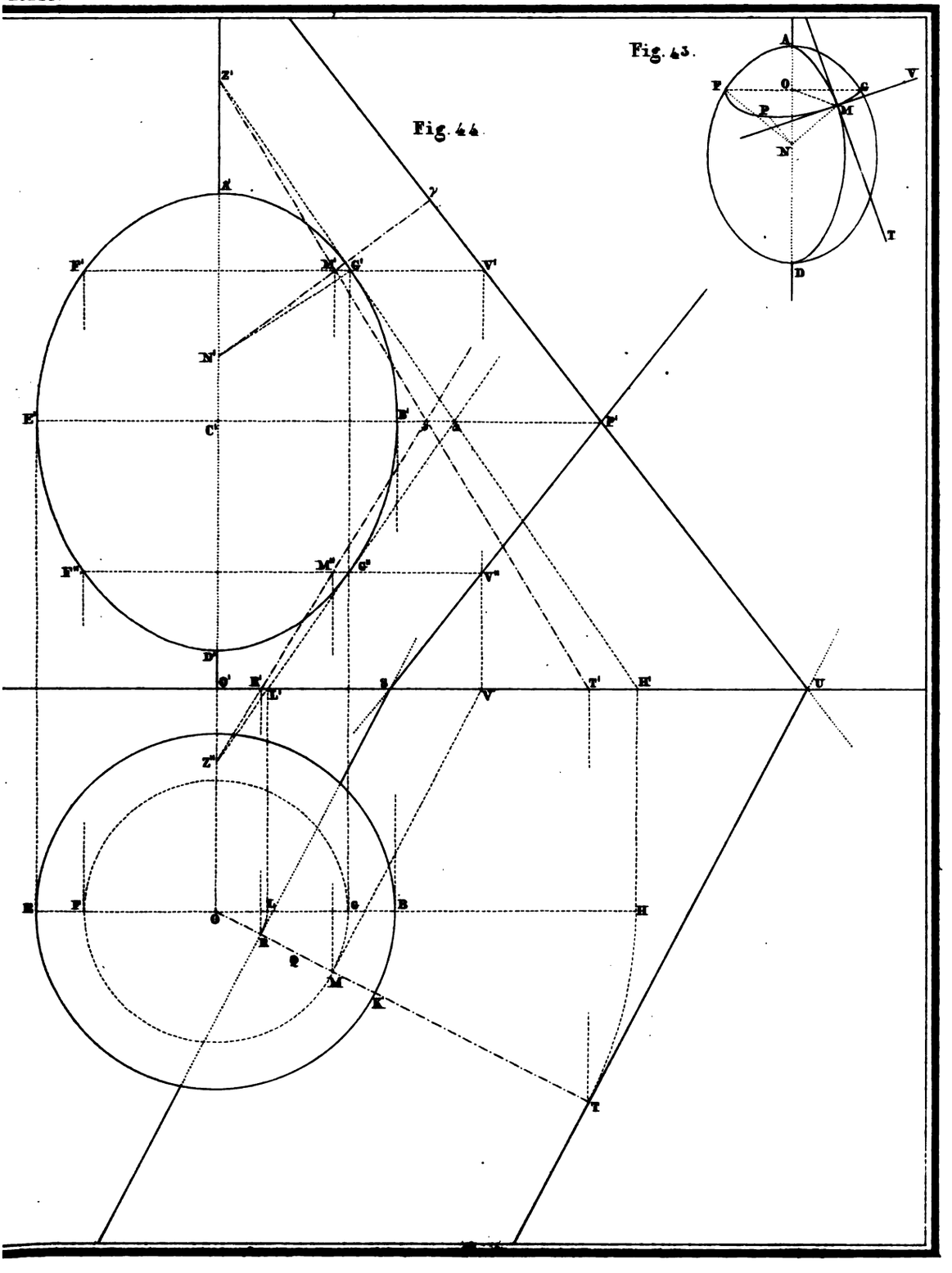
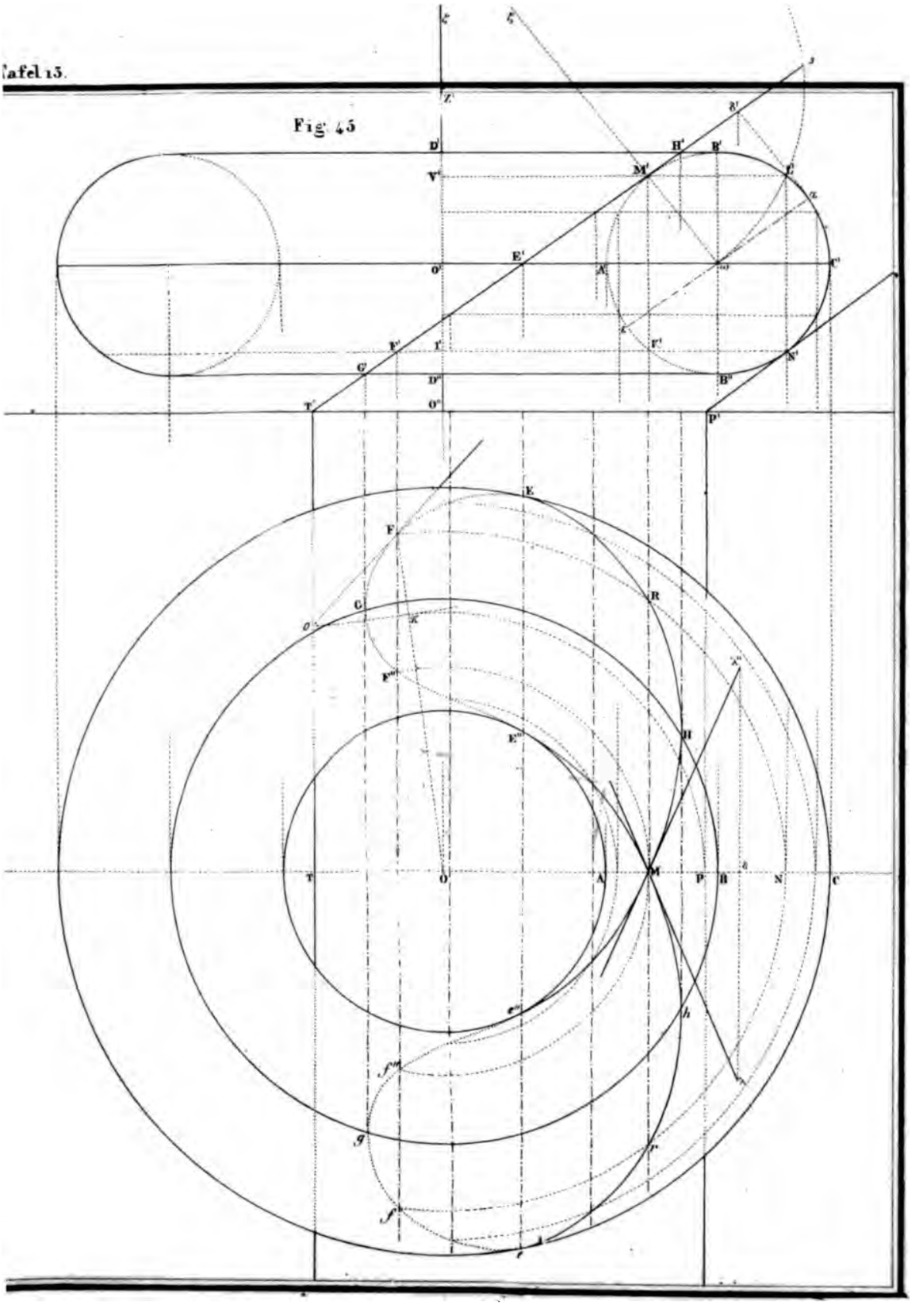


Fig. 43.
A
P
O
C
V
P
M
N
T
D
Fig. 44.
Z'
X'
Y'
F'
M'
G'
V'
N'
E'
C'
B'
S'
A'
F''
M''
G''
V''
D'
O'
K'
L'
S'
V'
T'
H'
U
Z''
E
P
L
G
B
H
O
K
Q
M
K
T

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 13.

Fig. 43



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 9.

Fig. 34.

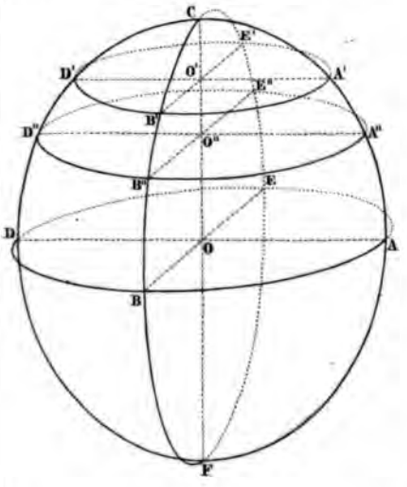


Fig. 35.

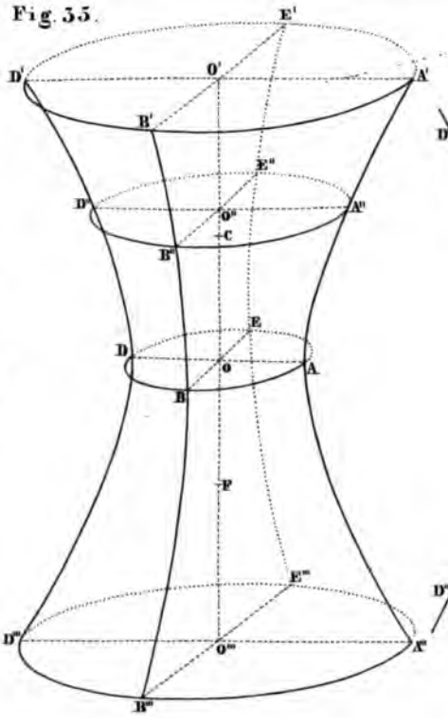
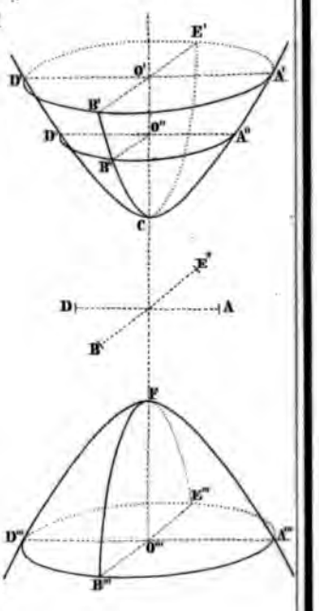


Fig. 36.



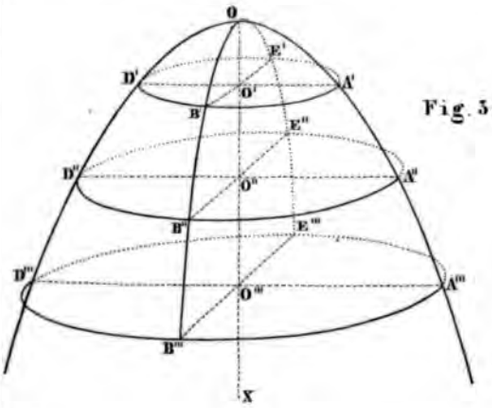
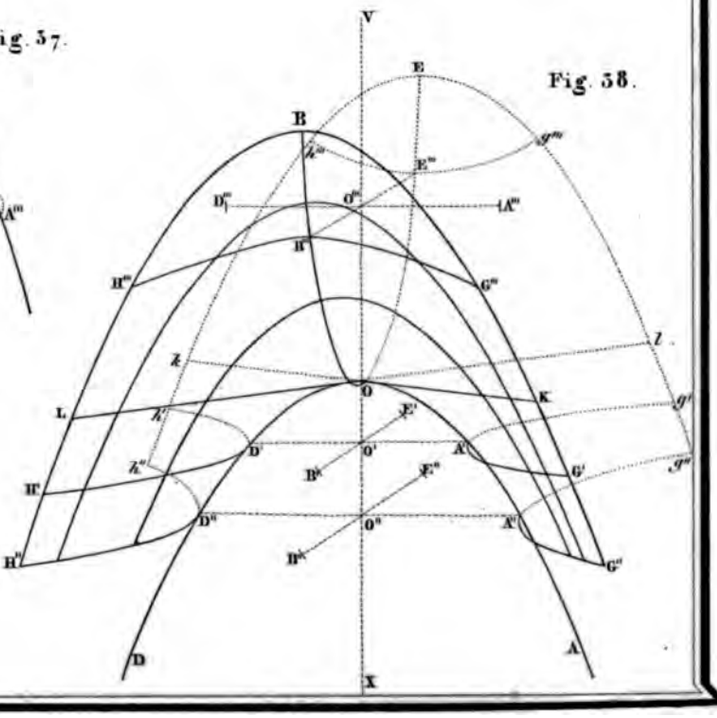


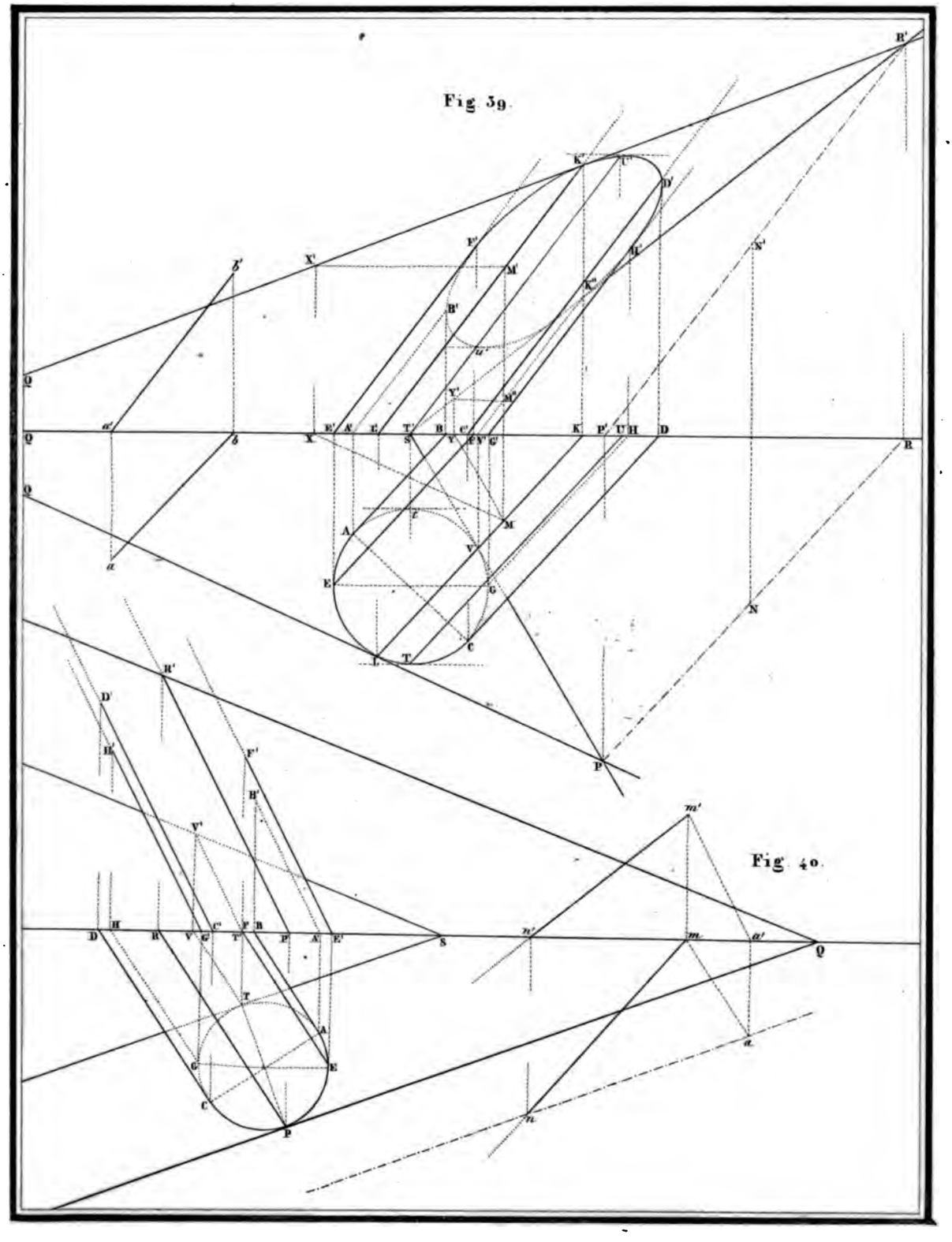
Fig. 37.

Fig. 38.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOU ION

Tafel 10.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 11.

Fig. 41.

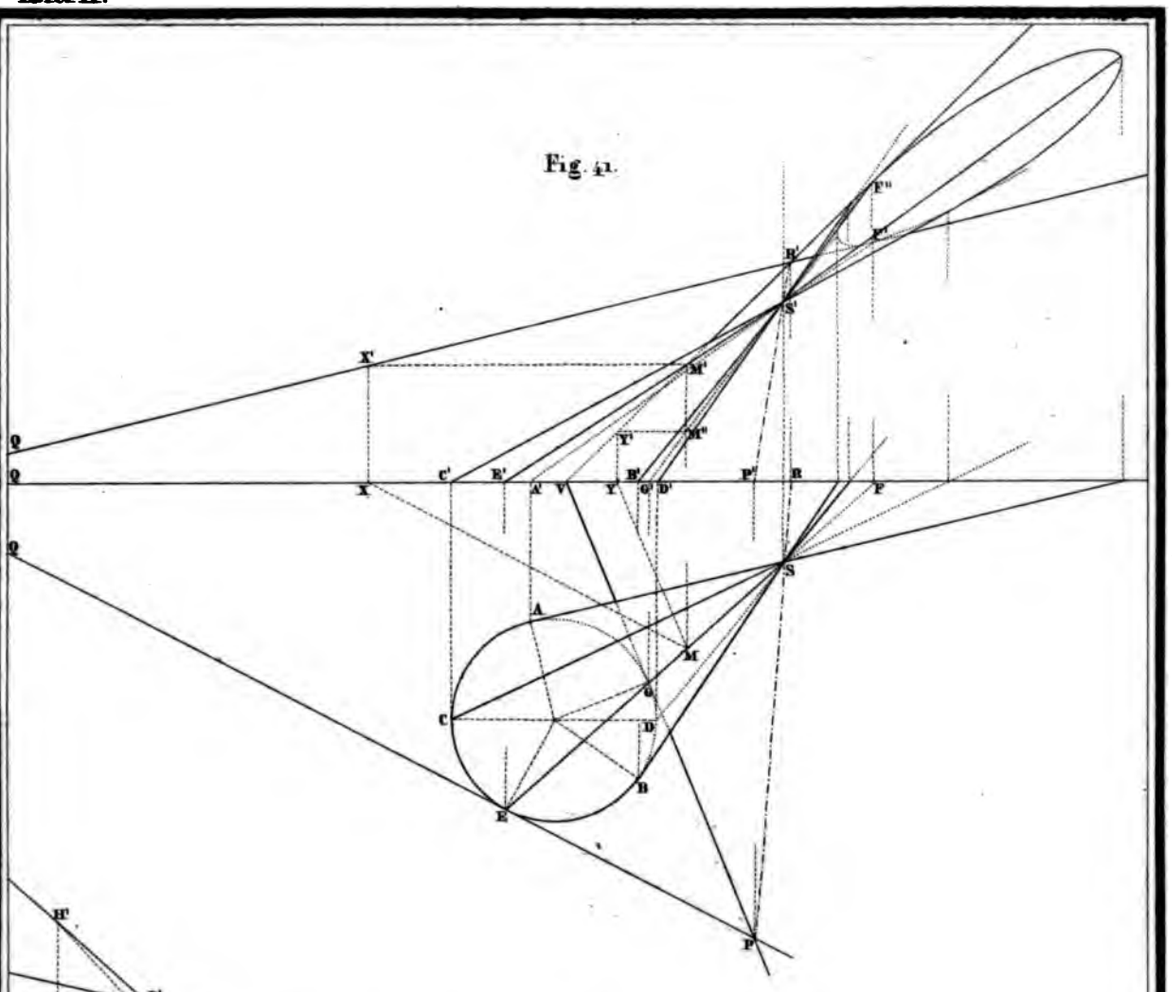
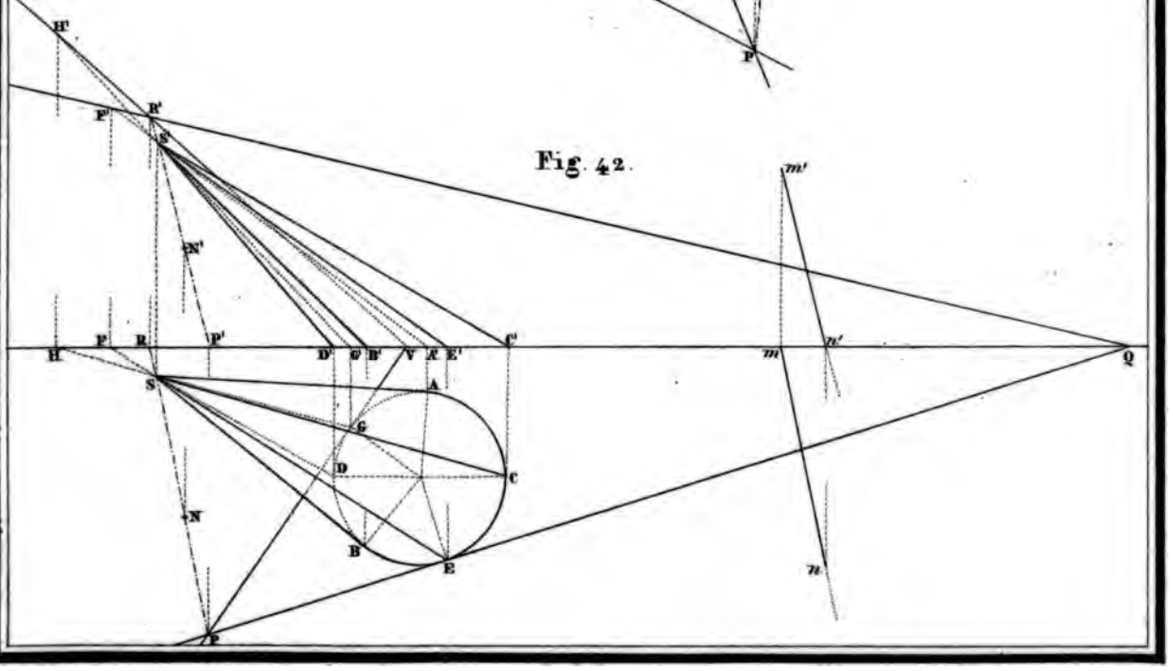


Fig. 42.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

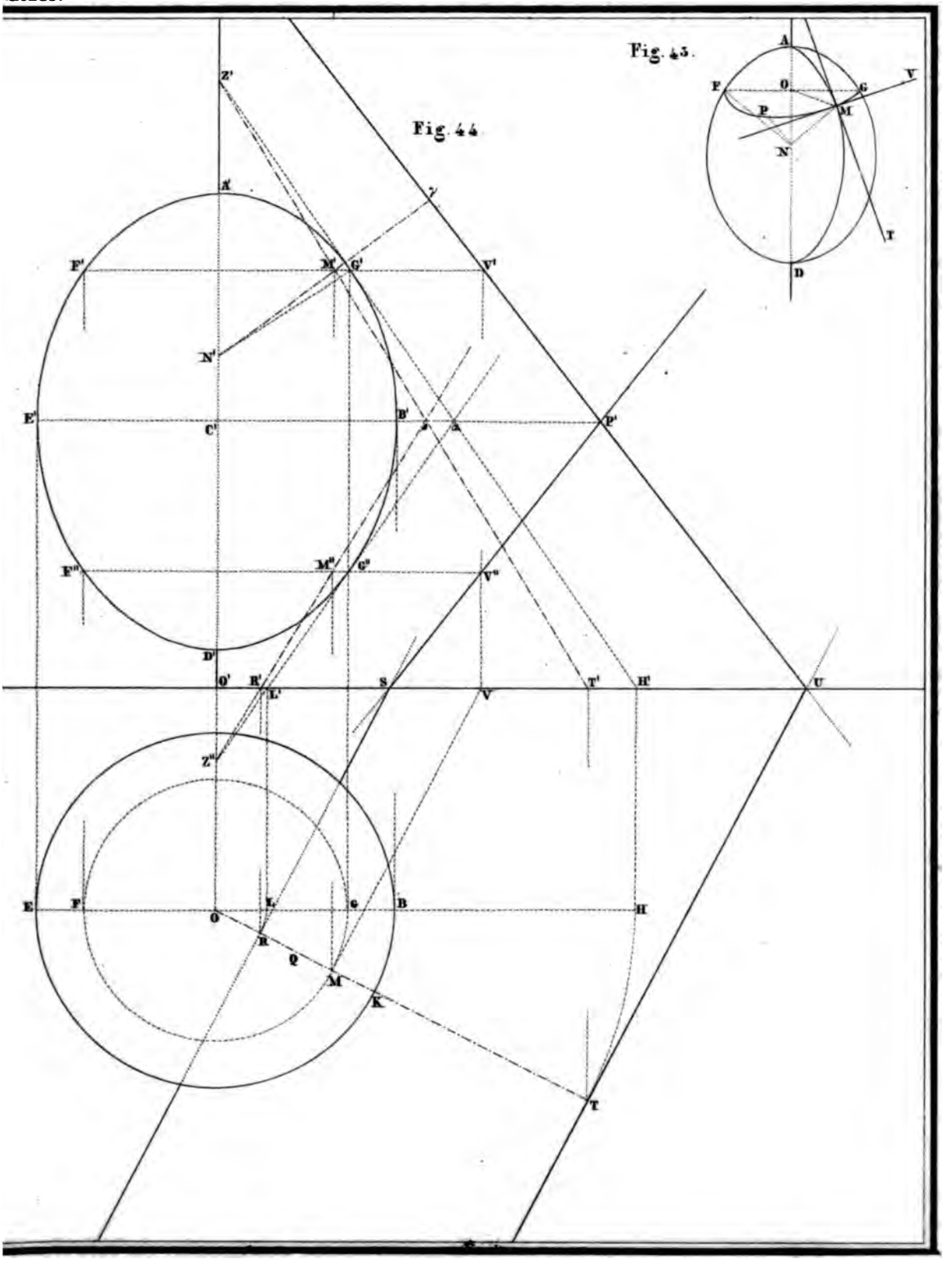
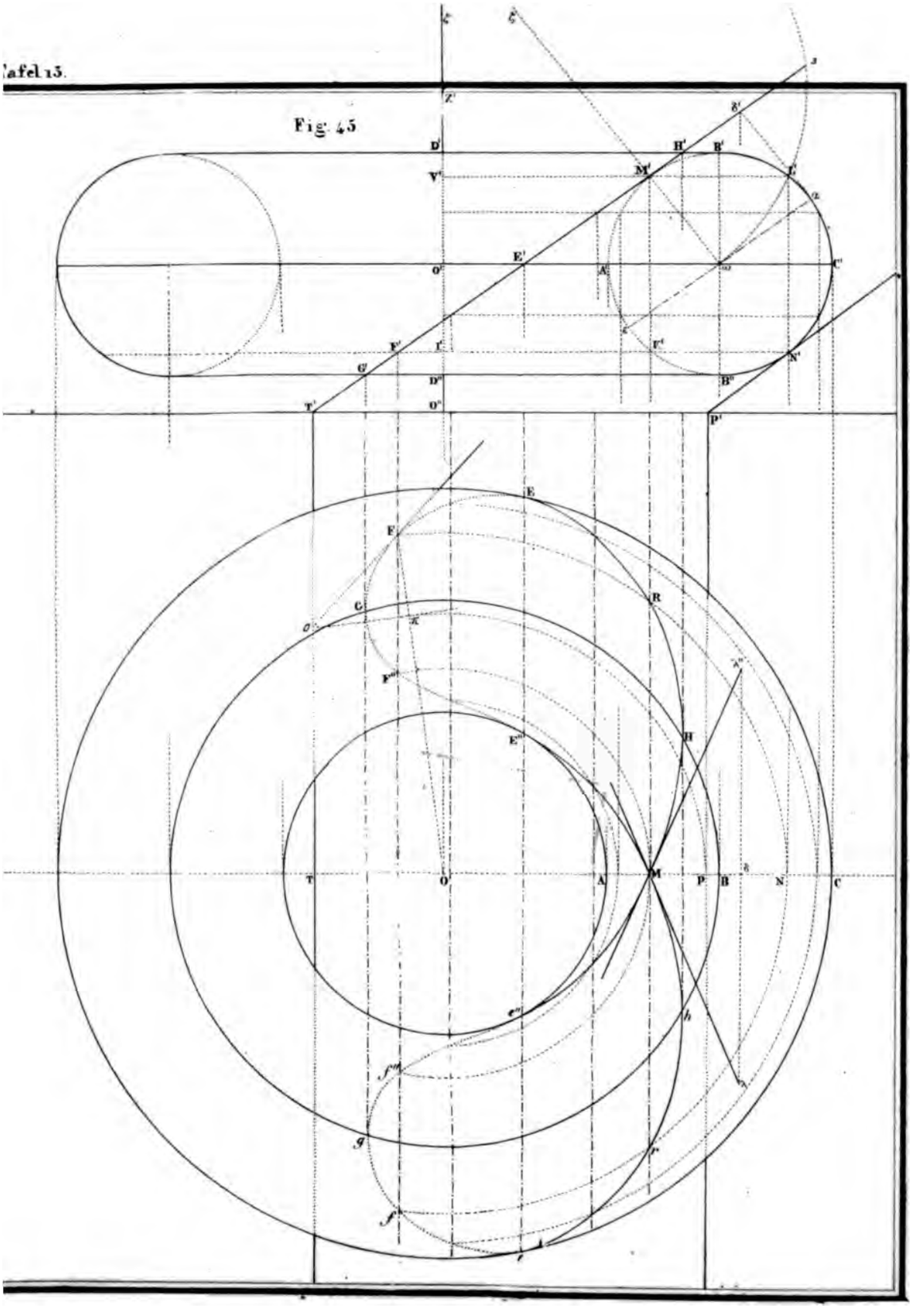


Fig. 44.
Fig. 43.
A
F
O
G
V
P
M
N
T
D
Z'
X'
Y'
F'
M'
G'
V'
N'
E'
C'
B'
P'
F''
M''
G''
V''
D'
O'
R'
L'
S
T'
H'
U
Z''
E
P
O
L
G
B
H
R
Q
M
K
T

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

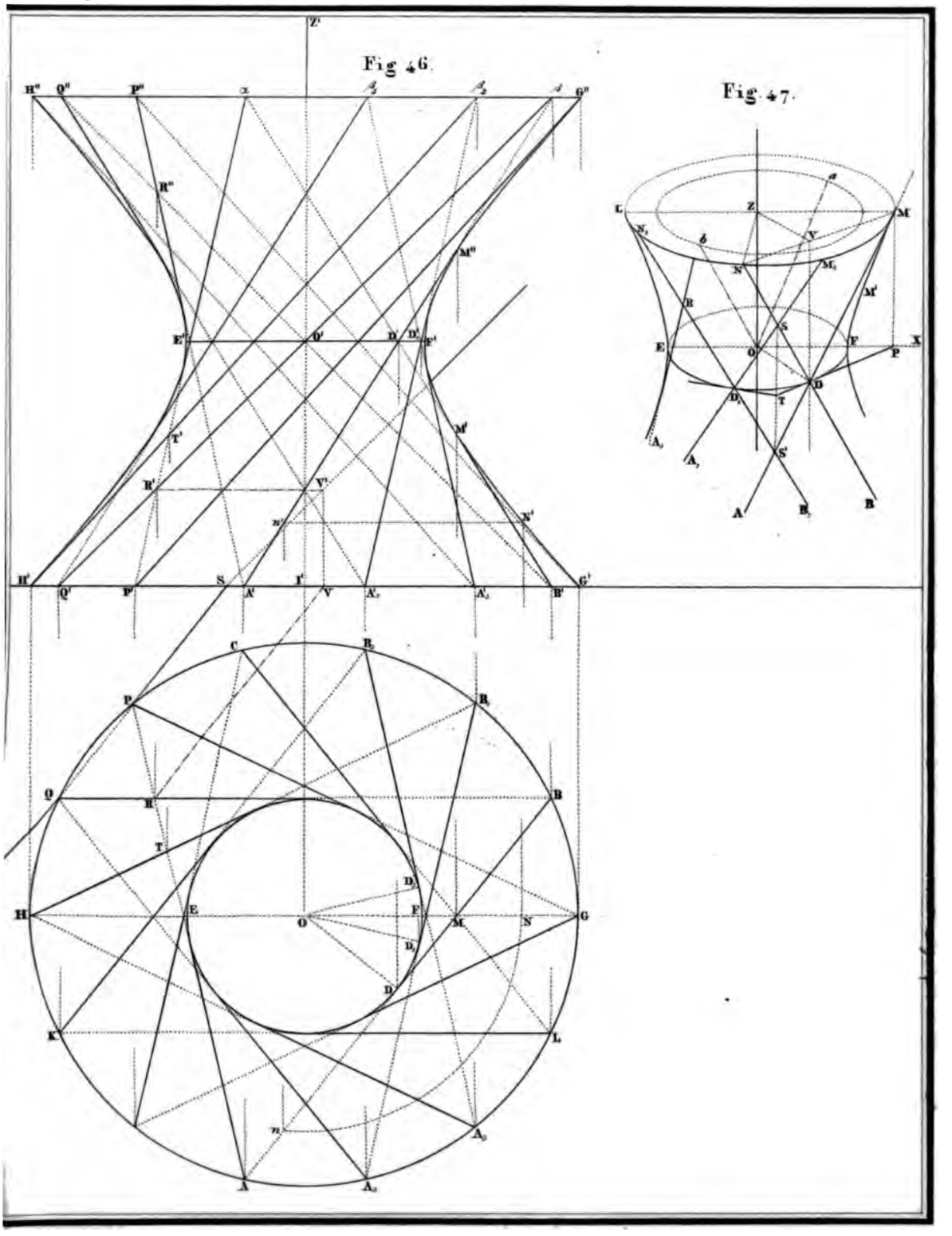
Tafel 13.

Fig. 45



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 14.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 15.

Fig. 48.

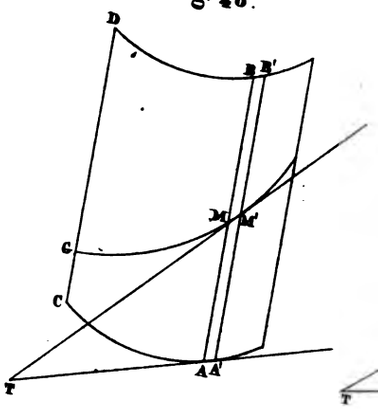


Fig. 49.

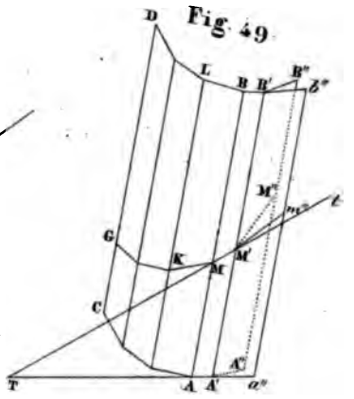


Fig. 50.

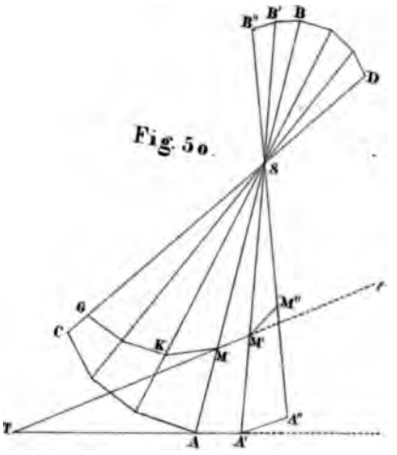


Fig. 51.

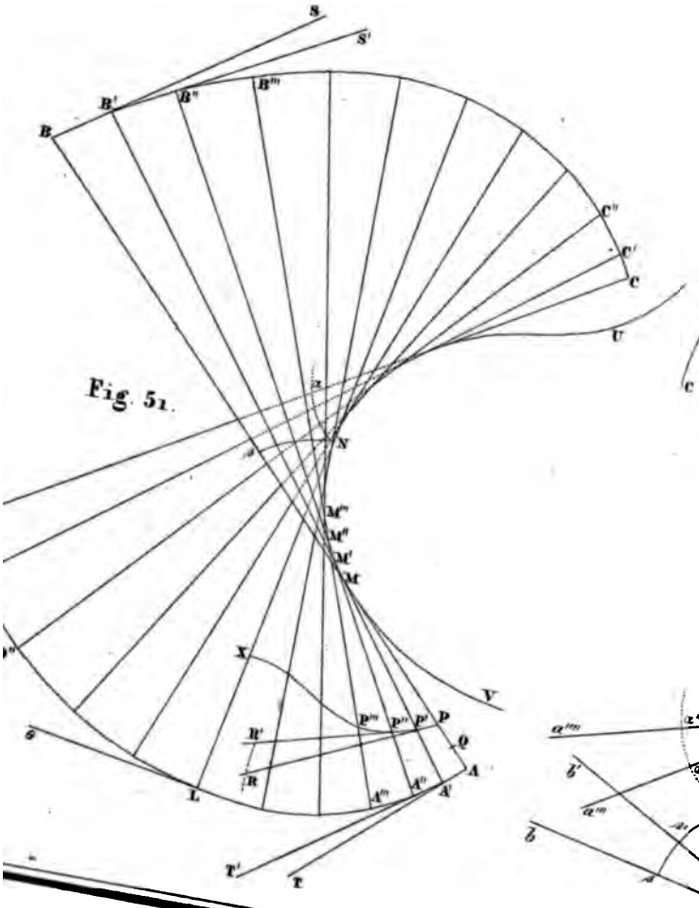


Fig. 53.

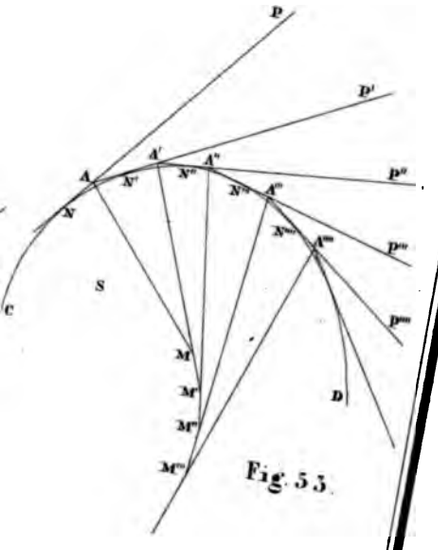
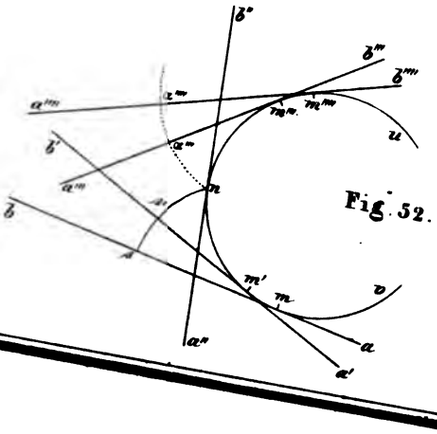


Fig. 52.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 16.

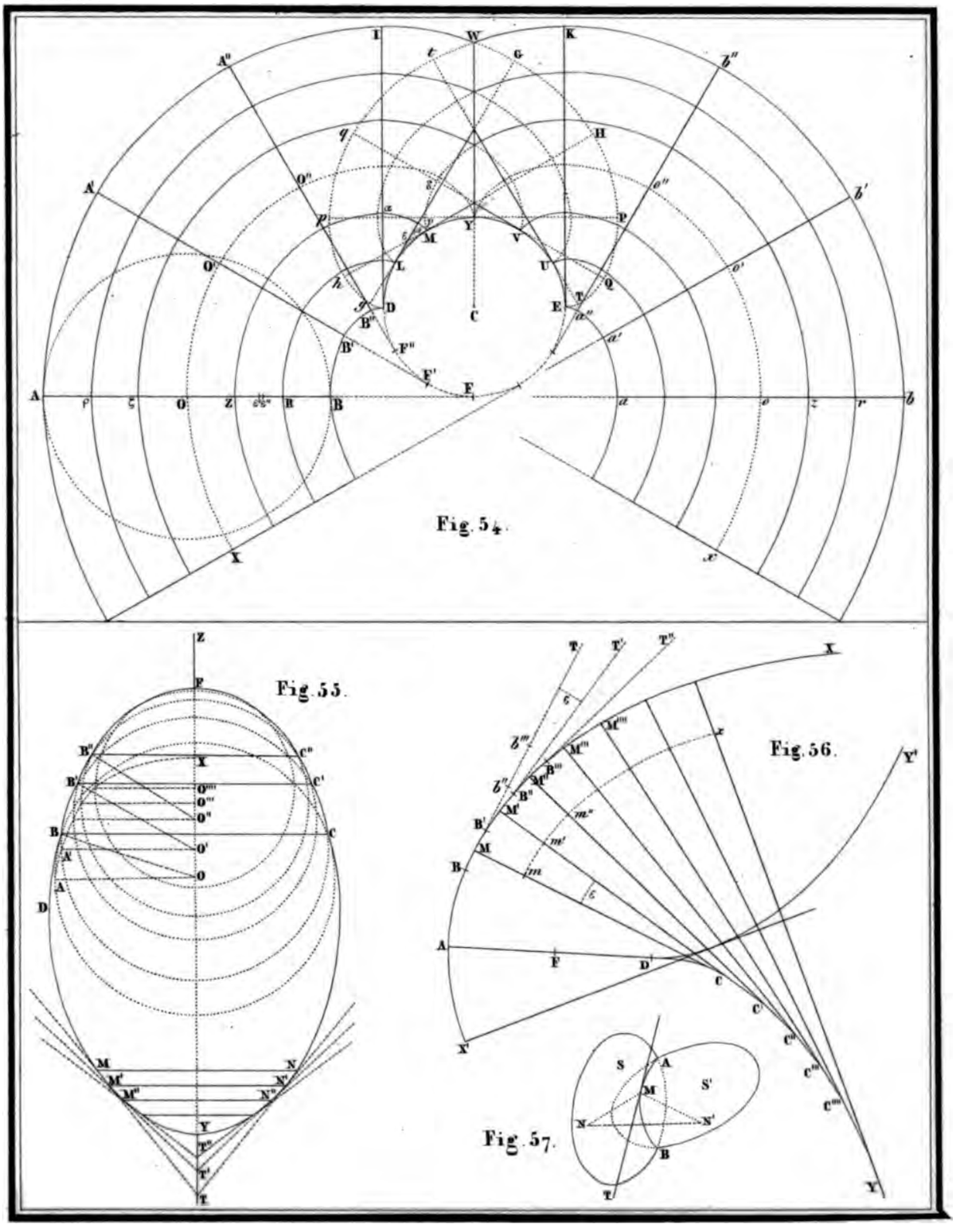


Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 56.

Fig. 57.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 17.

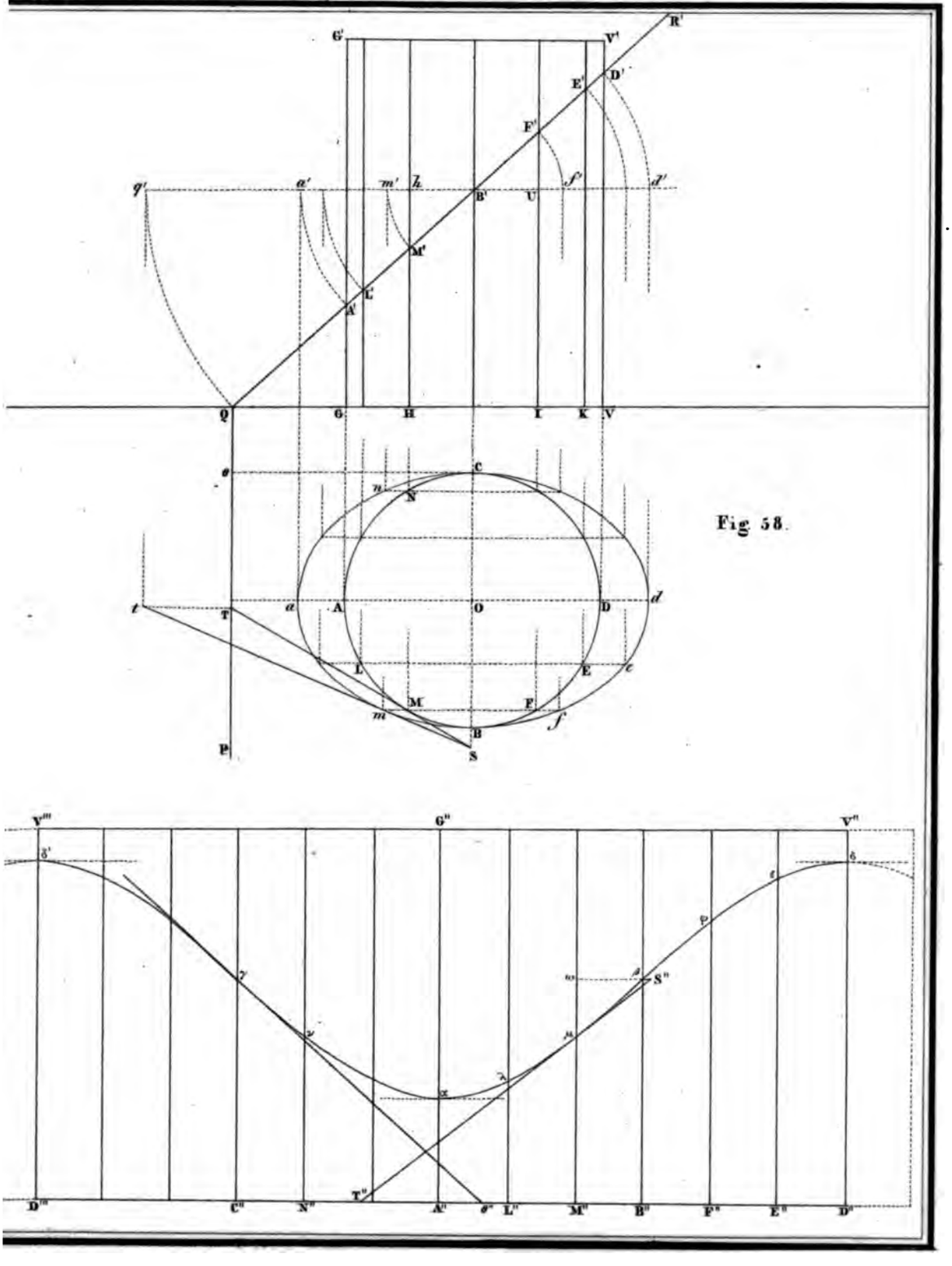
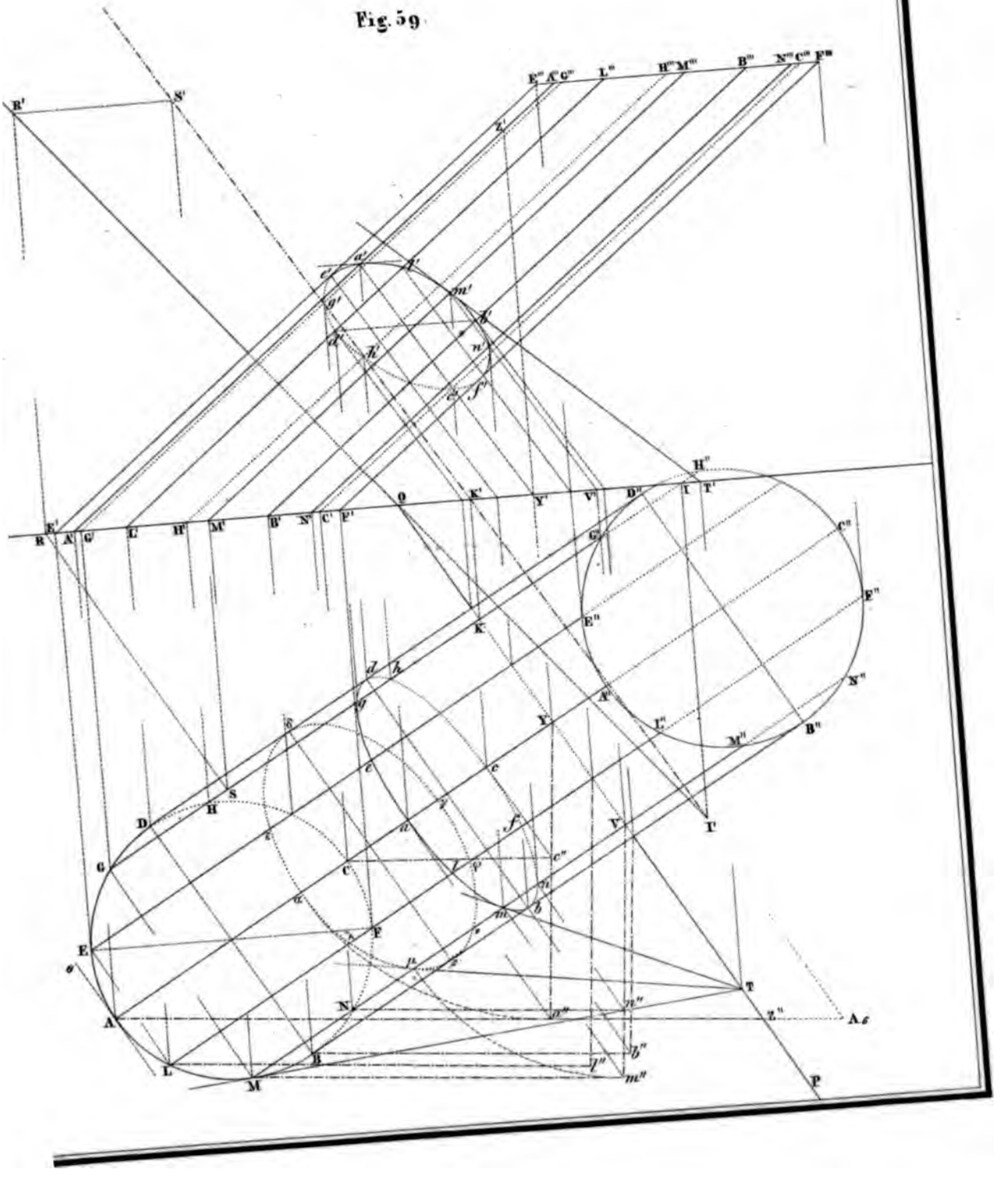


Fig. 58.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 59


R'
S'
E''' A''' G''' L'''
H''' M'''
B'''
N''' C''' F'''
Z'
a'
e'
l'
m'
g'
b'
d'
h'
n'
c'
f'
H''
O
K'
Y'
V'
D''
I
T'
R
E'
A'
G'
L'
H'
M'
B'
N'
C'
F'
G''
C''
F''
K''
E''
d
h
g
A''
N''
Y
L''
M''
B''
S
H
D
e
c
i
f
V
I'
G
C
l
c''
n
m
b
E
F
T
A
N
a''
n''
Z''
A
L
B
b''
l''
m''
M
P

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

Tafel 19.

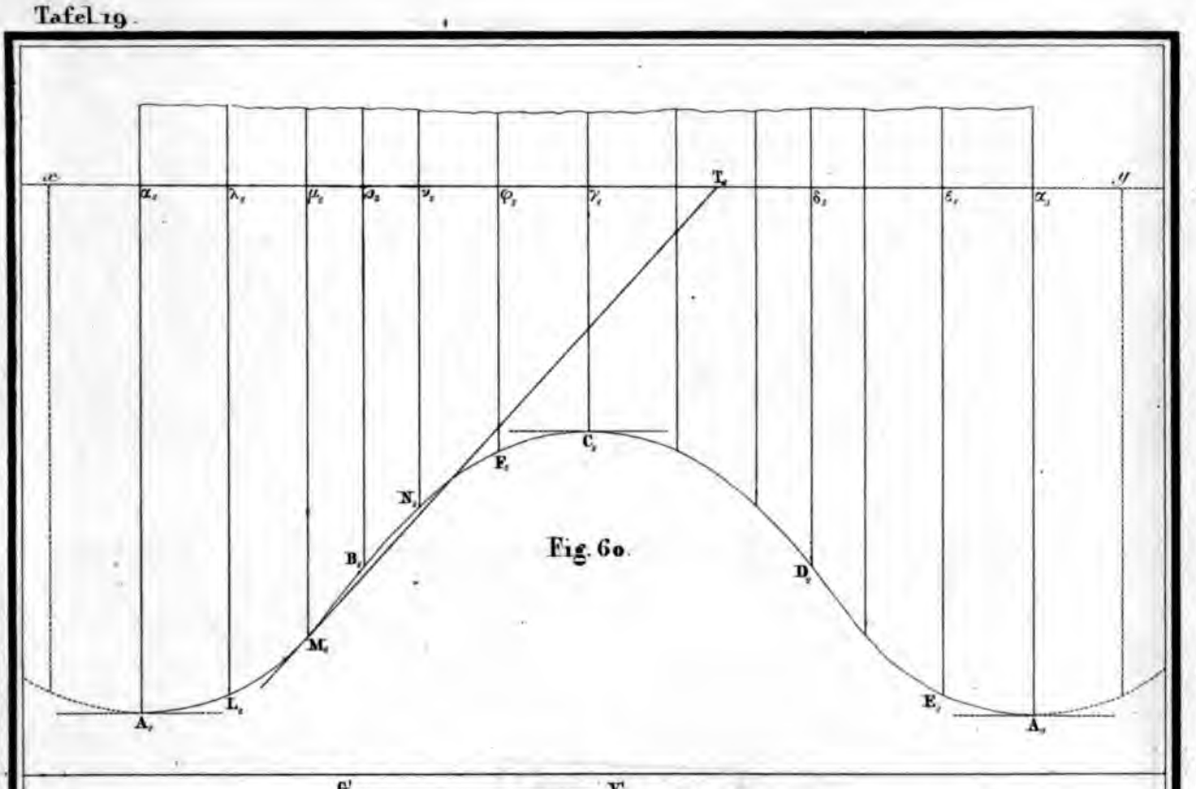


Fig. 60.

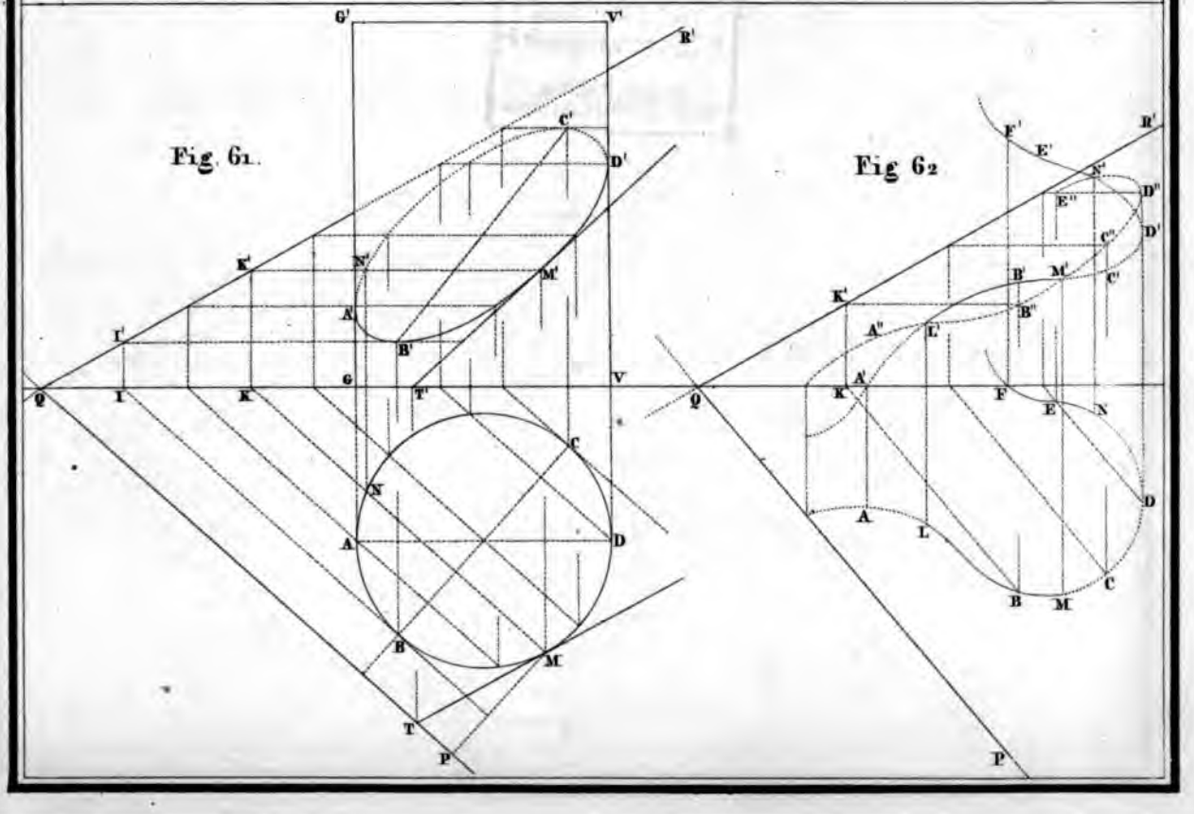


Fig. 61.

Fig. 62

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

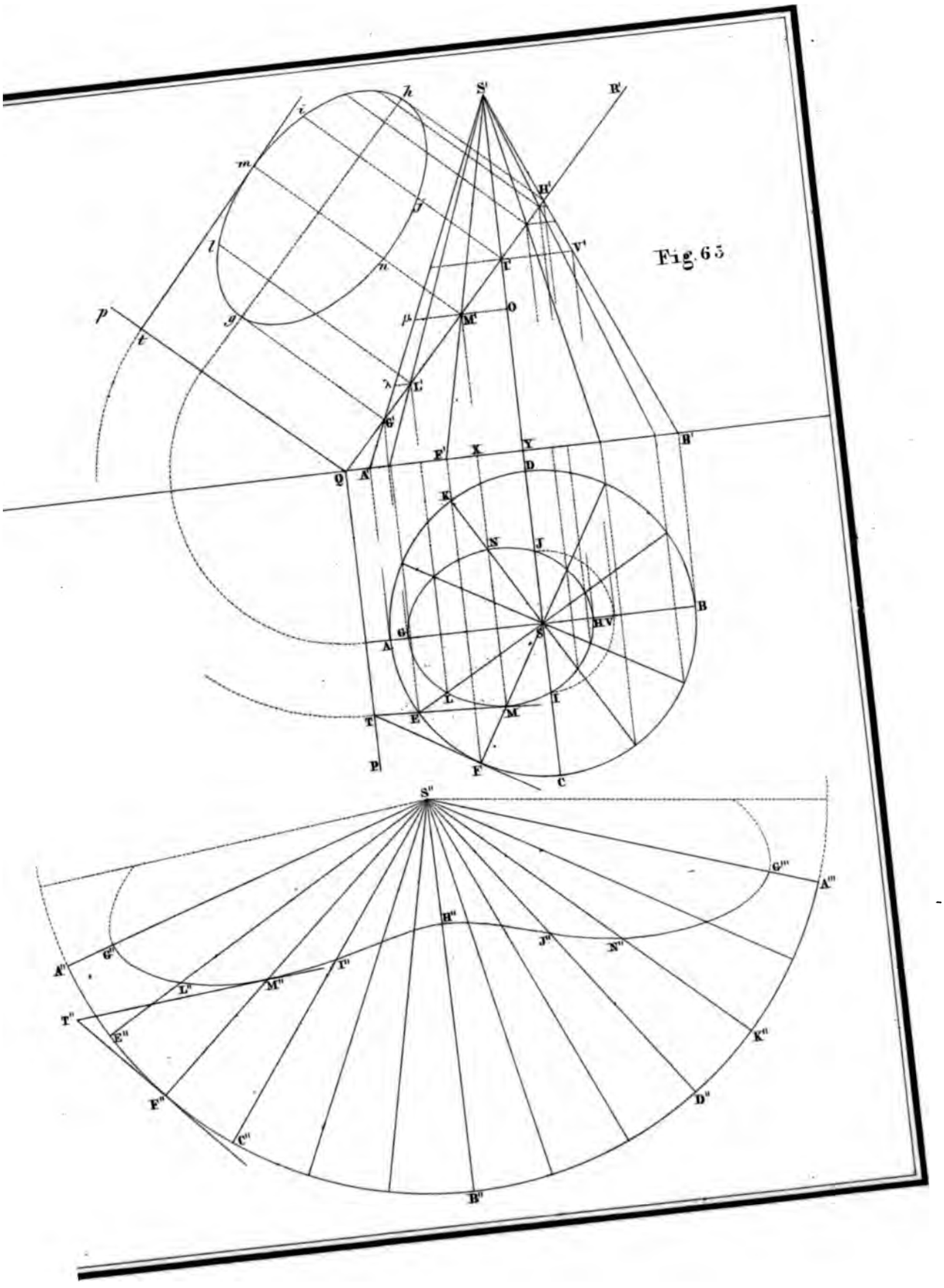
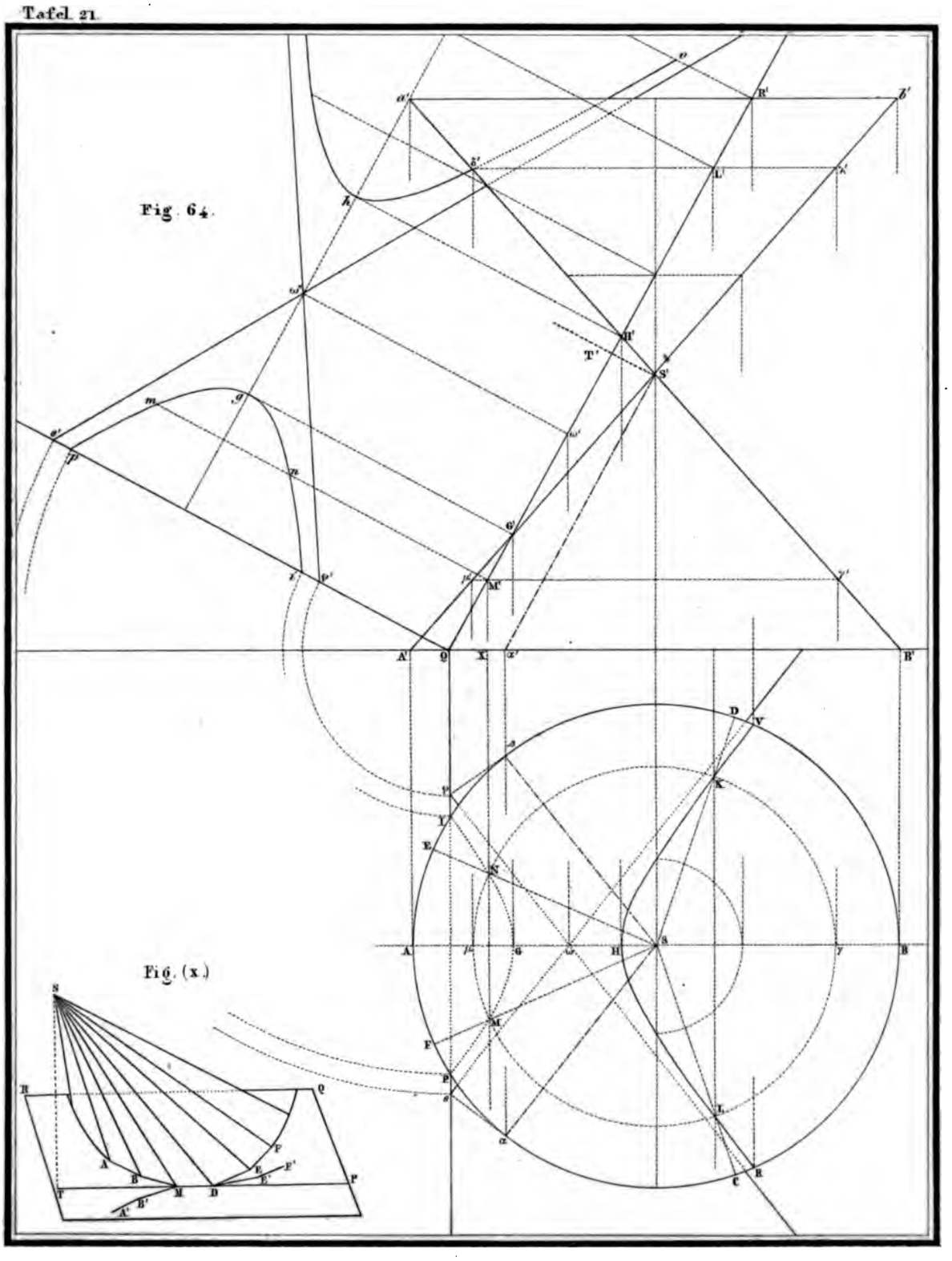

S'
R'
h
i
m
H'
j
l
V'
T'
n
p
g
μ
M'
O
t
λ
L'
G'
F'
X
Y
B'
Q
A'
D
K
N
J
B
G
S
H V
A
L
I
T
E
M
P
F
C
S''
G'''
A'''
H''
J''
N''
A''
G''
I''
L''
M''
T''
E''
K''
F''
D''
C''
B''

Fig. 65

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 21.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

afel 22.

Fig. 65.

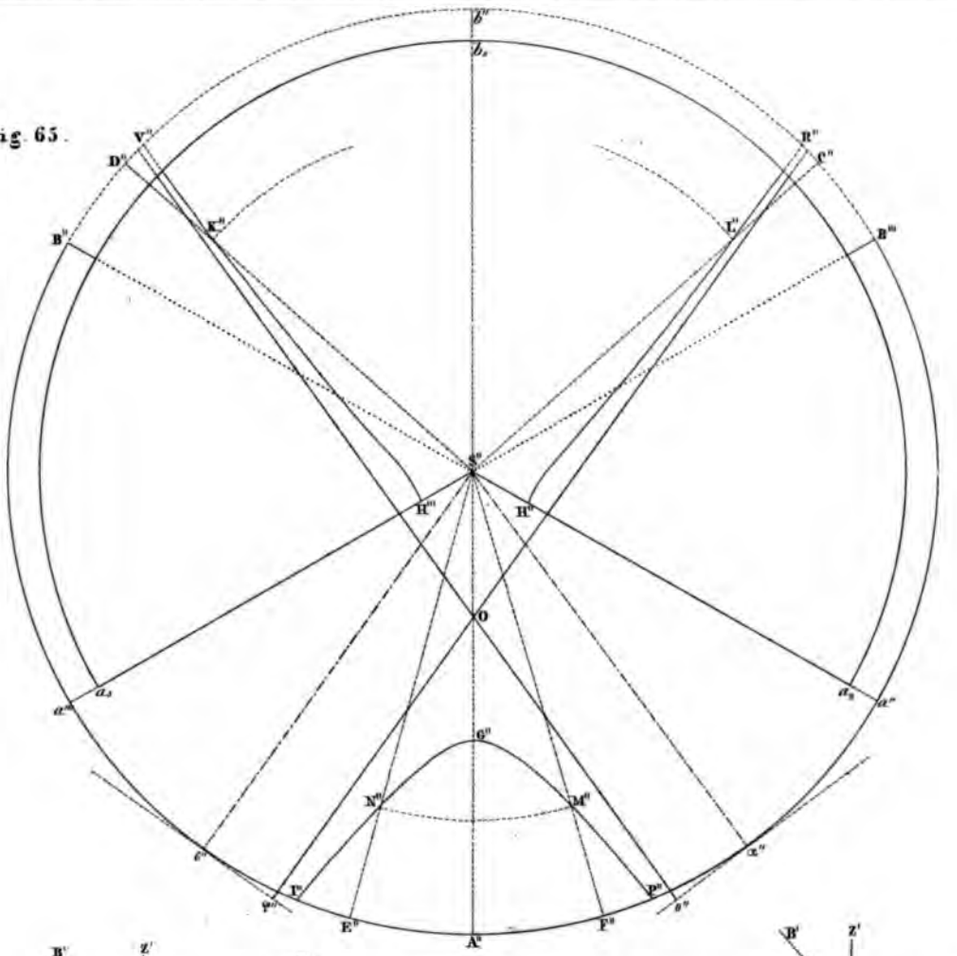


Fig. 66.

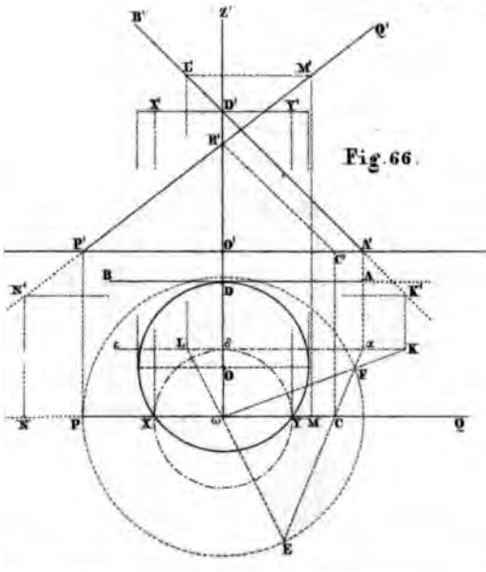
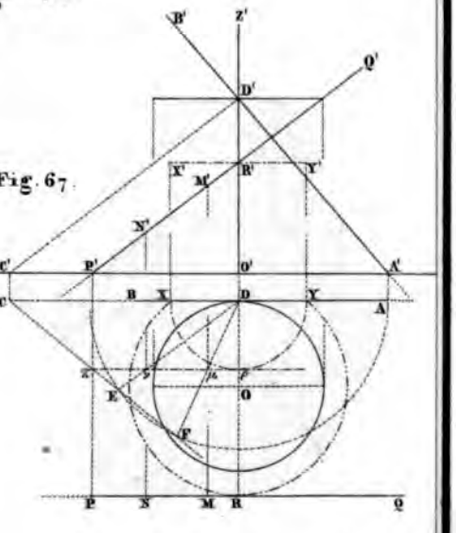
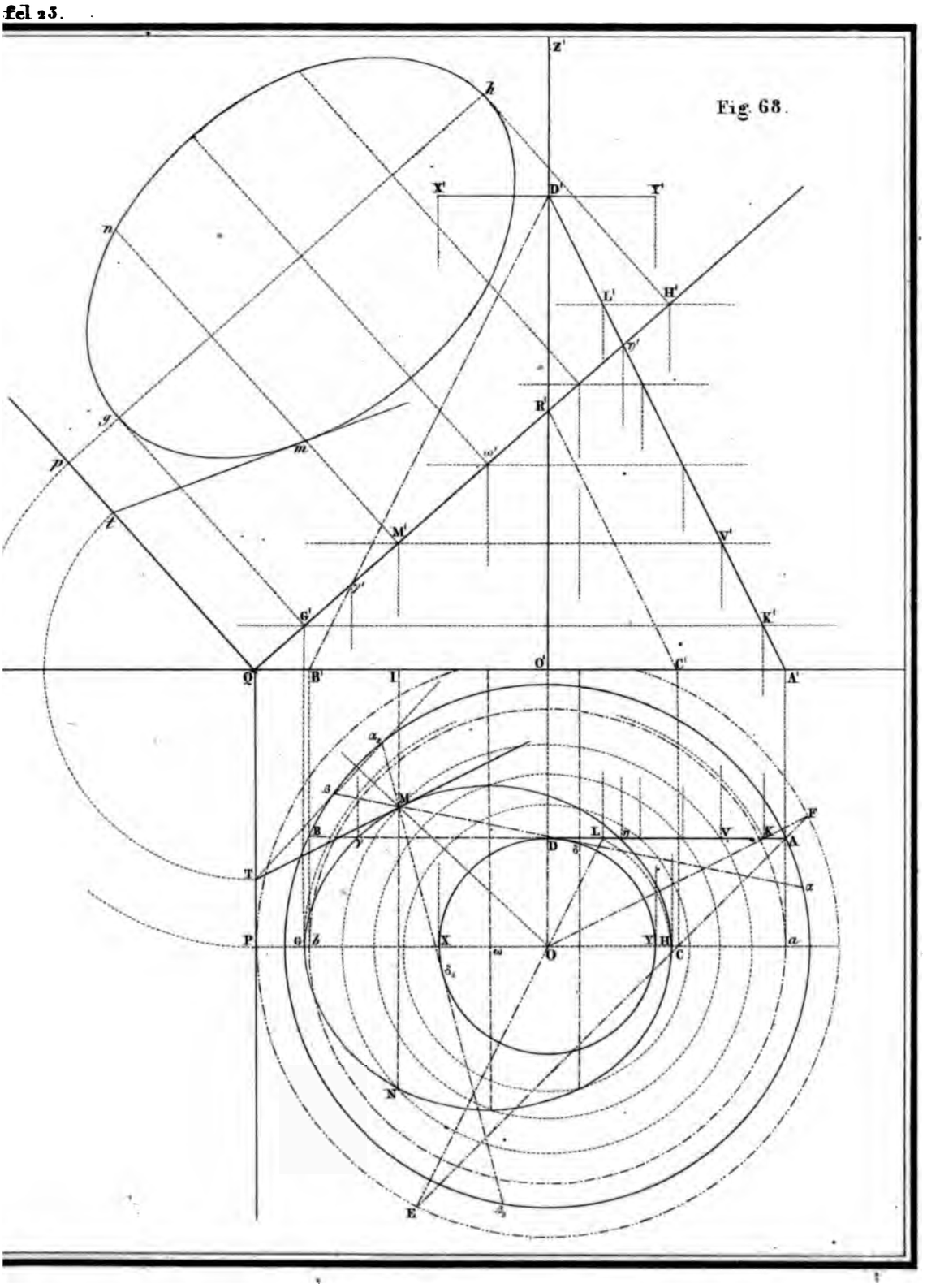


Fig. 67.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

fel 23.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 24.

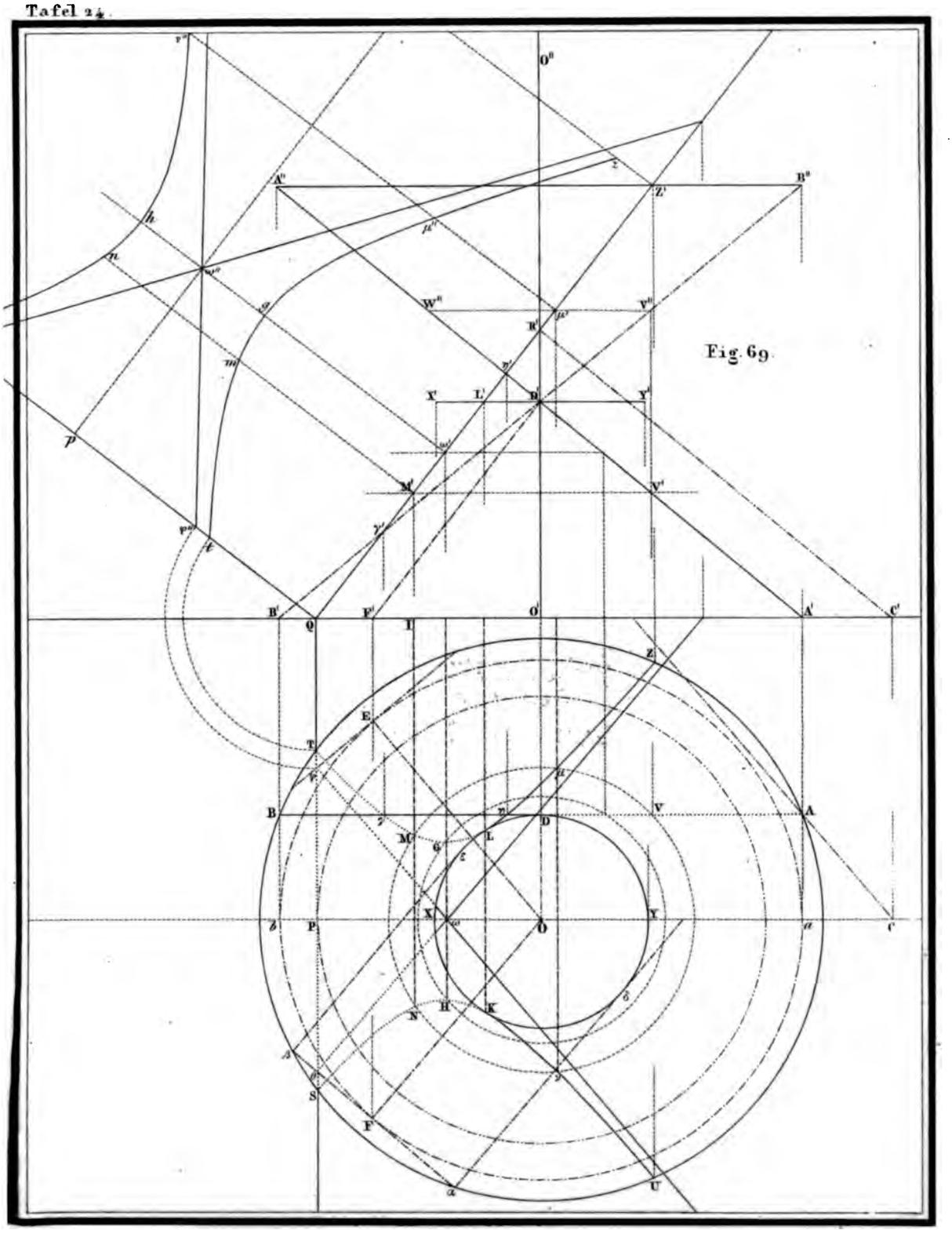


Fig. 69.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

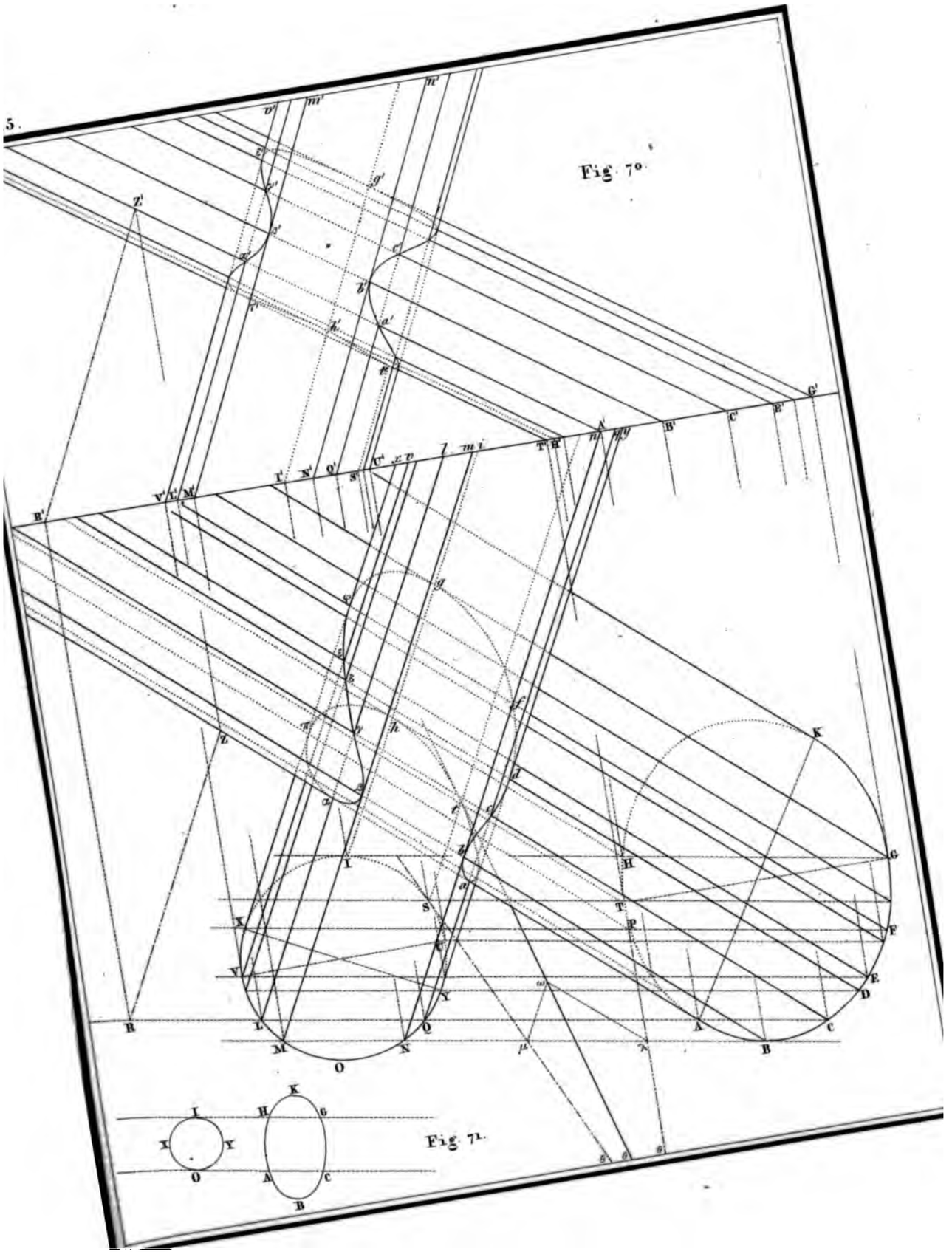


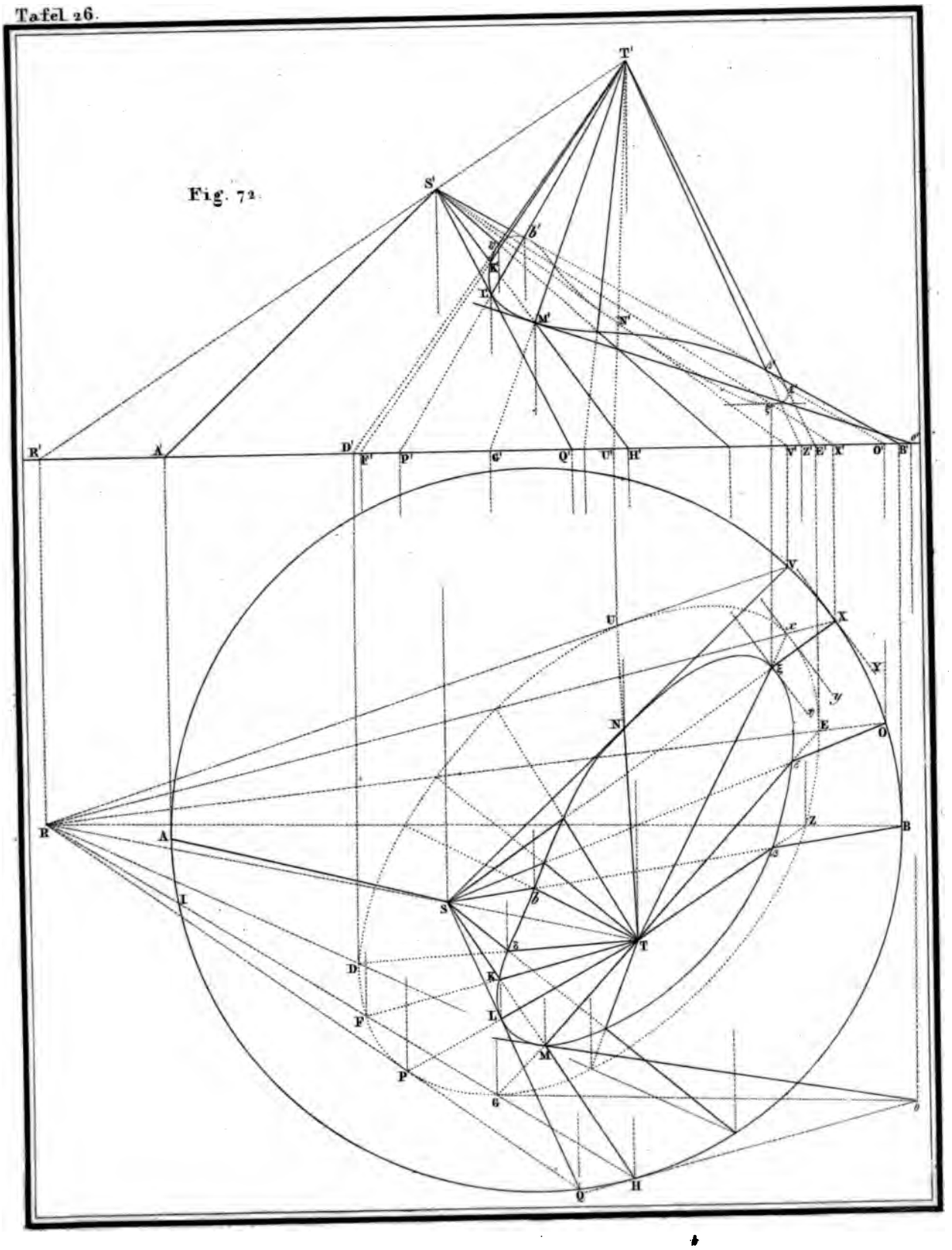
Fig. 70.
Fig. 71.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 26.

Fig. 72.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 27.

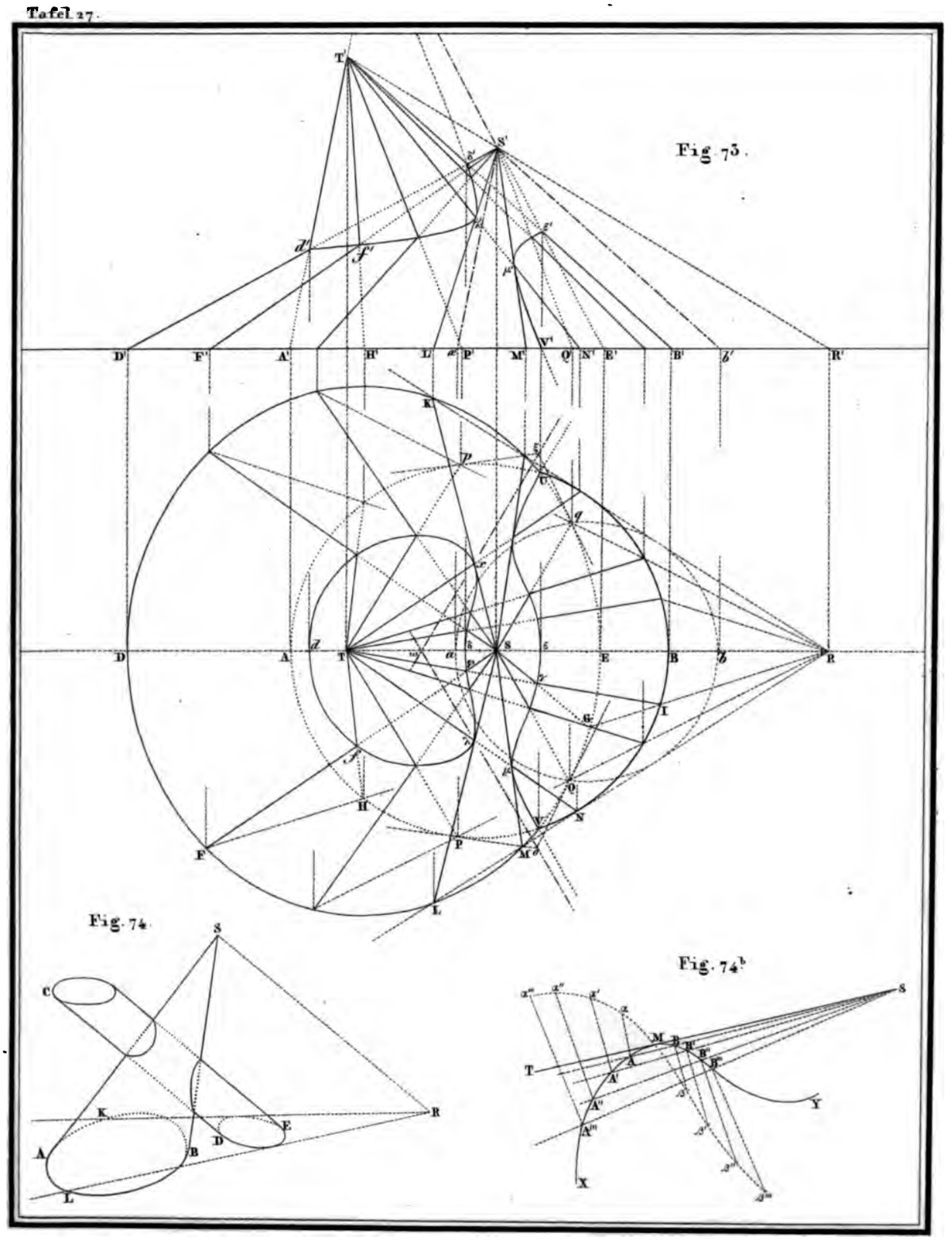


Fig. 74.

Fig. 74b

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

fol 28.

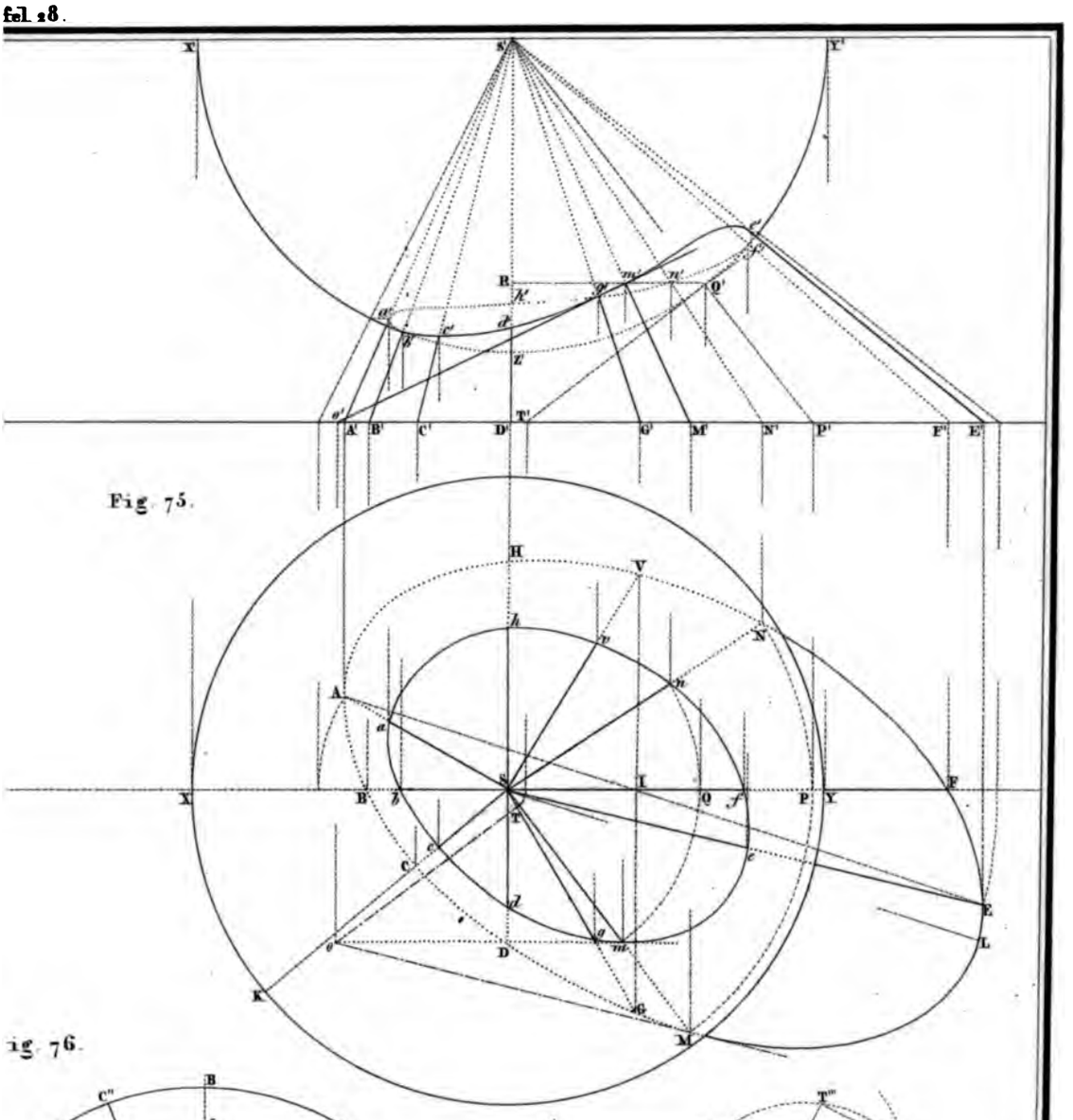
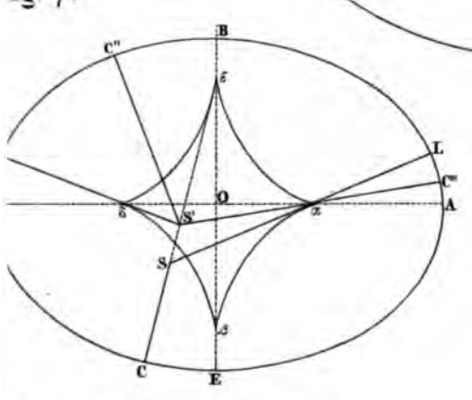


Fig. 75.

ig. 76.



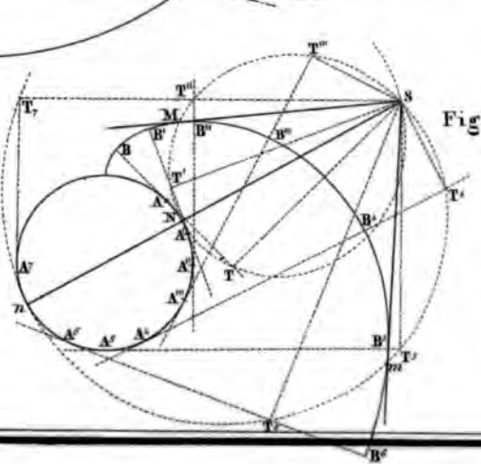


Fig. 77

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR
TILDEN

afel 29.

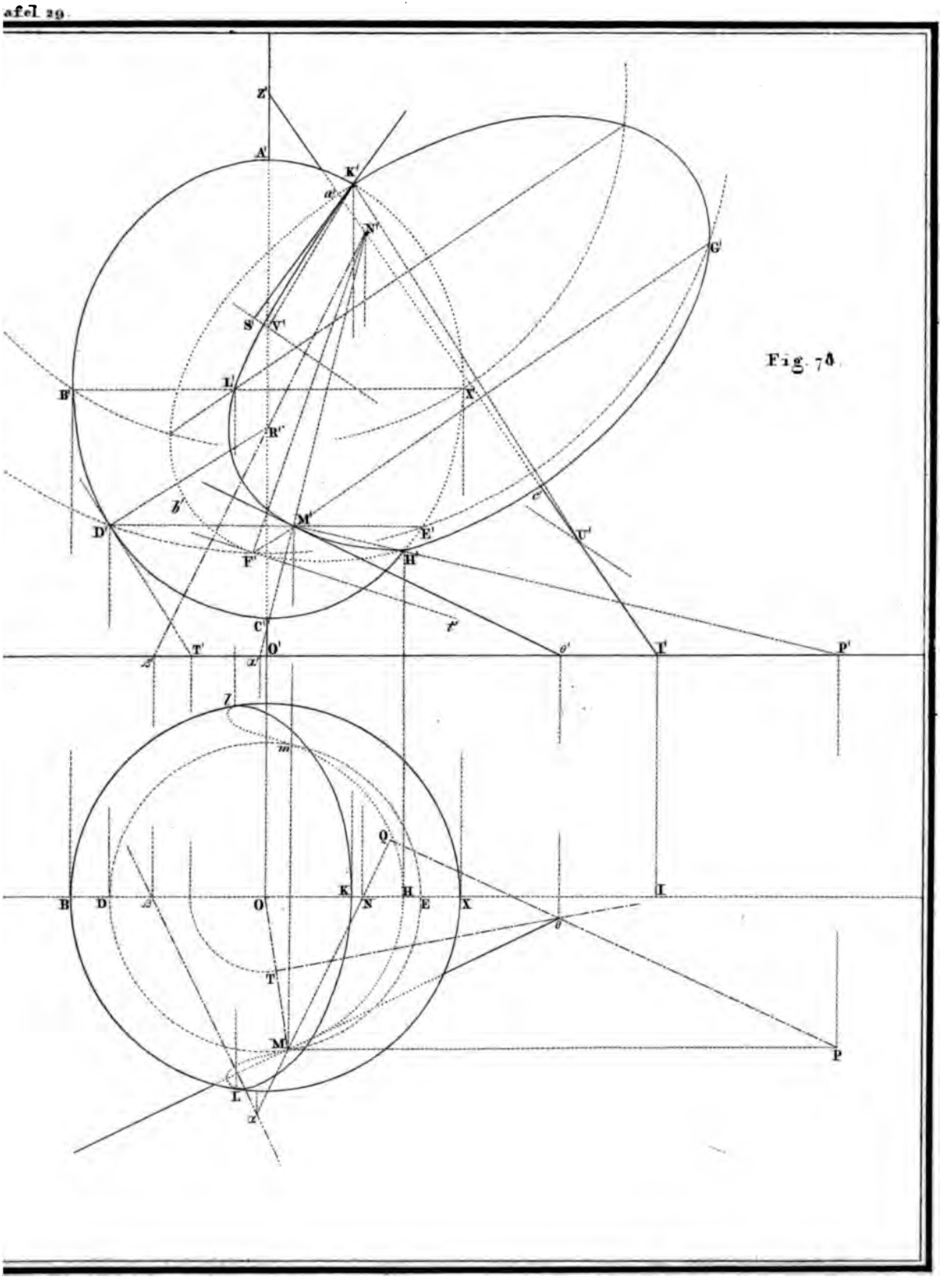


Fig. 78.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 30.

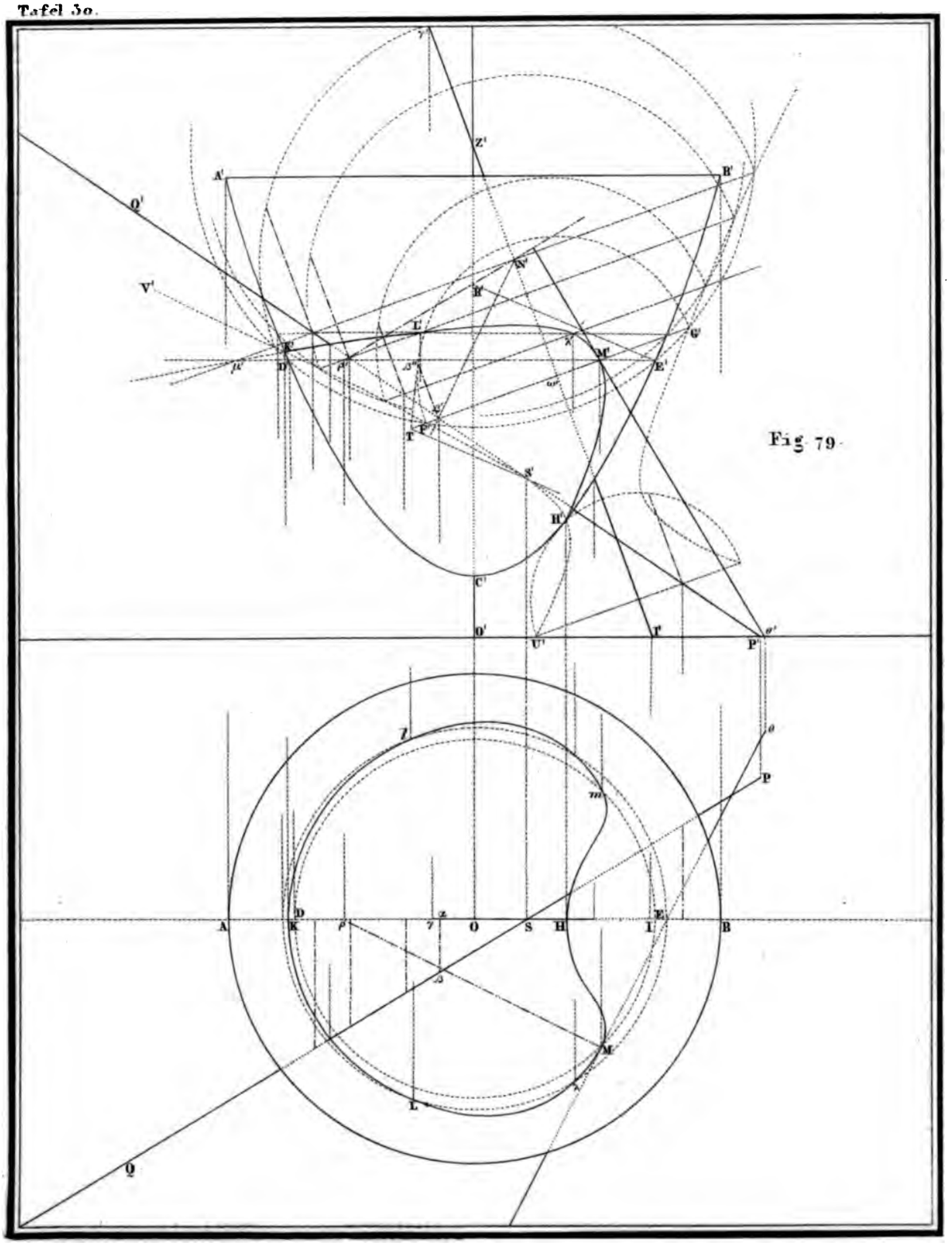


Fig 79.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

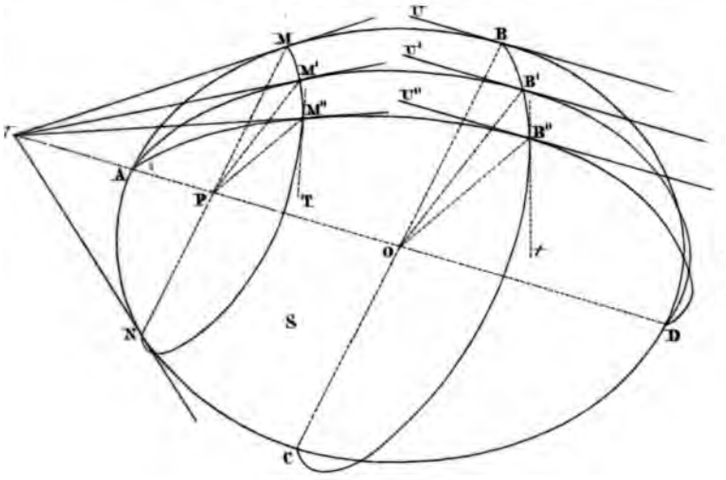


Fig. 80.

Fig. 81.

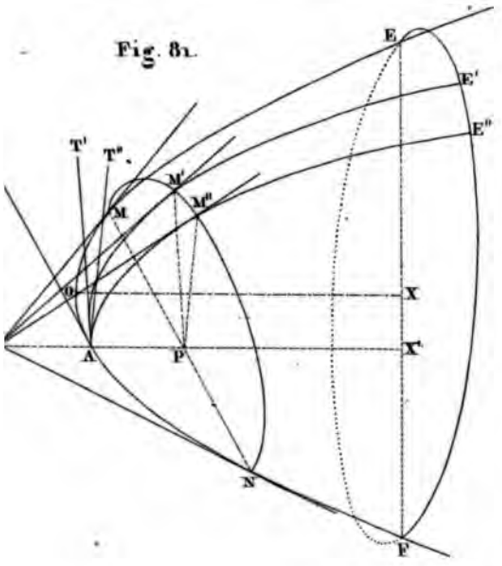


Fig. 82.

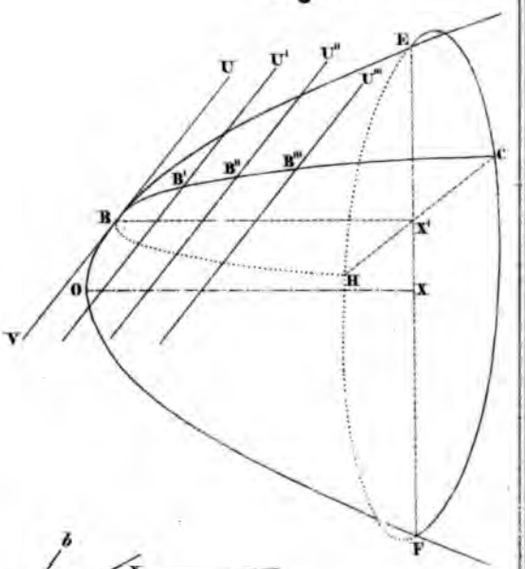
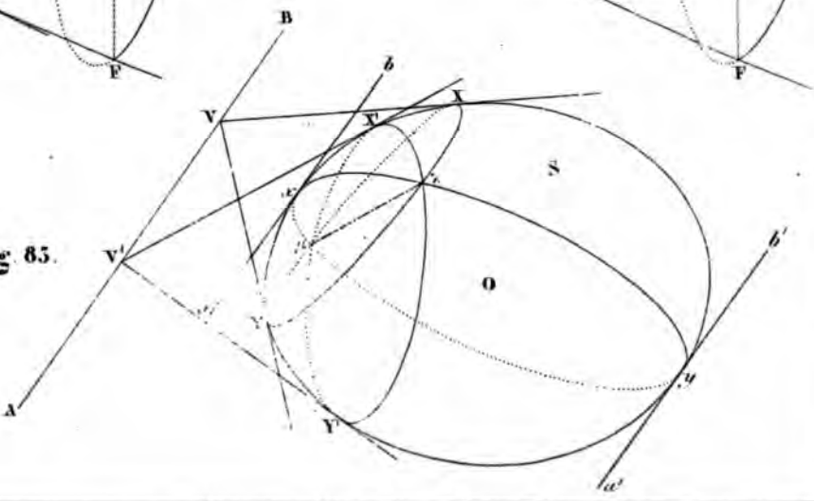


Fig. 83.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

fel 32.

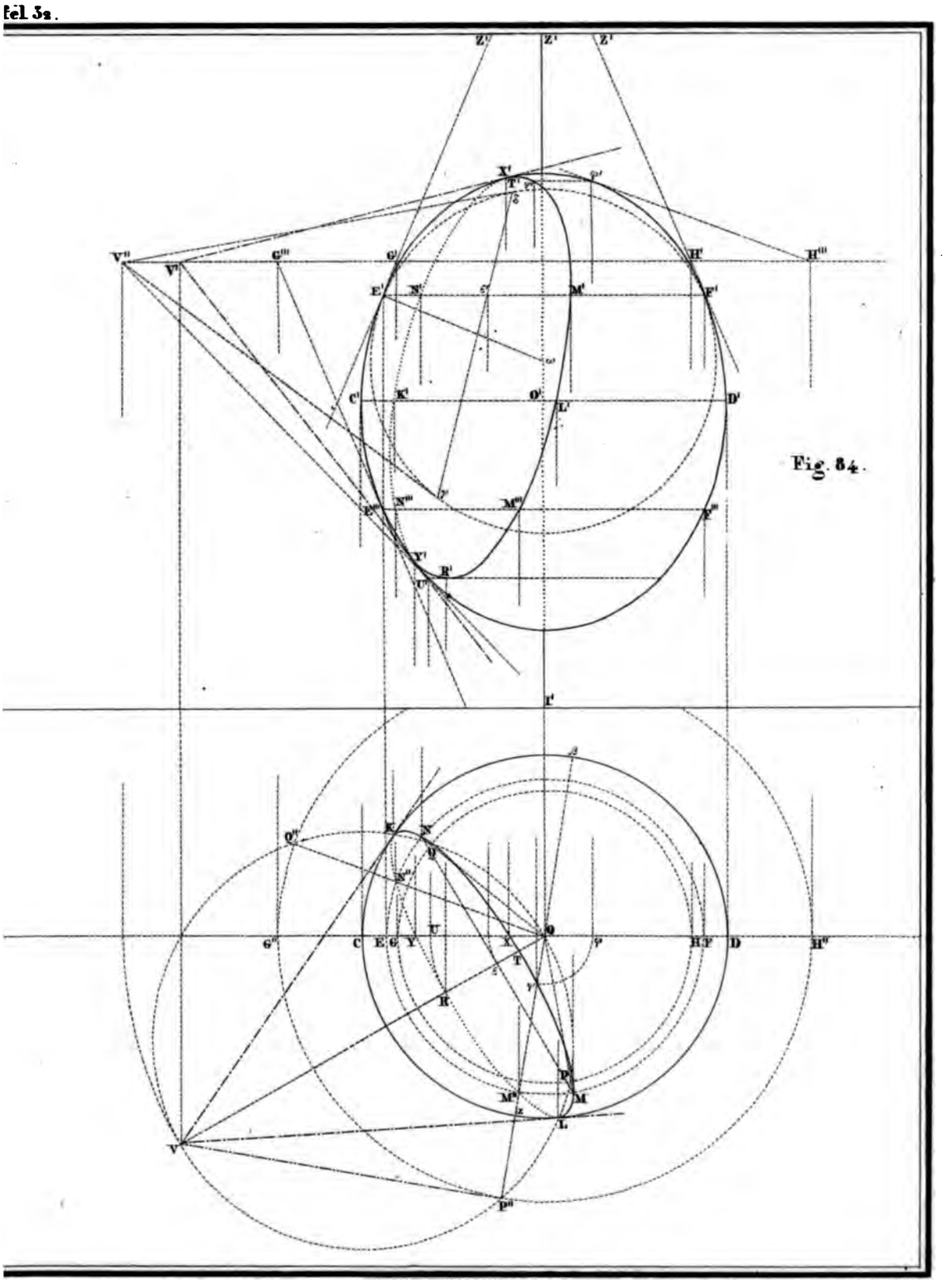

Z'
Z'
Z'
X'
T'
V''
V'
G'''
G'
H'
H'''
E'
N'
M'
F'
C'
K'
O'
L'
D'
E''
N'''
M'''
F'''
Y'
R'
U'
I'
K
N
Q''
Q
N''
G''
C
E
G
Y
U
X
O
H
F
D
H''
T
R
P
M''
M
L
V
P''

Fig. 84.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN

Tafel 33.

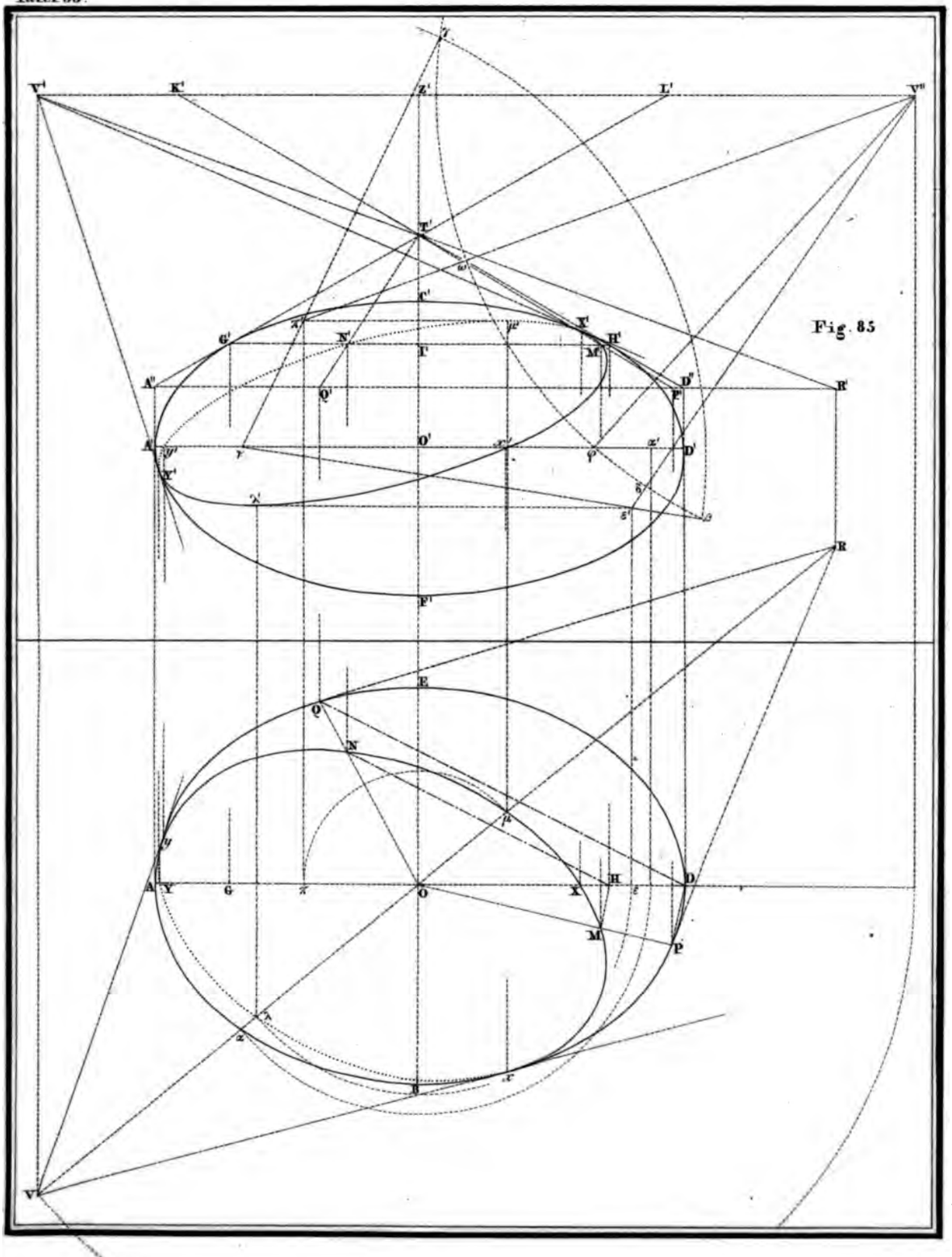


Fig. 85

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

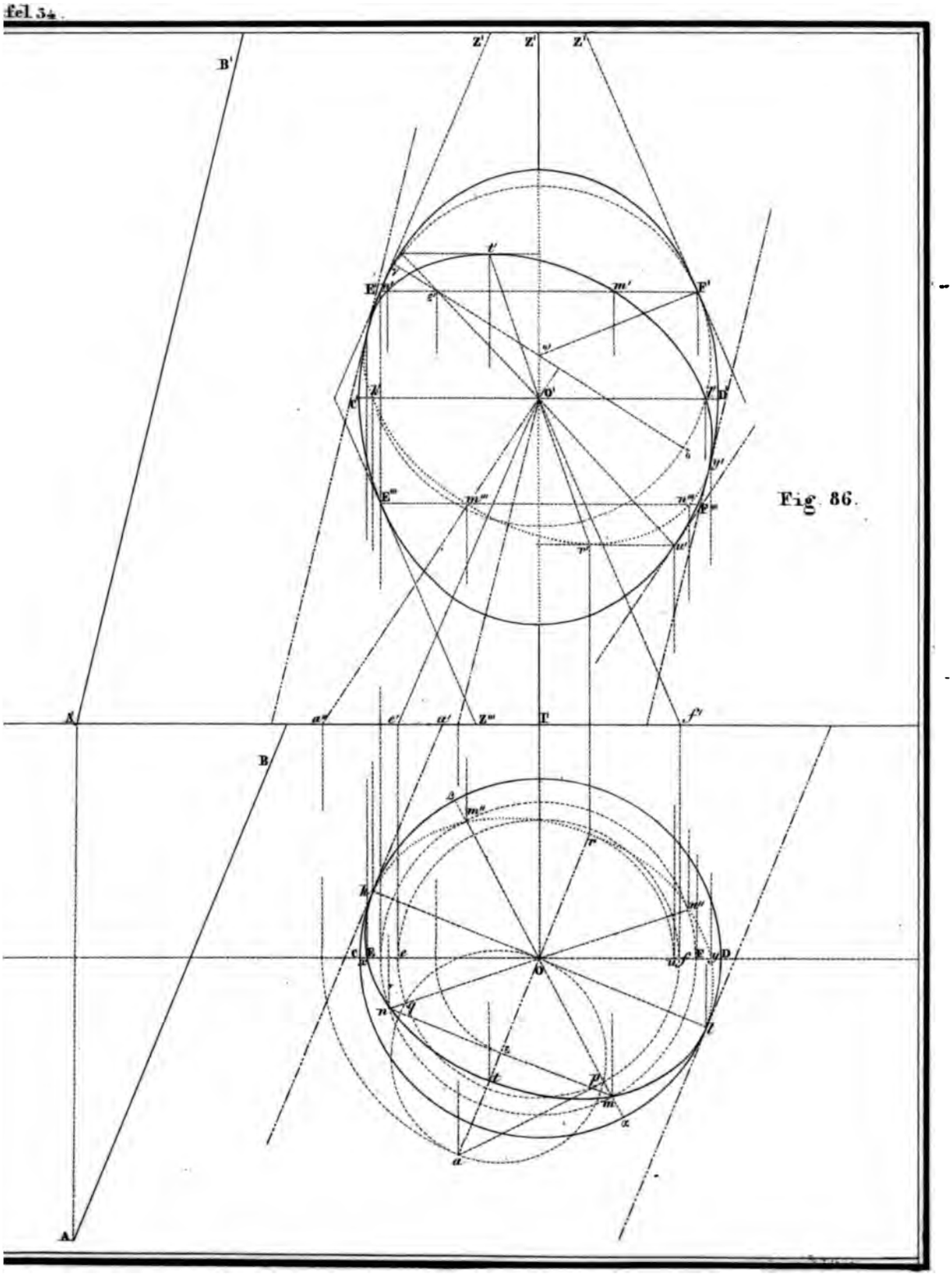


Fig. 86.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tel. 35.

Fig. 87.

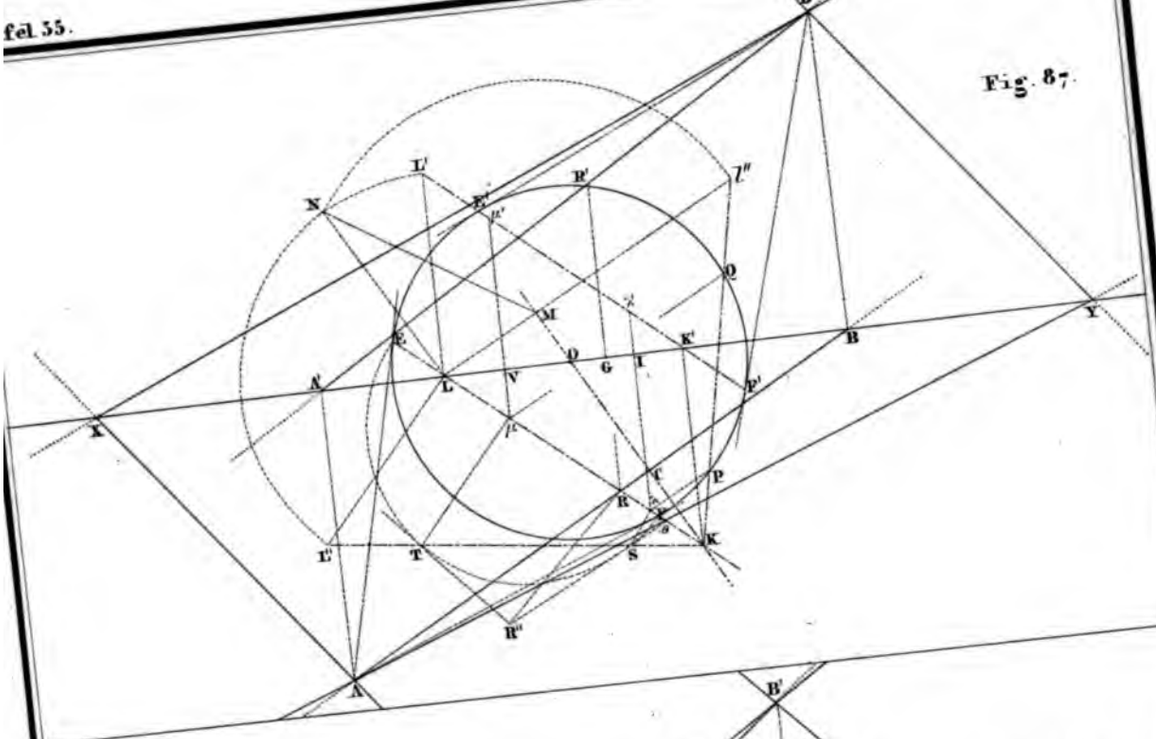
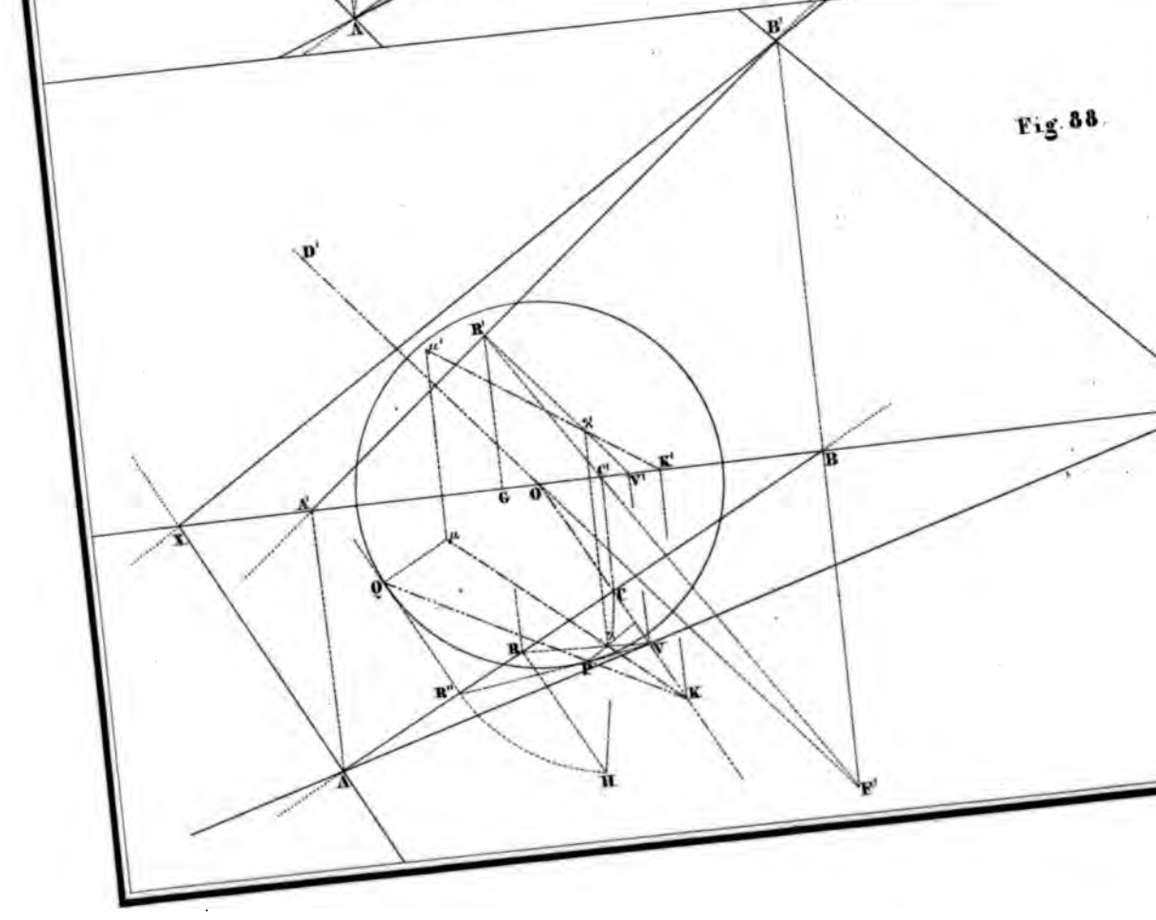


Fig. 88.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 56.

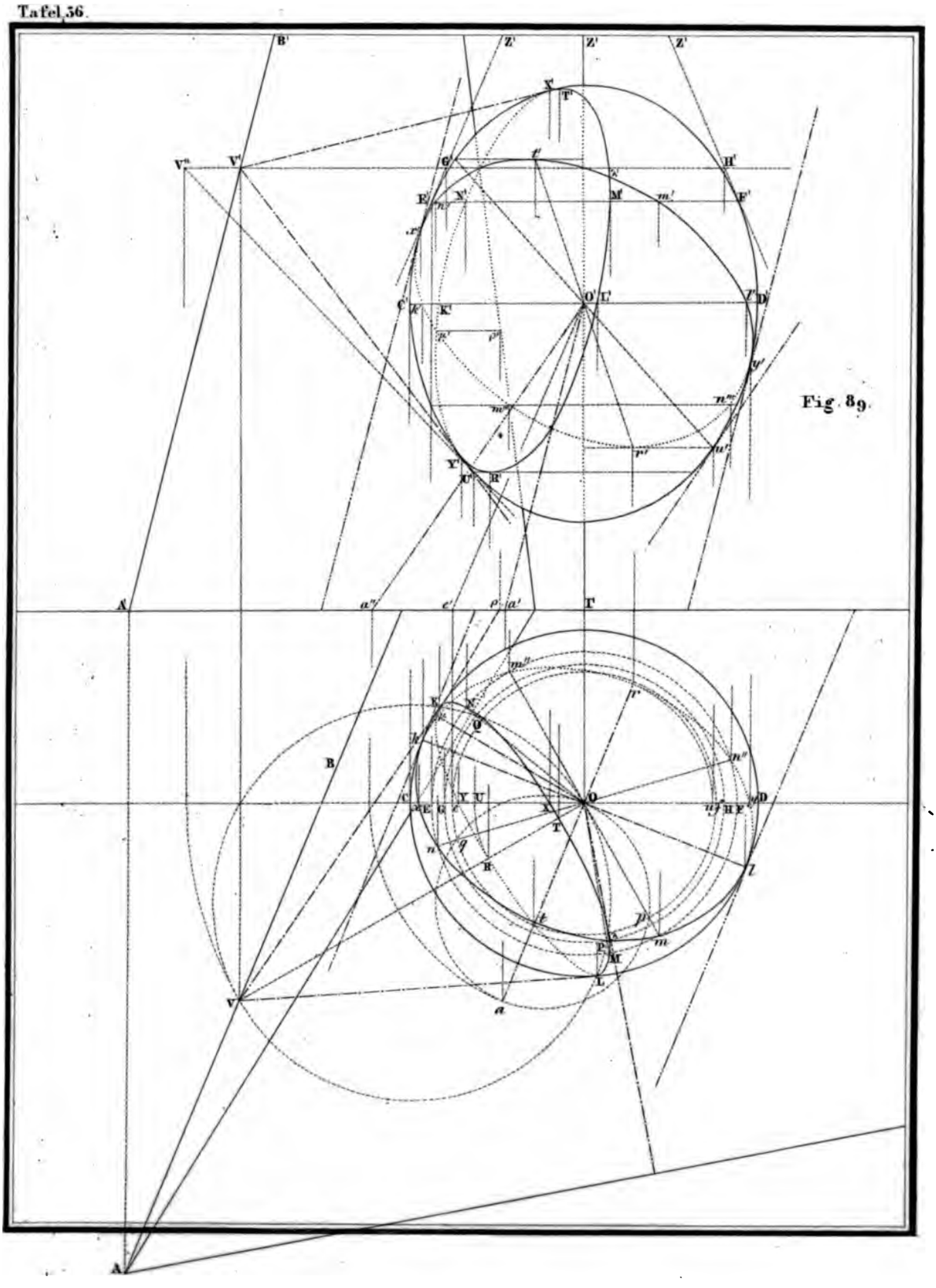


Fig. 89.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

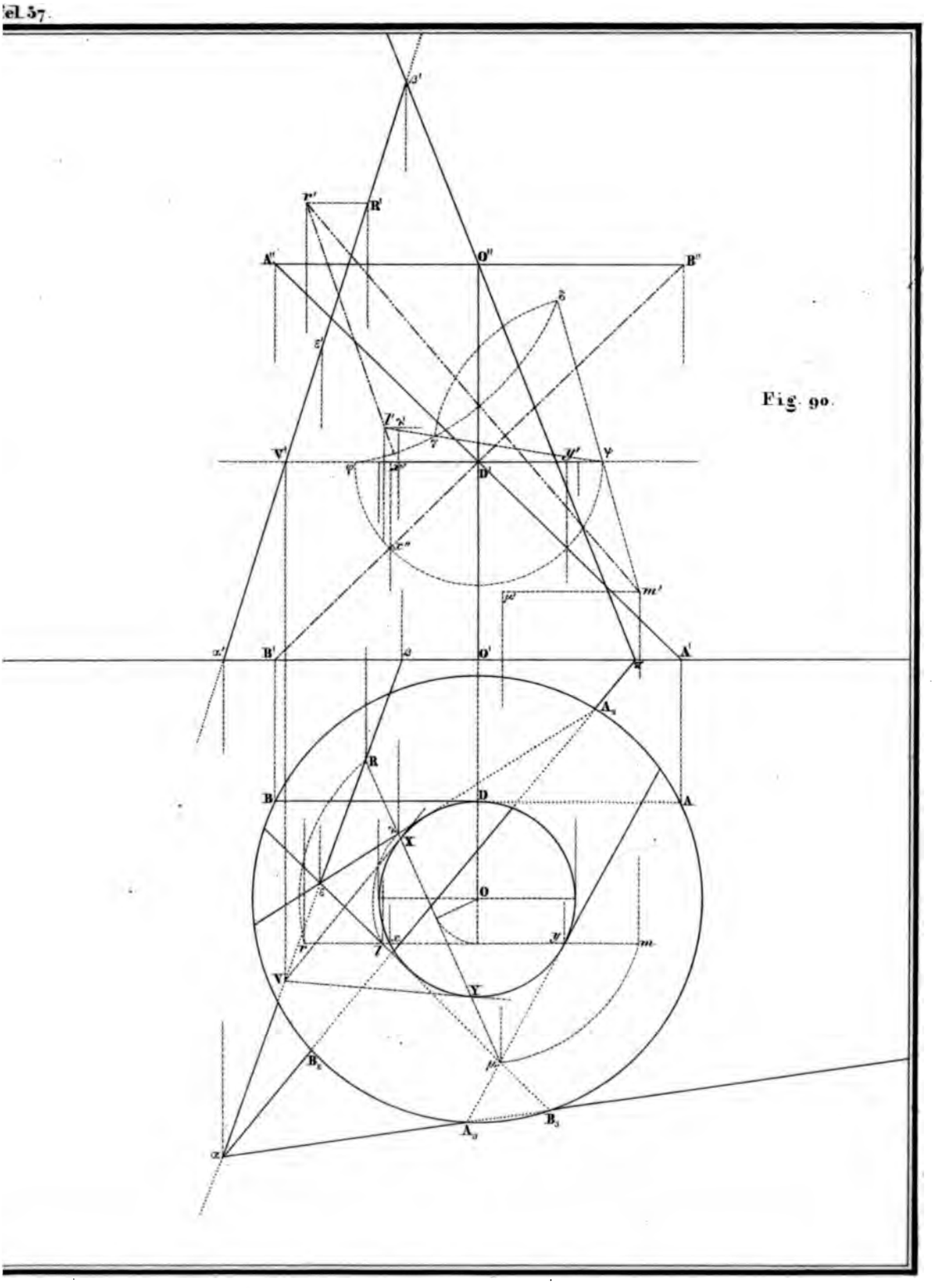
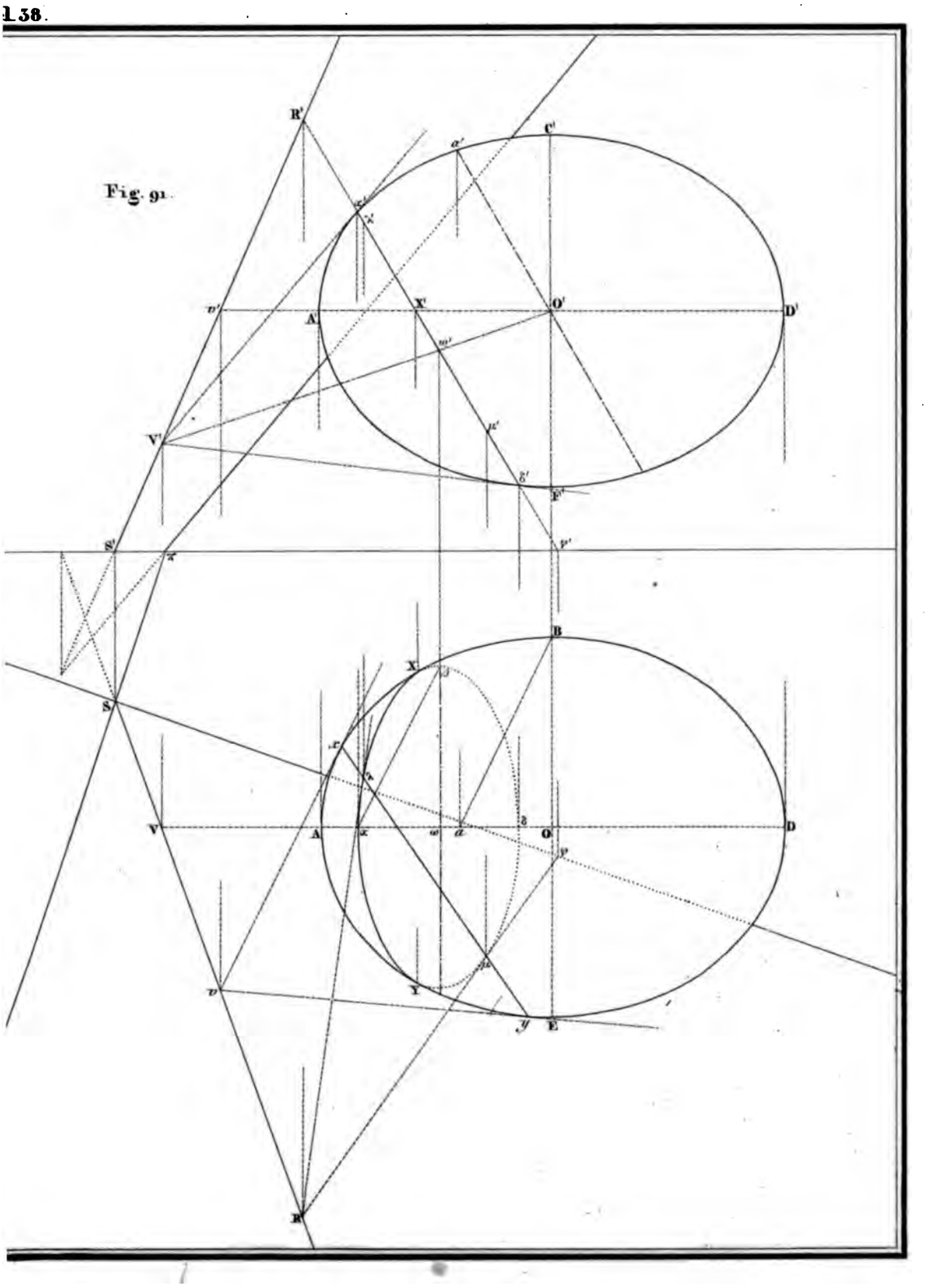


Fig. 90.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

Fig. 91.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Pl. 39.

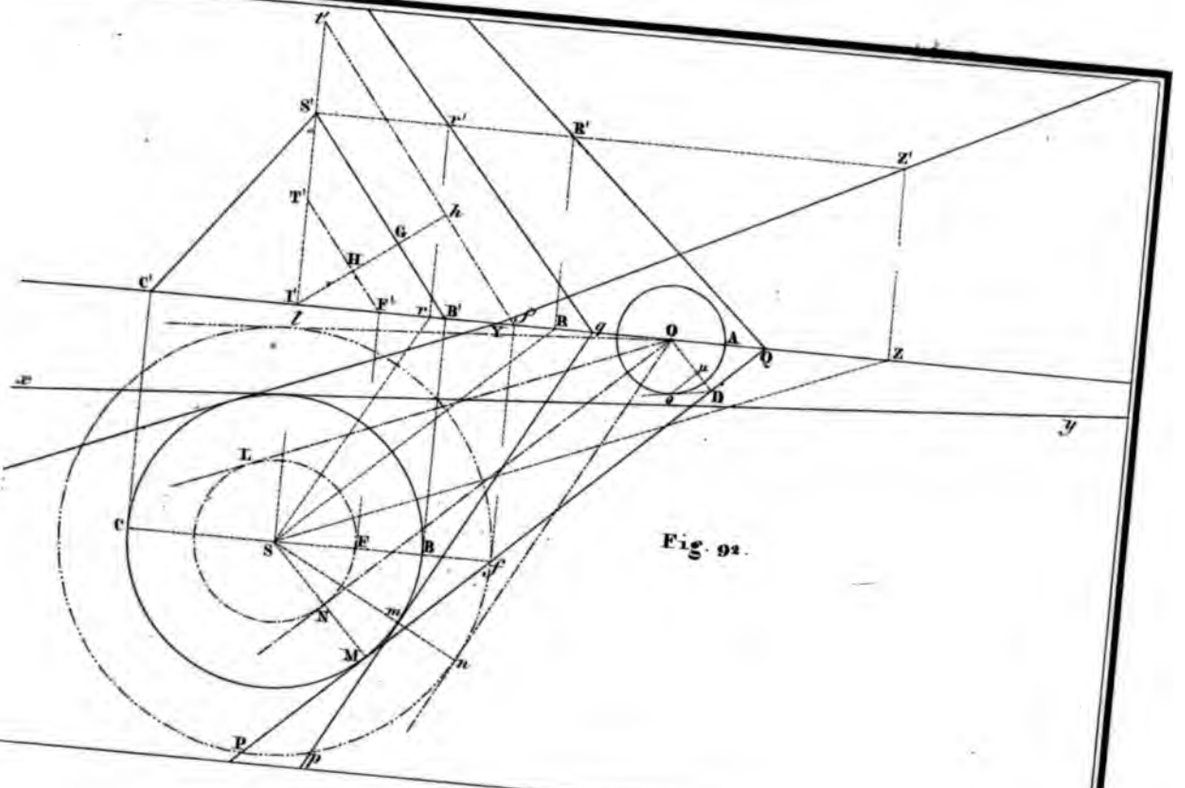


Fig. 92.

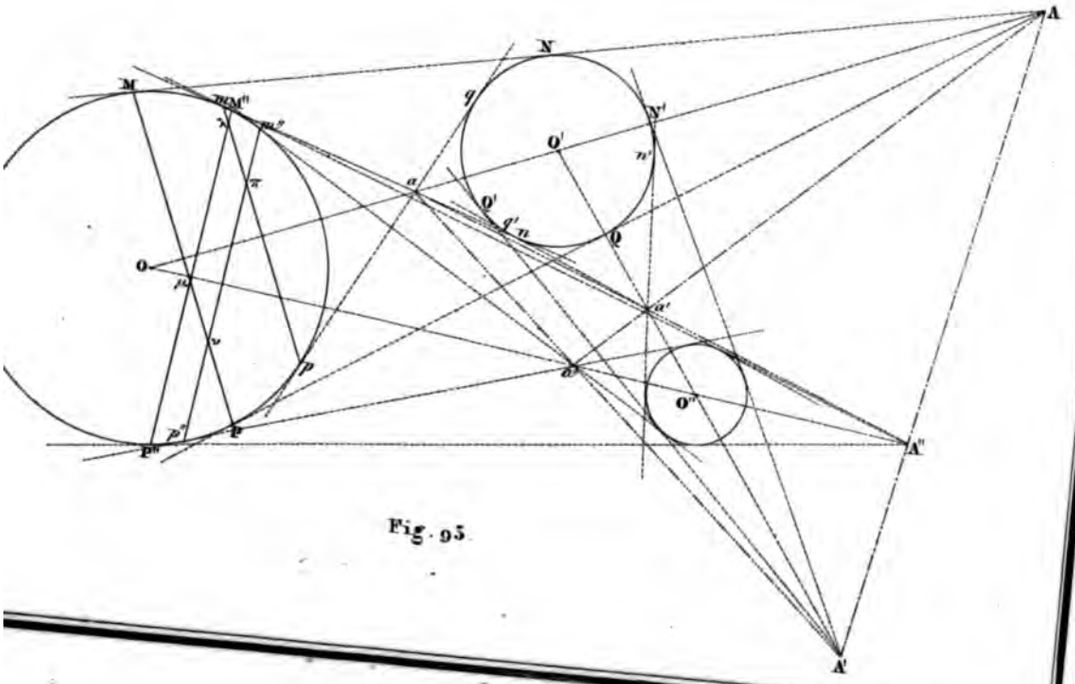


Fig. 93.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

fel 40

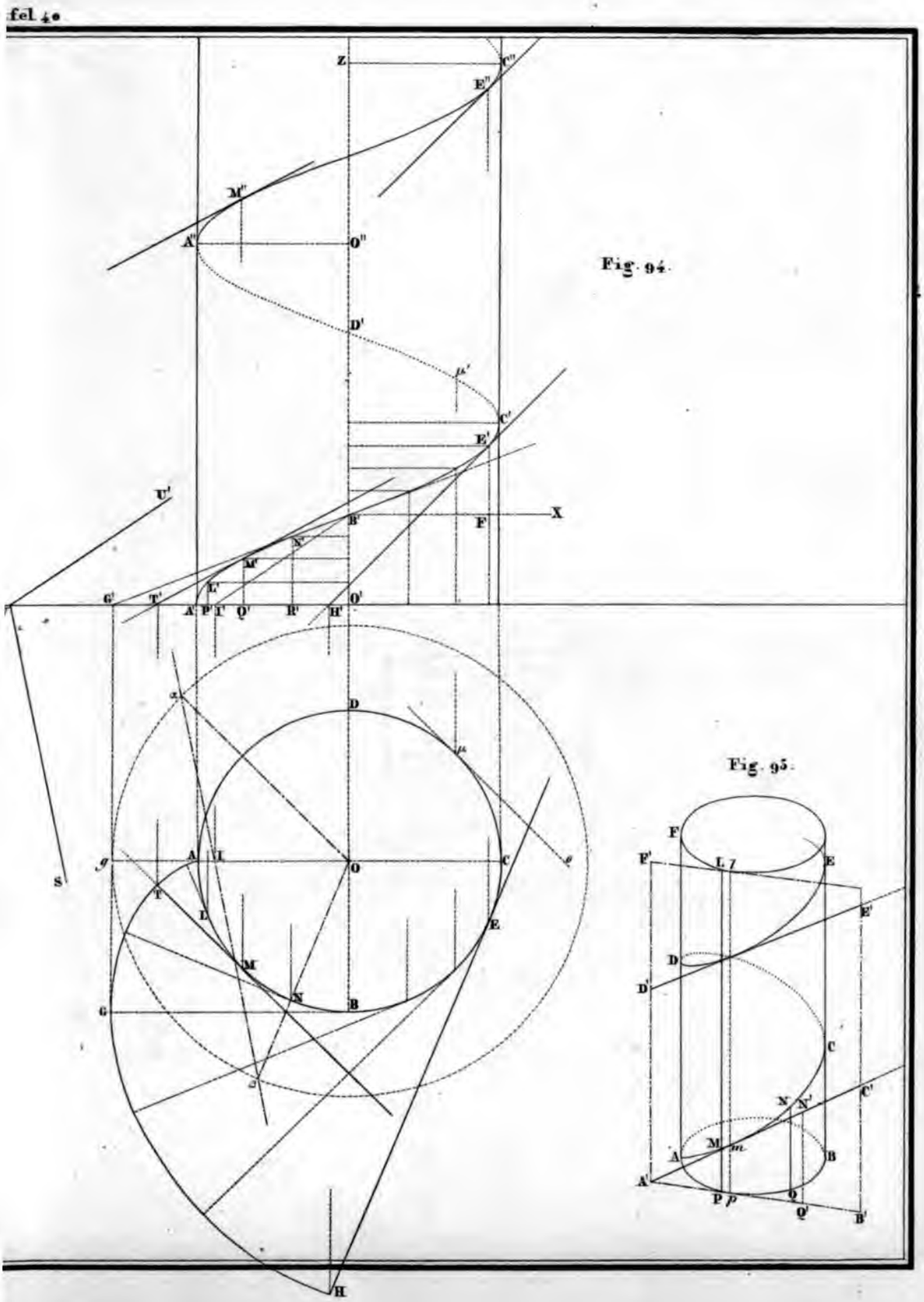
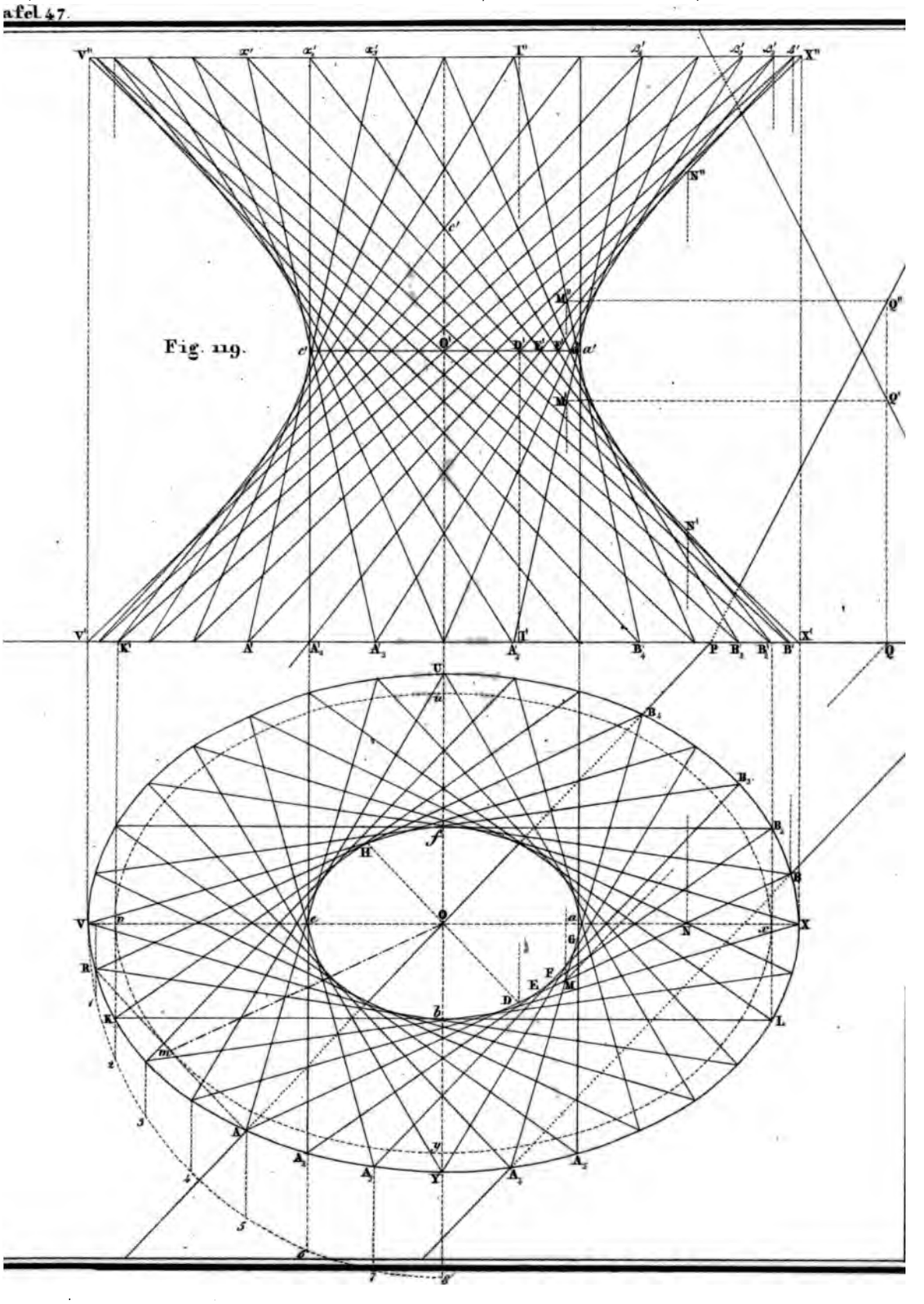


Fig. 94.

Fig. 95.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 119.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

Fig. 97.

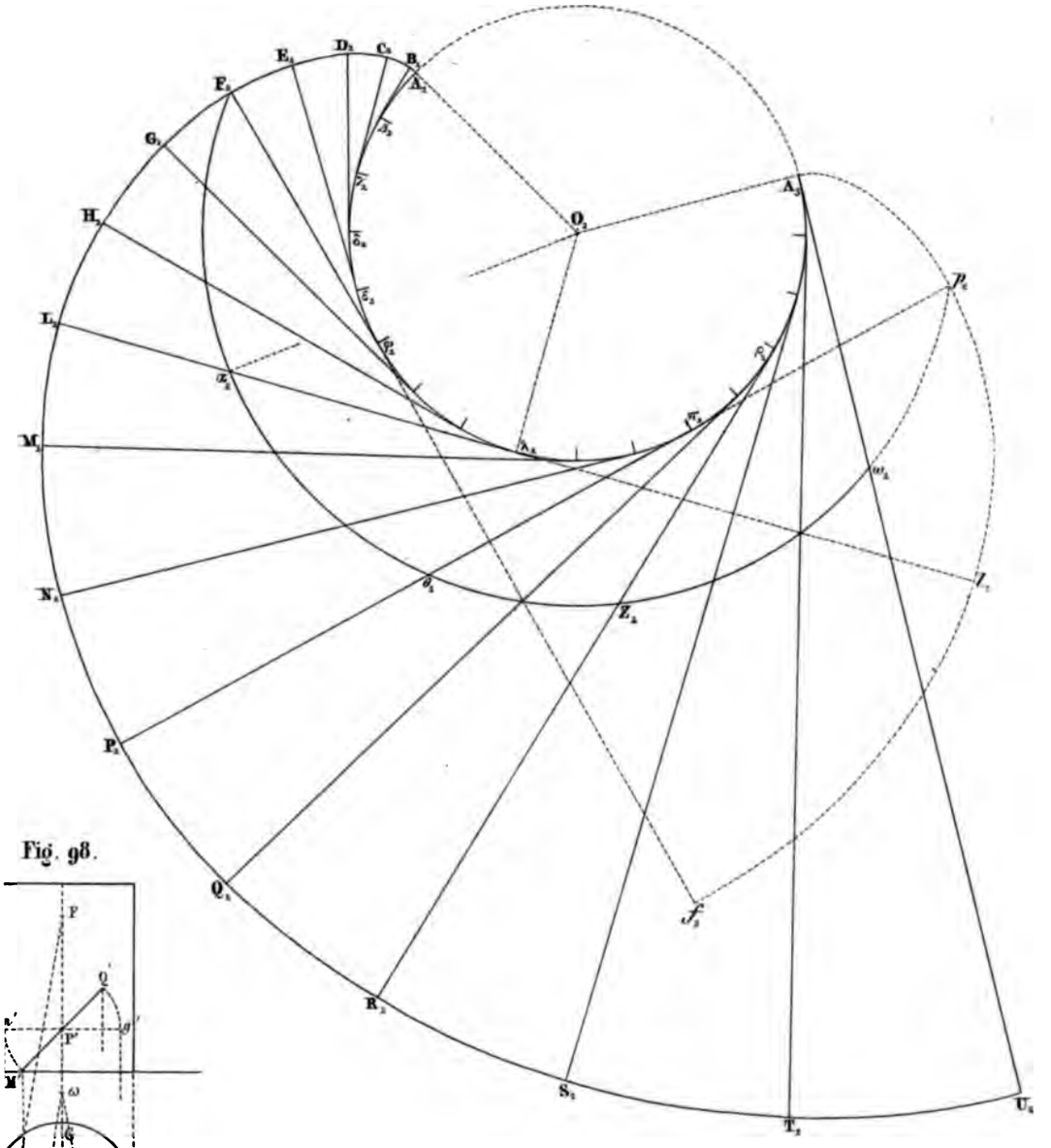
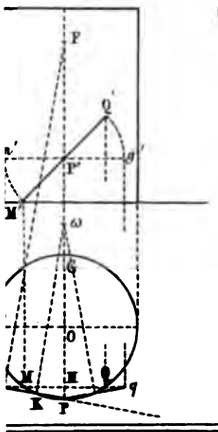


Fig. 98.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel. 45

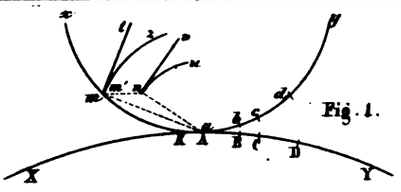


Fig. 1.

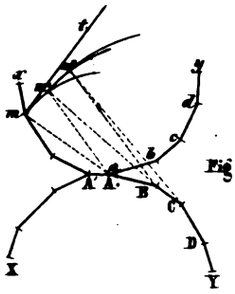


Fig. 2.

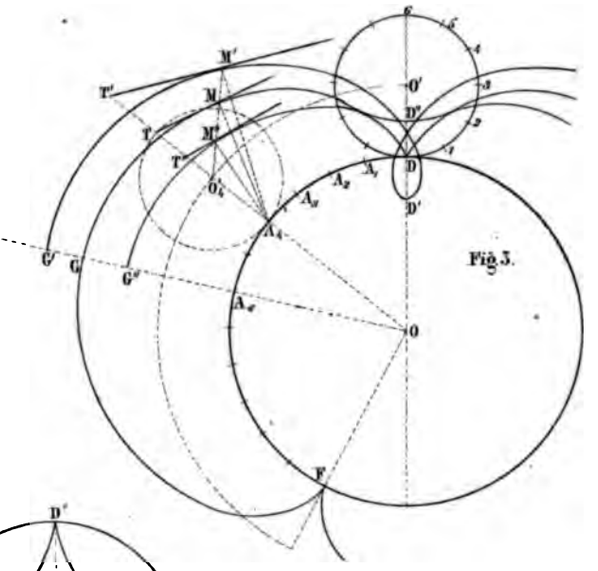


Fig. 3.

Fig. 4.

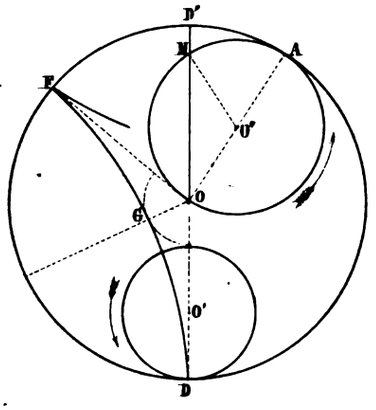


Fig. 5.

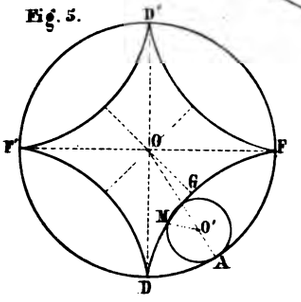


Fig. 7.

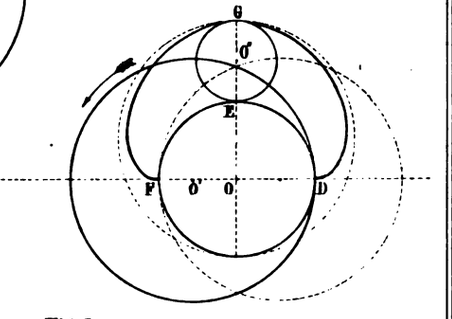


Fig. 8.

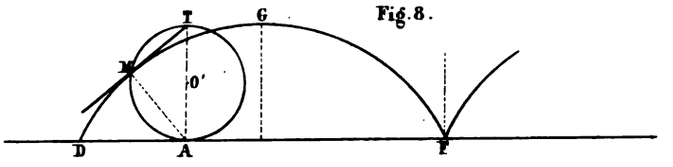


Fig. 6.

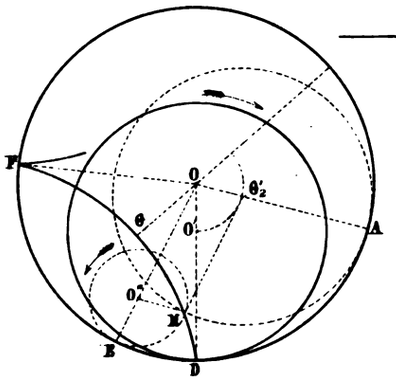
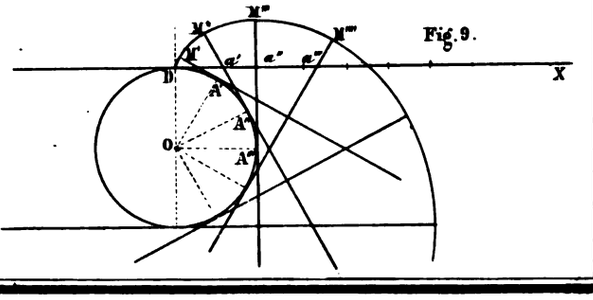
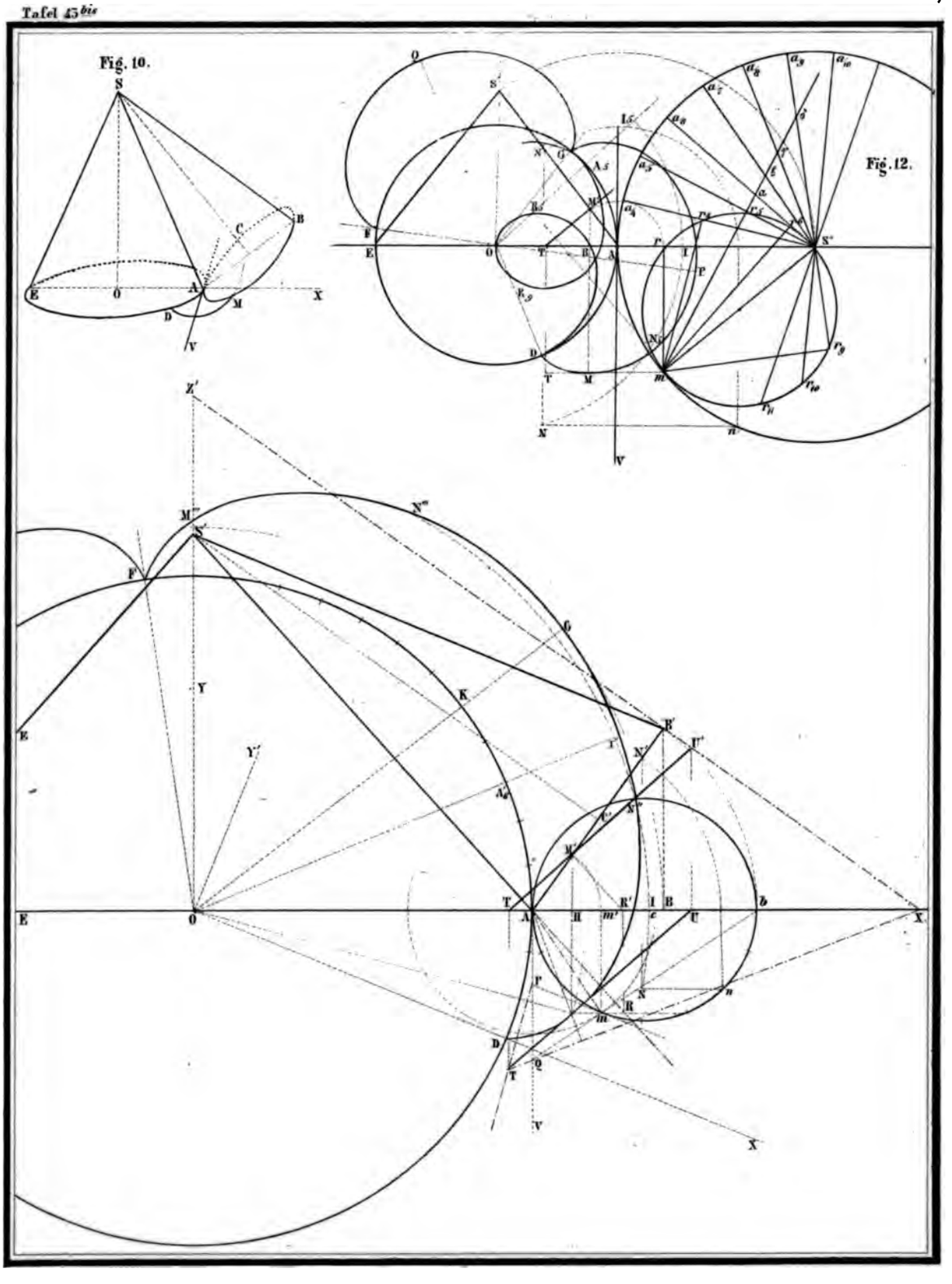


Fig. 9.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 45 *bis*



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 102.

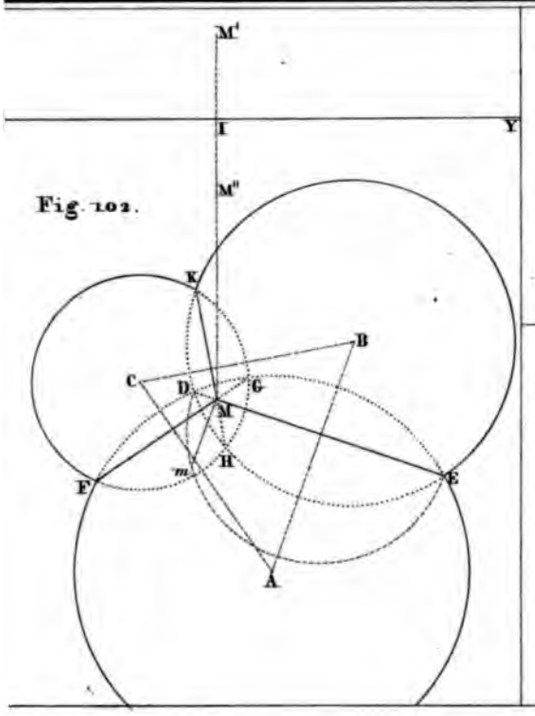


Fig. 103.

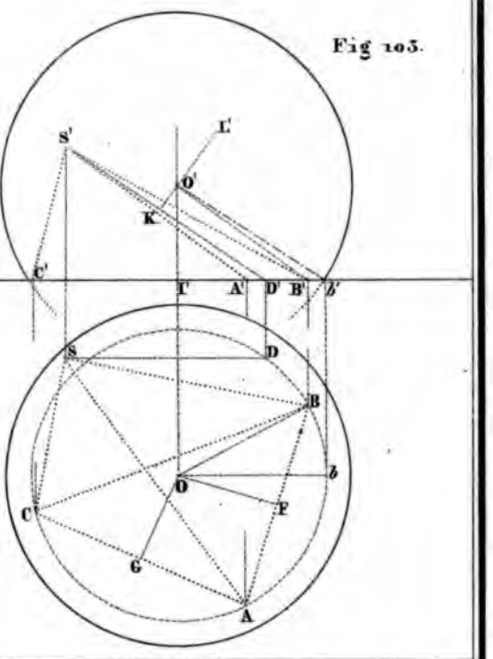
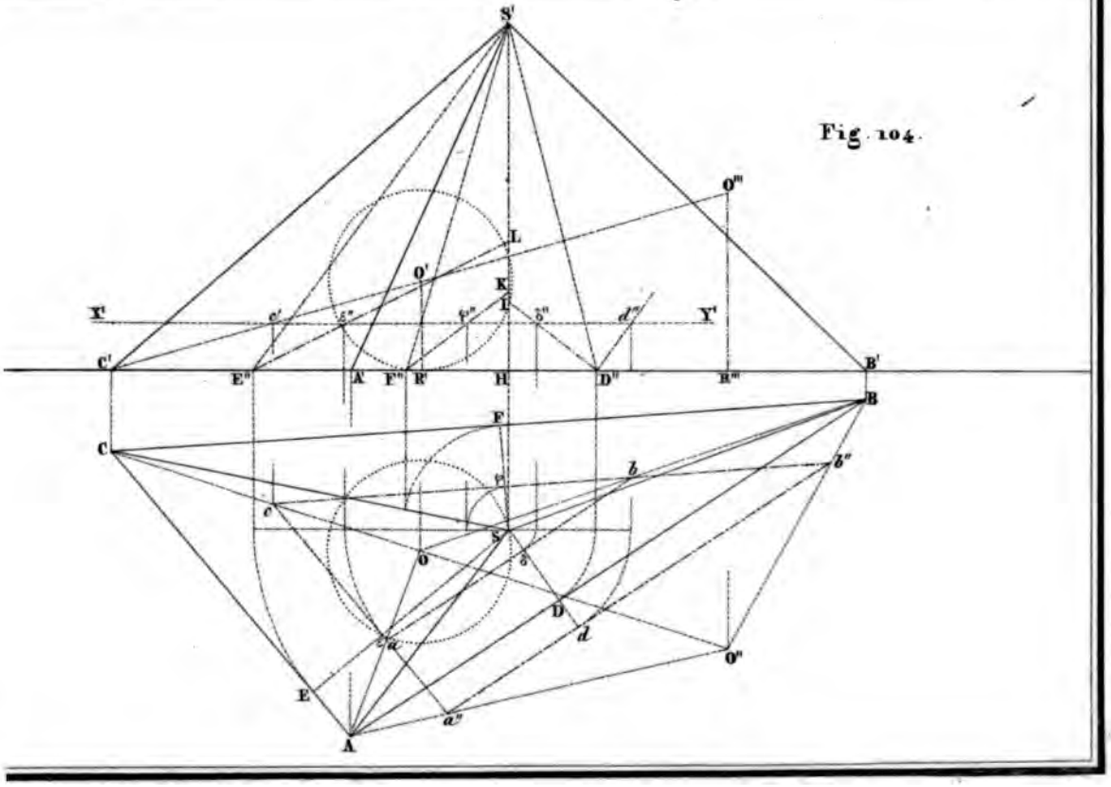


Fig. 104.



NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 105.

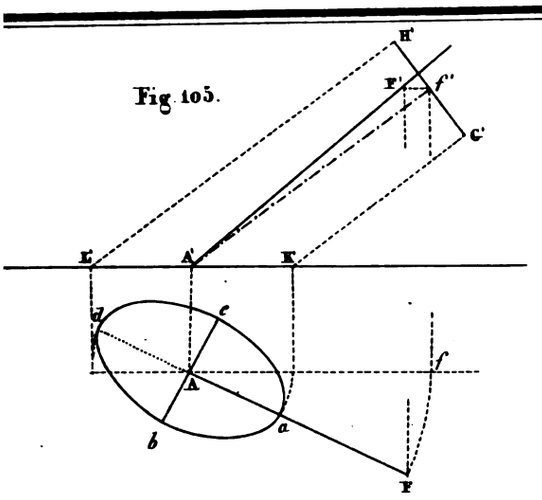


Fig. 106.

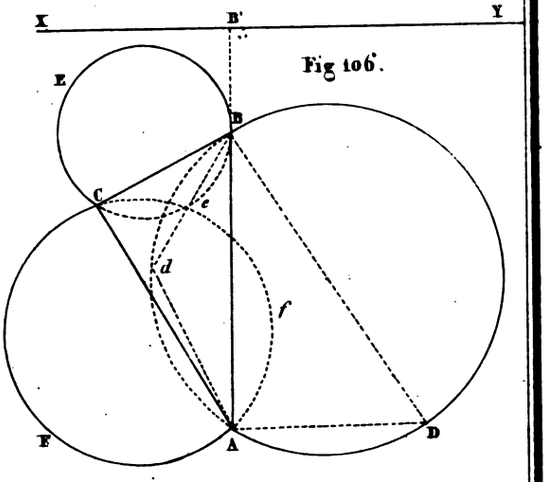
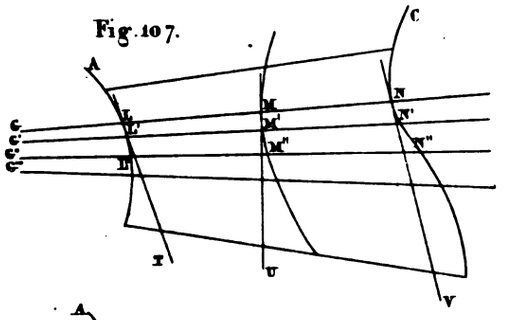


Fig. 107.



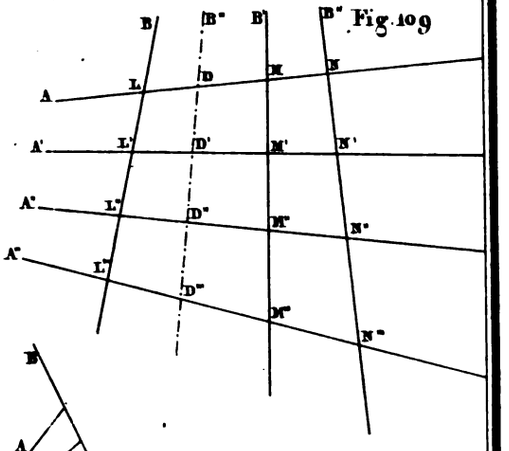
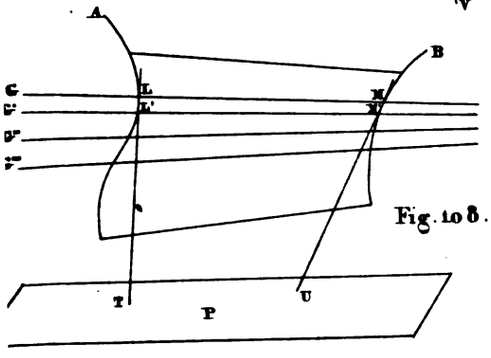


Fig. 108.



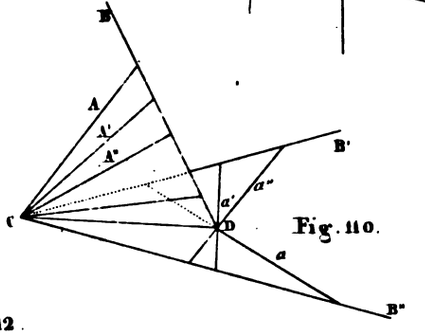


Fig. 110.

Fig. 111.

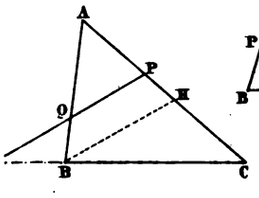


Fig. 112.

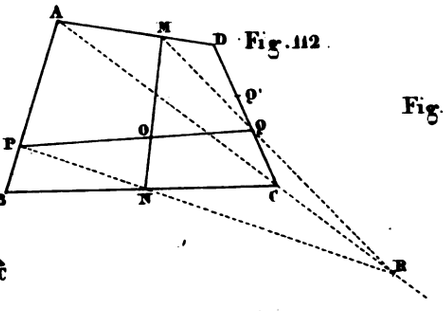
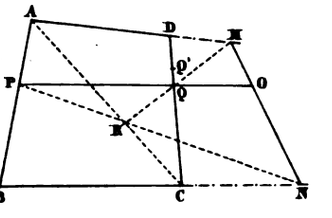


Fig. 113.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

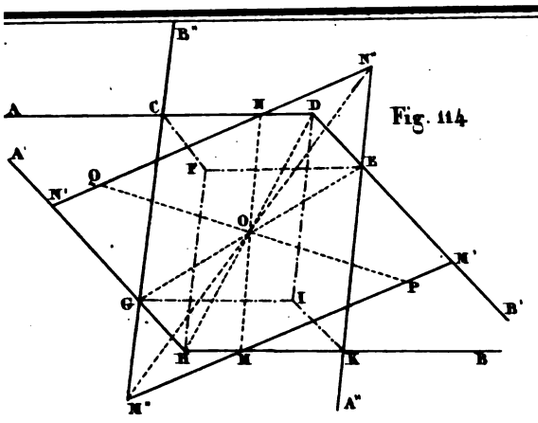


Fig. 114.

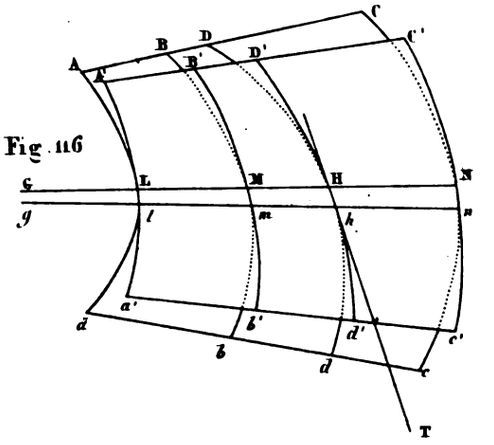


Fig. 116

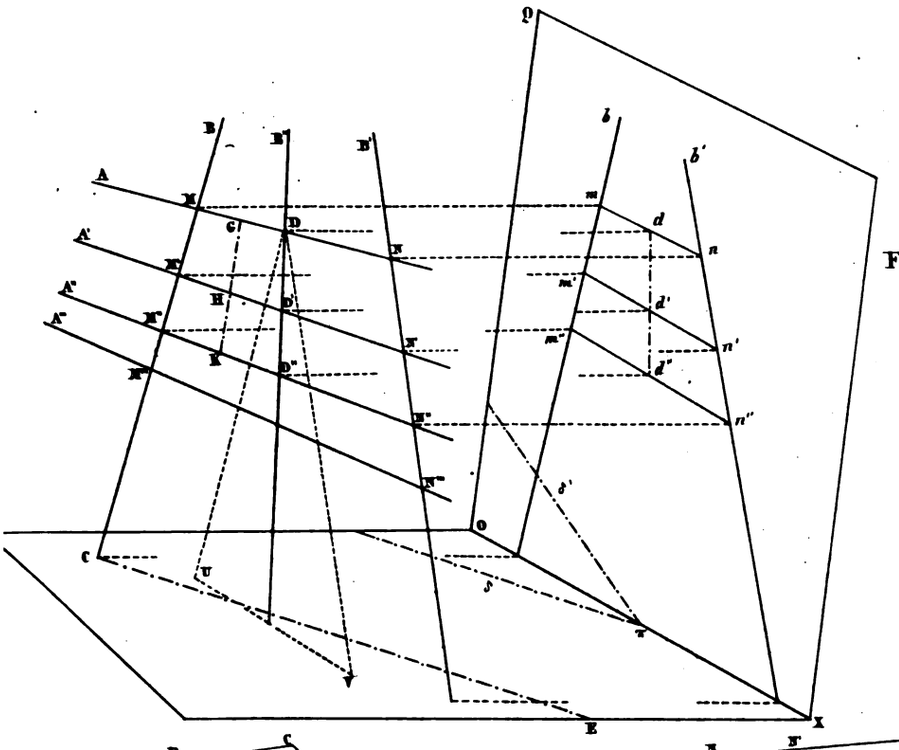


Fig. 115.

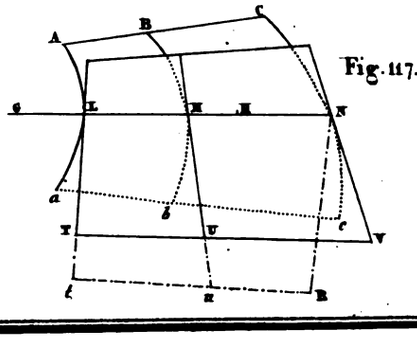


Fig. 117.

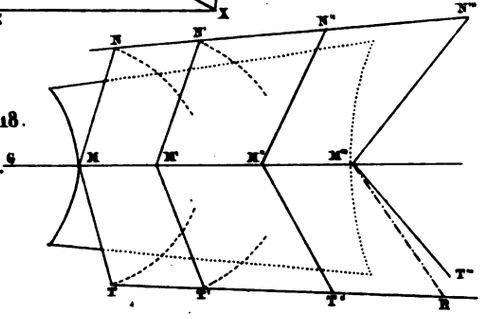


Fig. 118.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

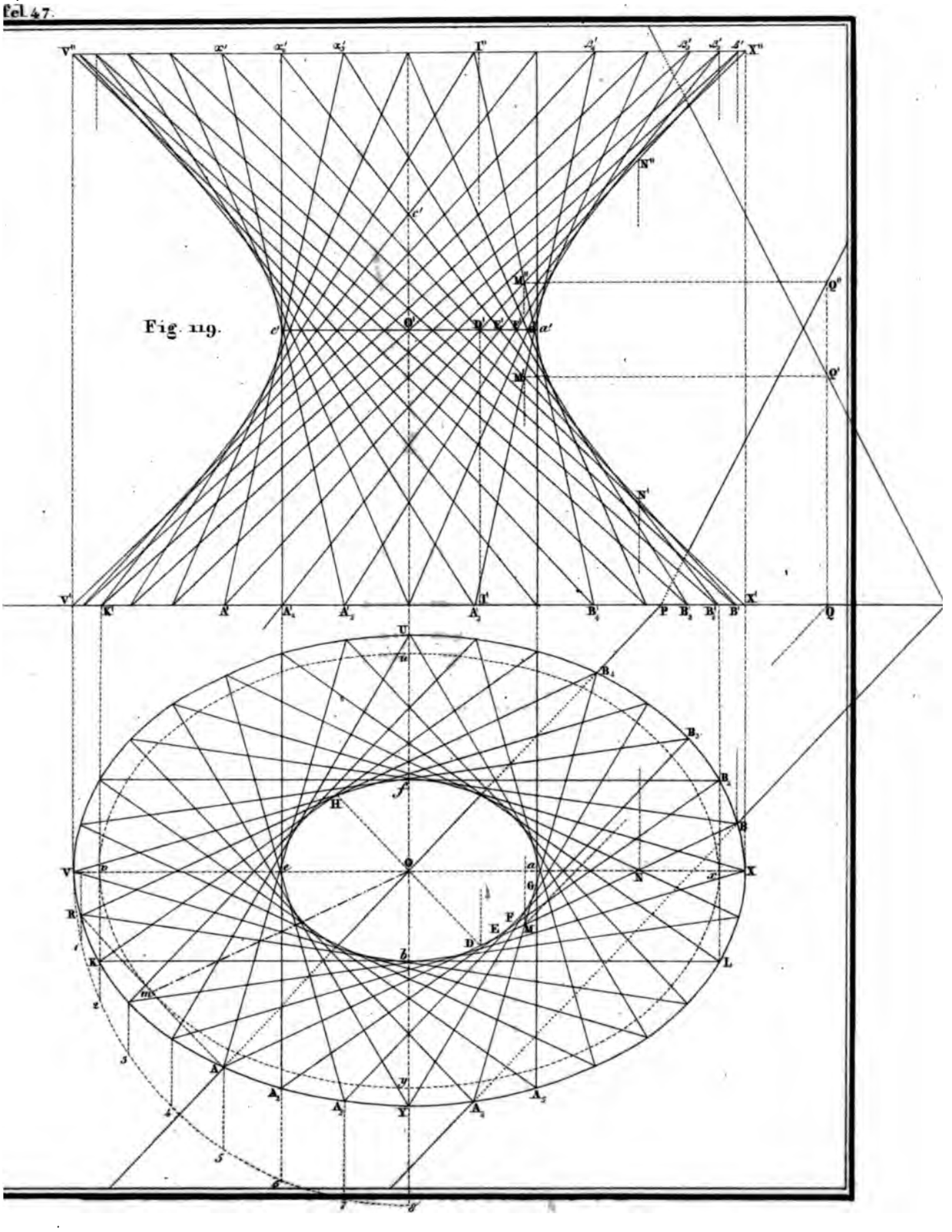


Fig. 119.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 48.

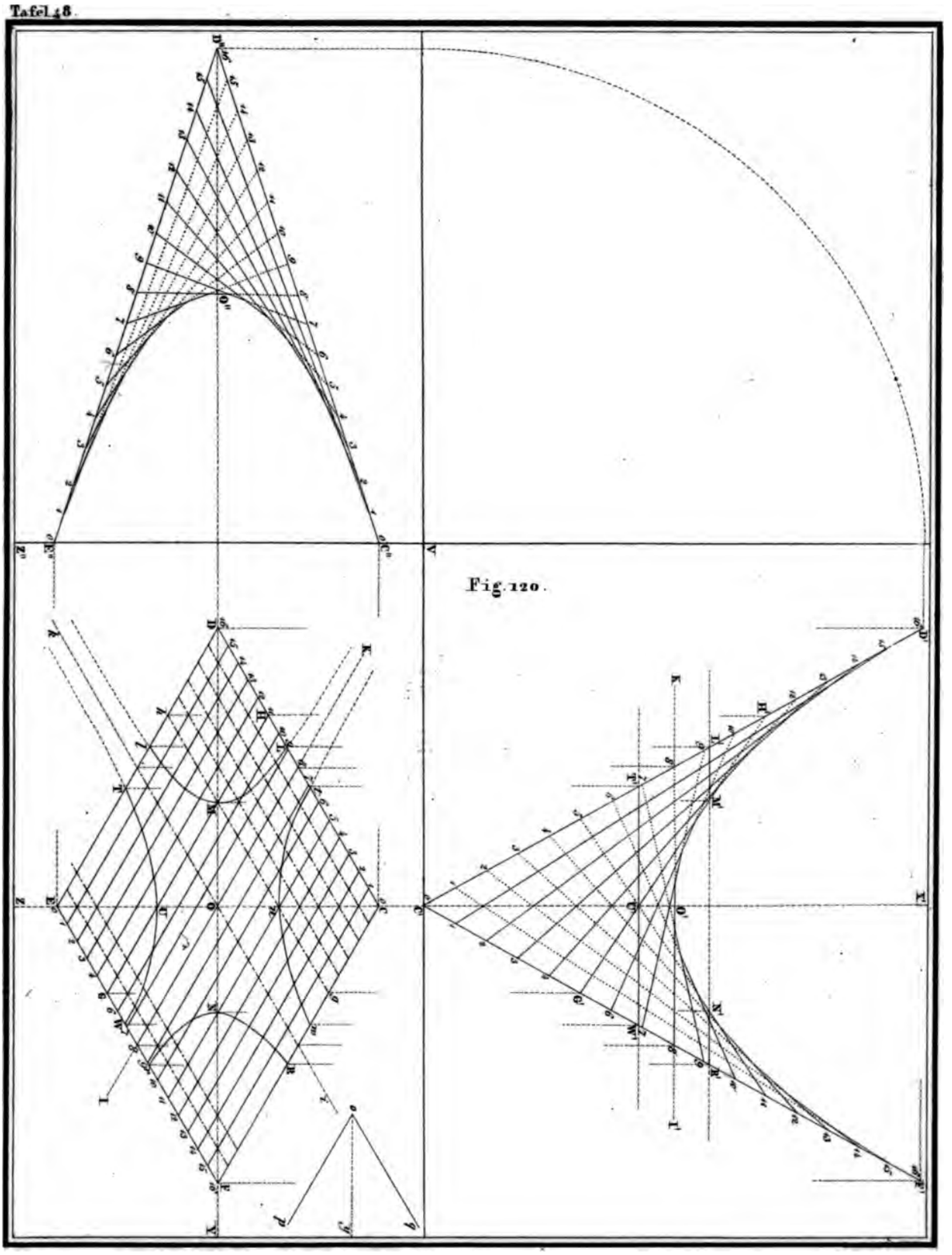


Fig. 120.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 49.

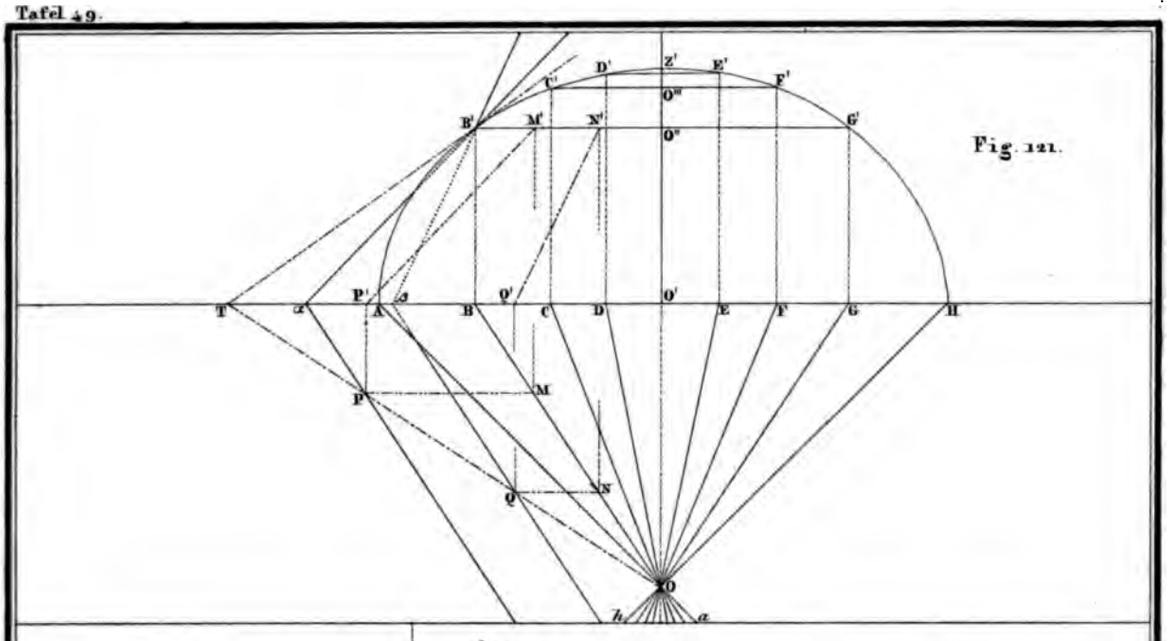


Fig. 121.

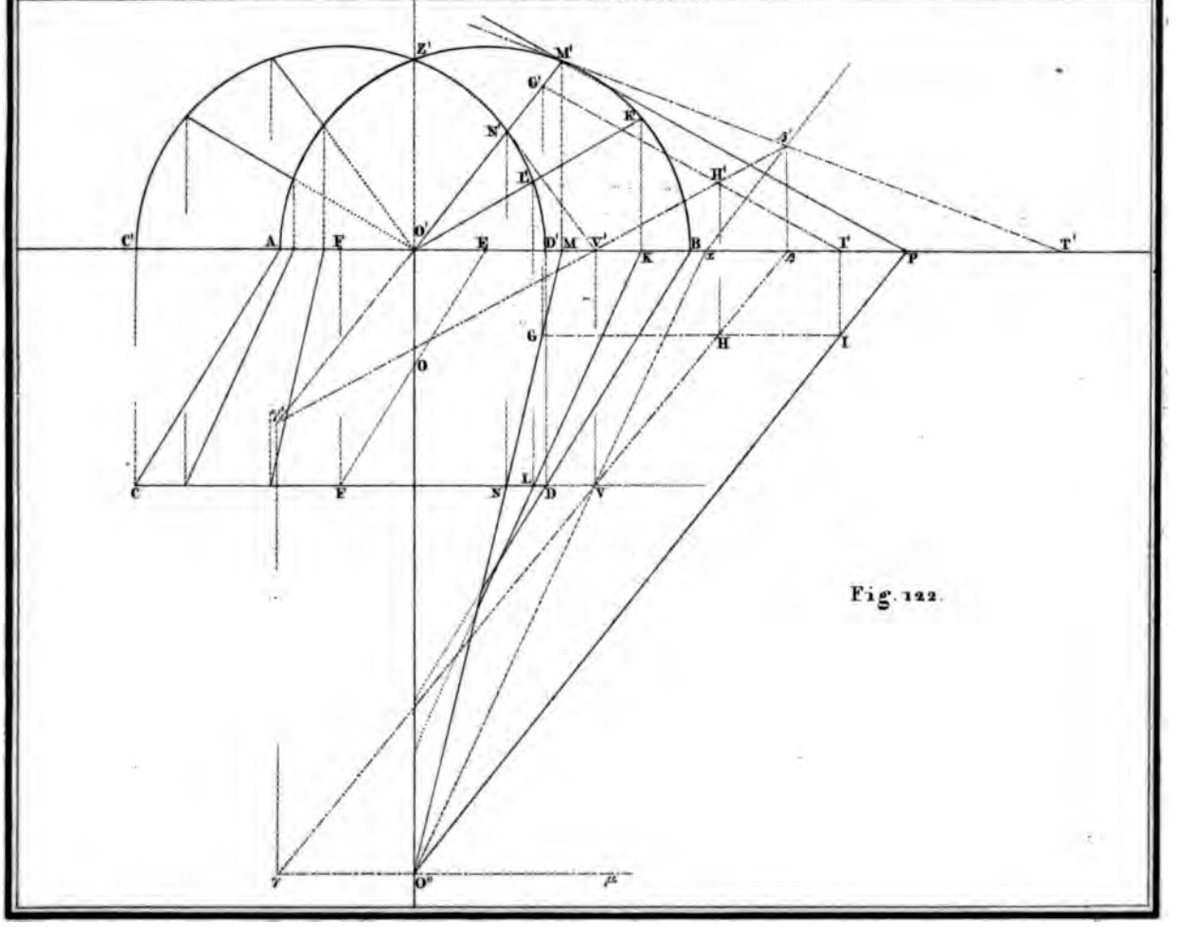


Fig. 122.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 50.

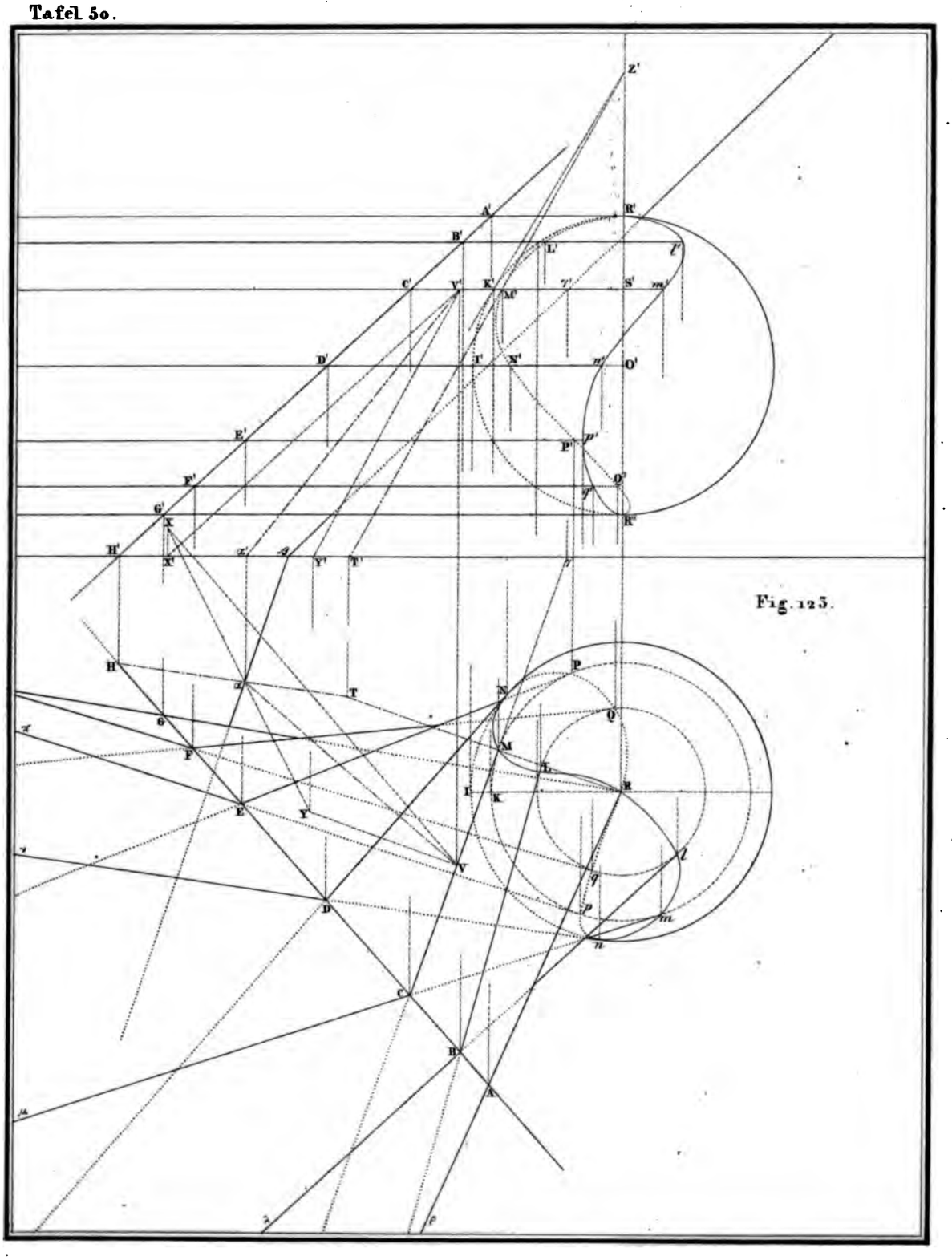


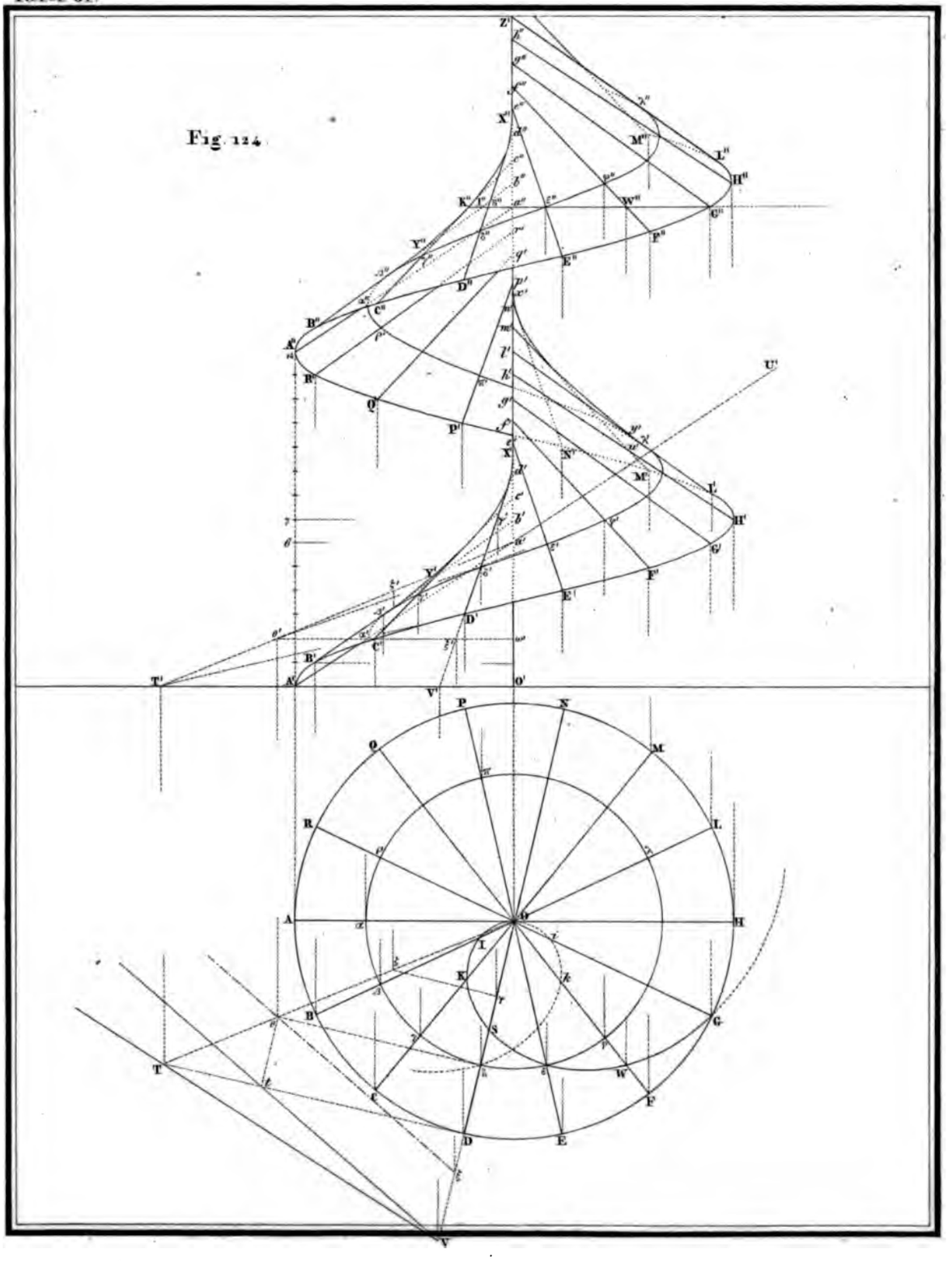
Fig. 123.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 51.

Fig. 124.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LEN
TILDEN FOUN

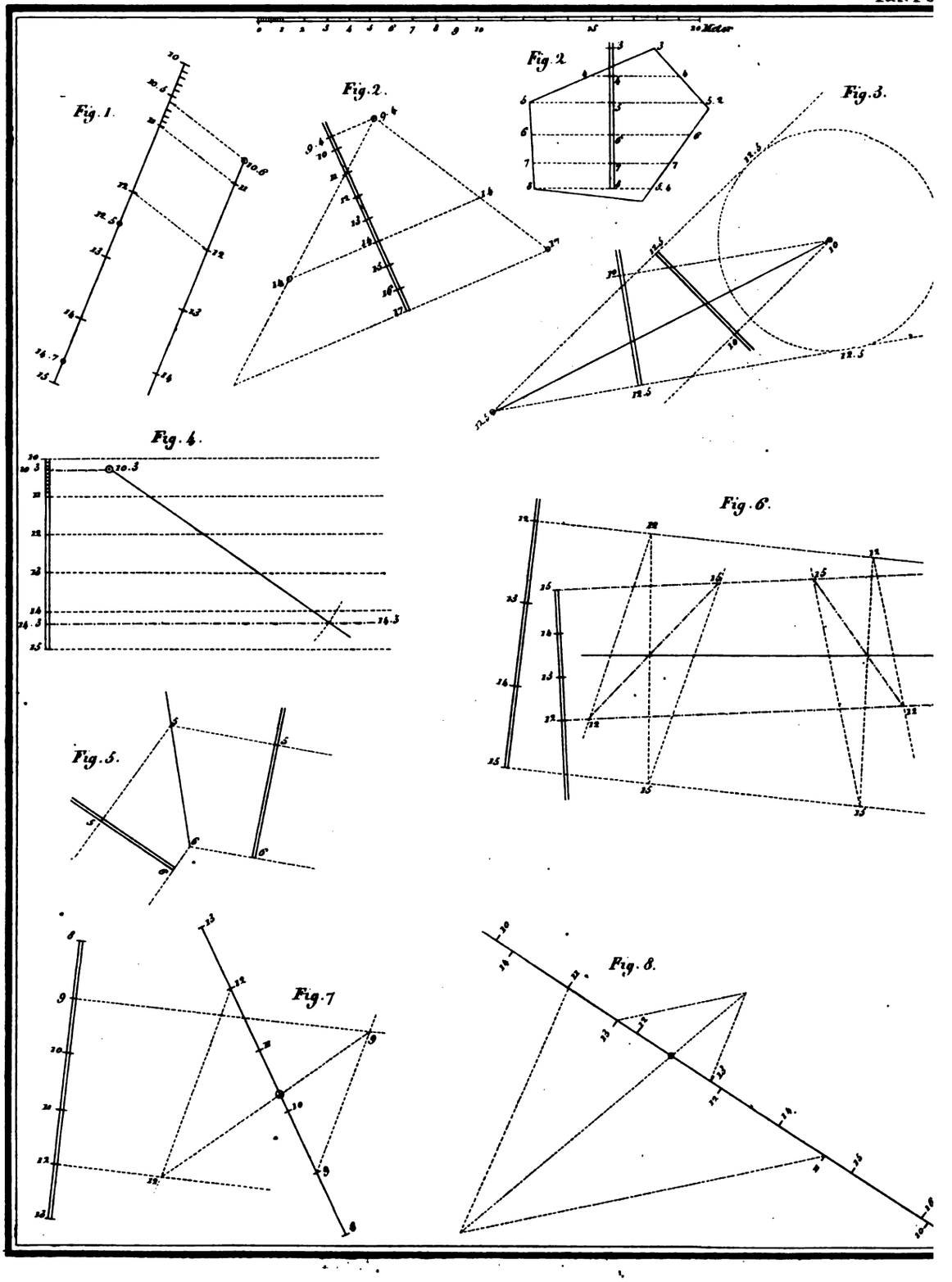


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

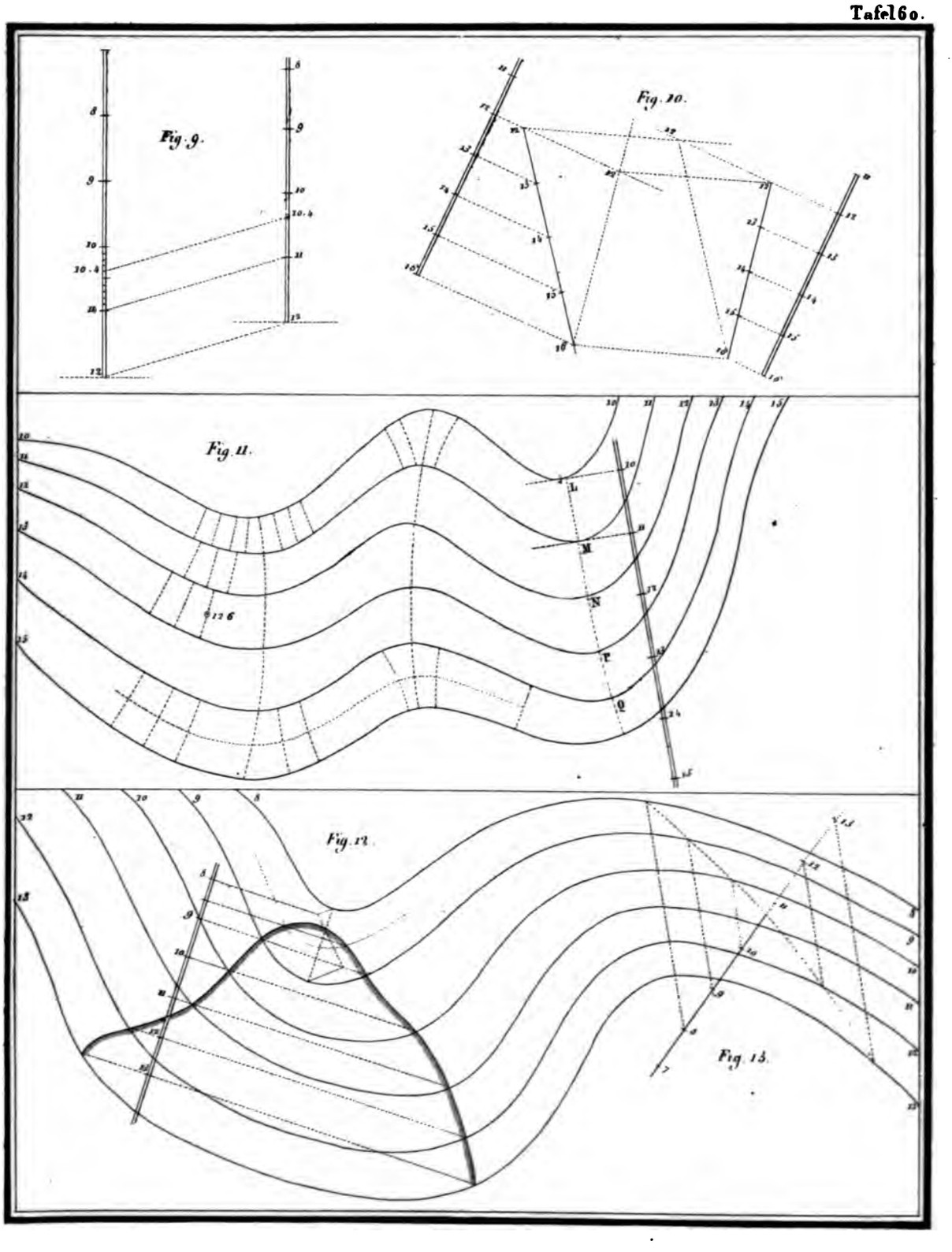


Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 54.

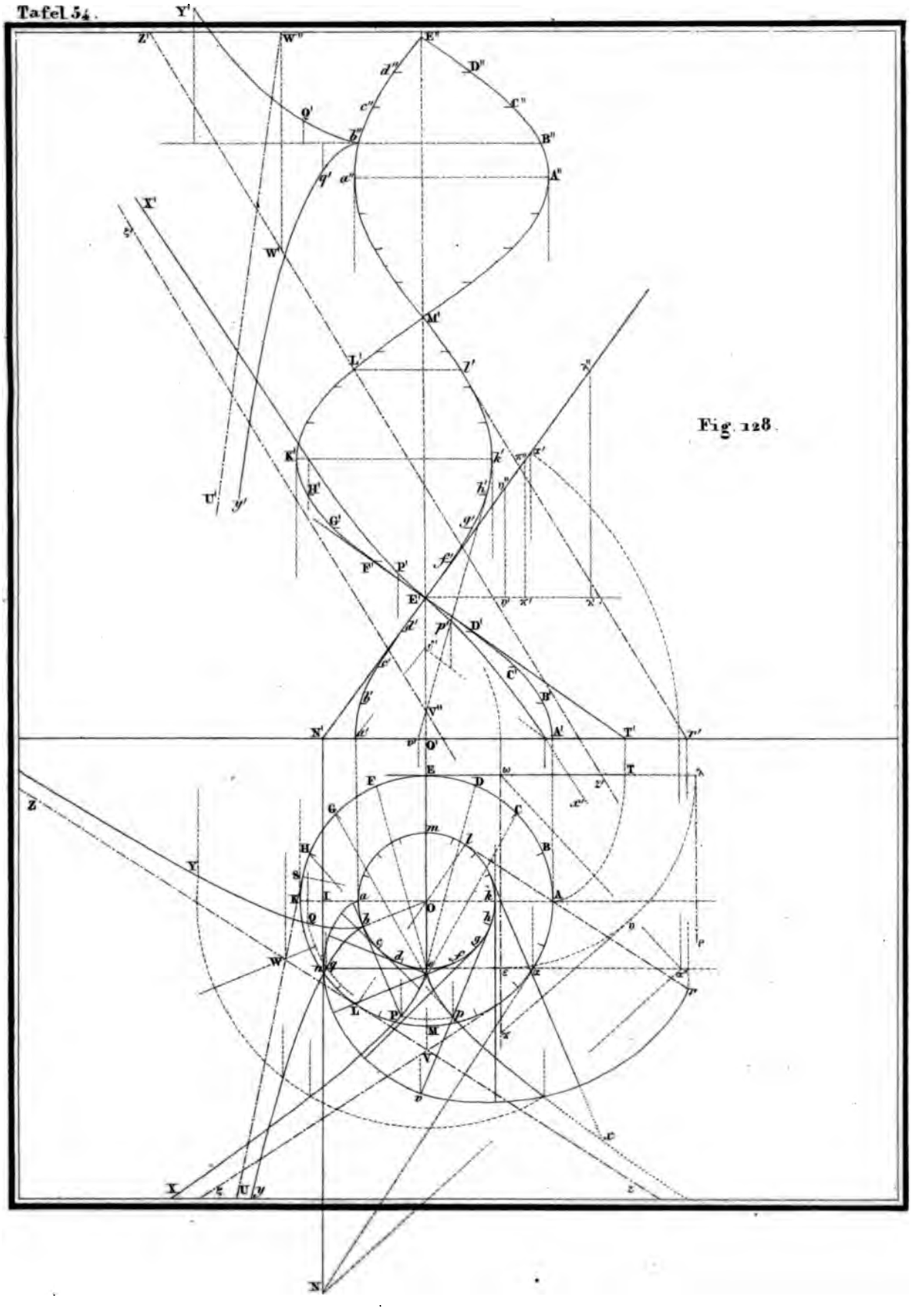


Fig. 128.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 50.

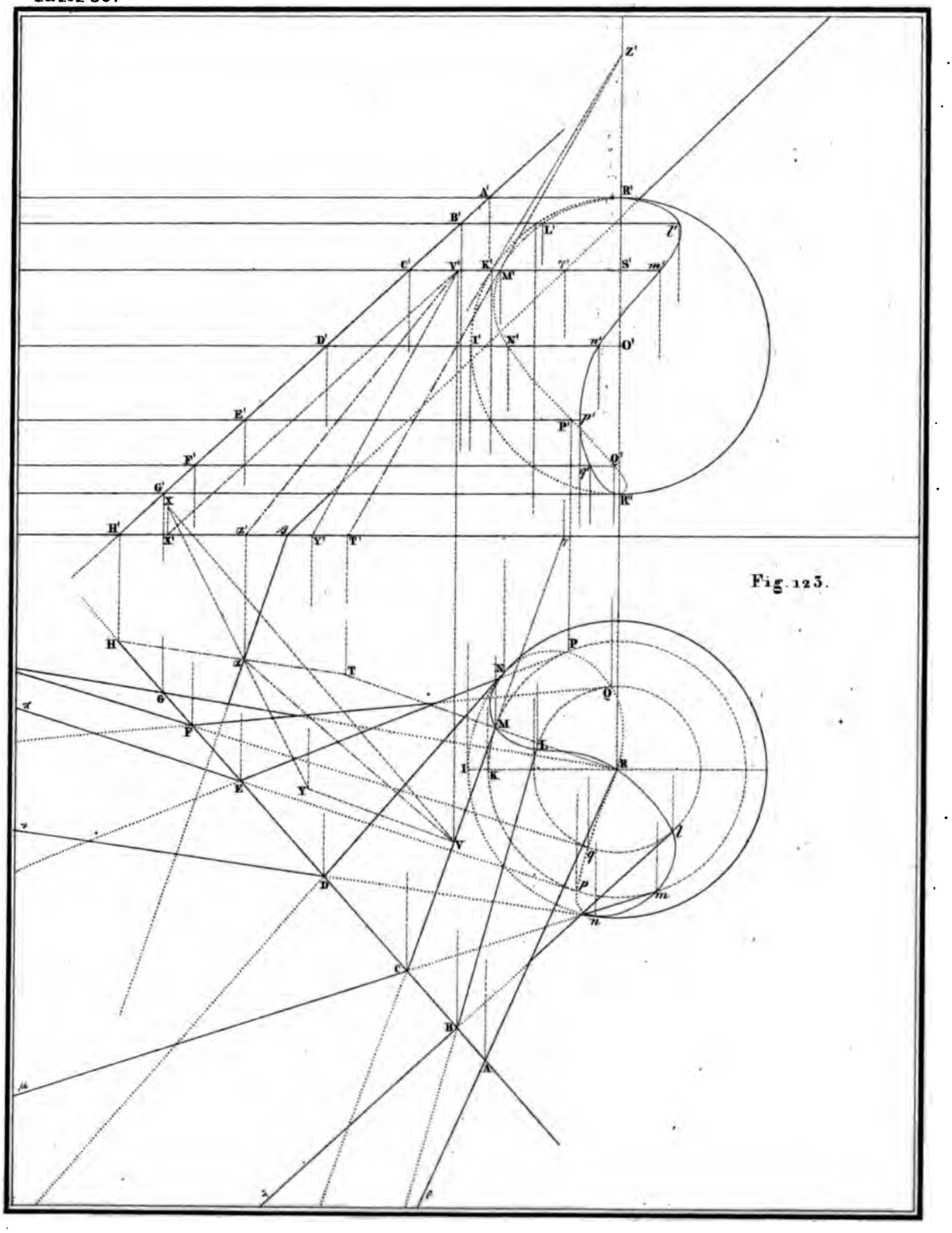
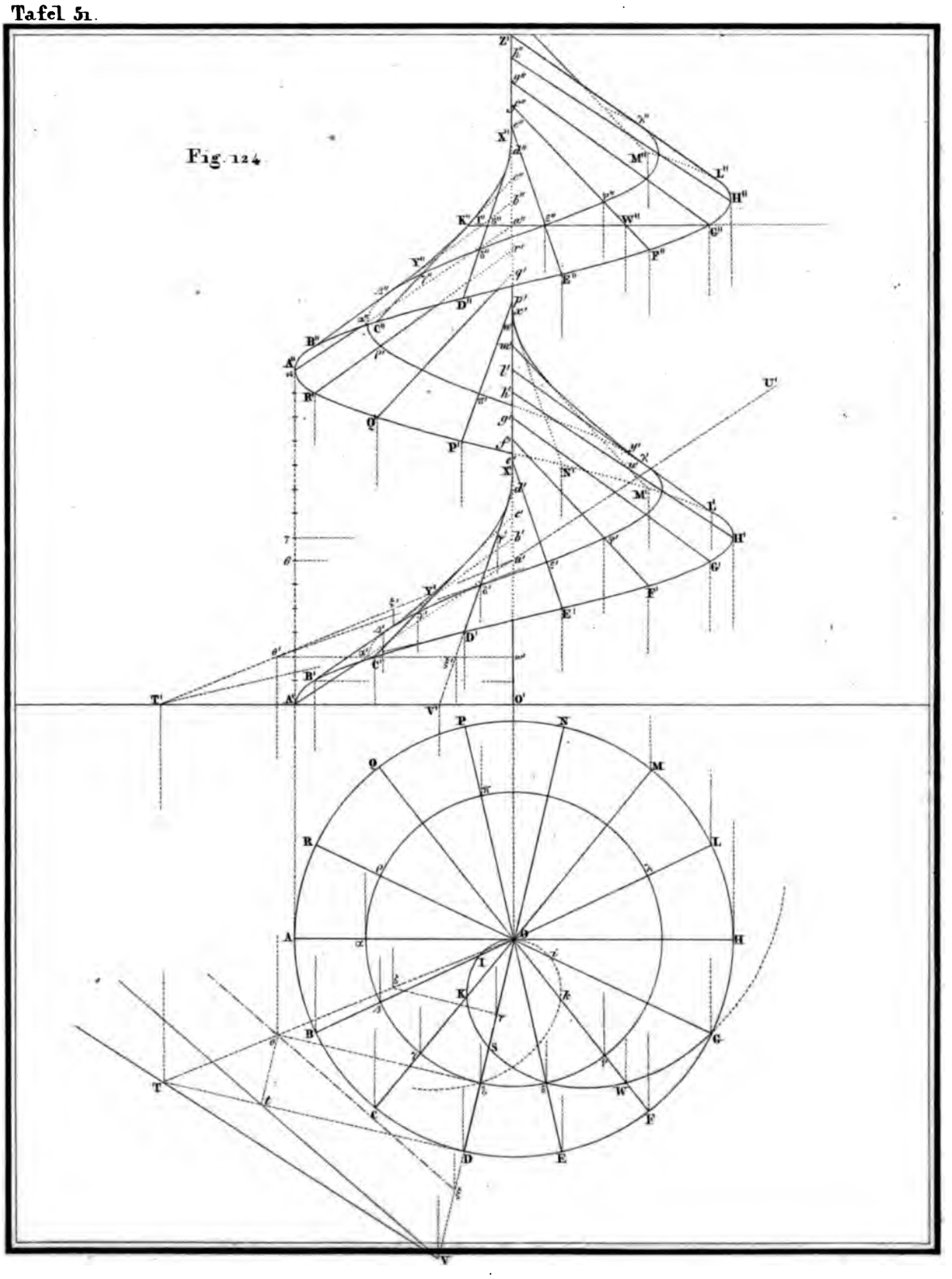


Fig. 123.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

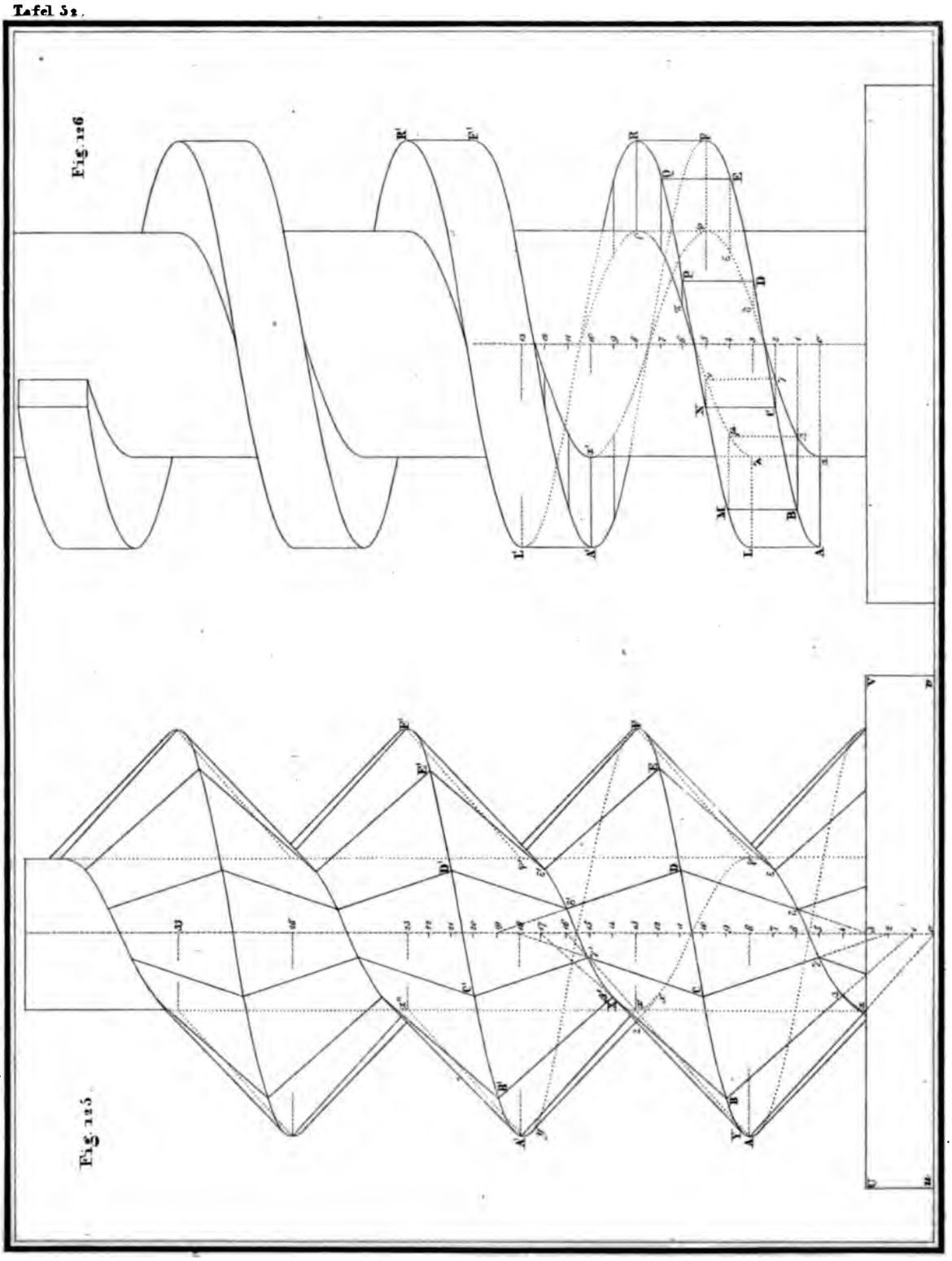
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 51.



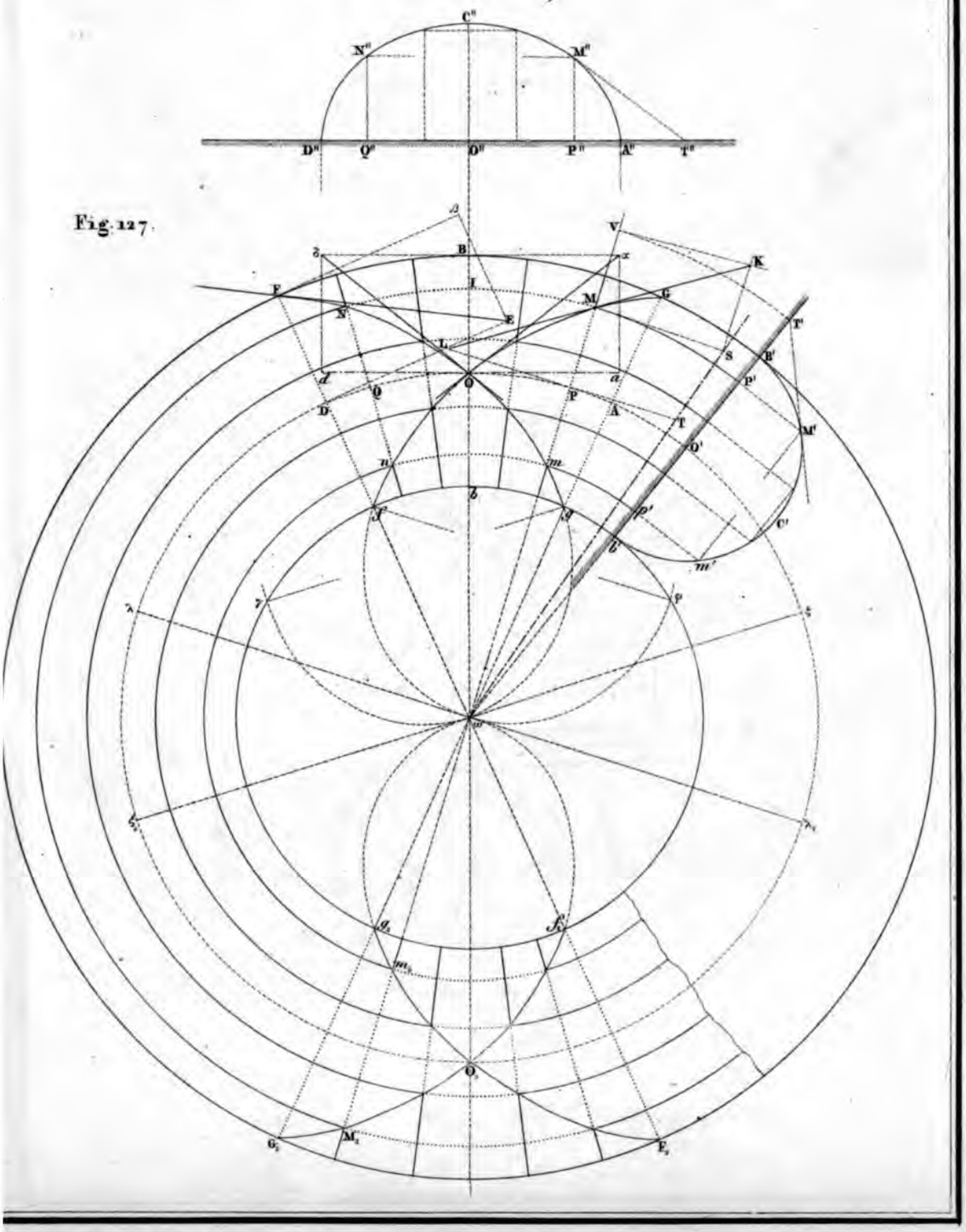
THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LEN
TILDEN FOUN

Tafel 32.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Fig. 127.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 54.

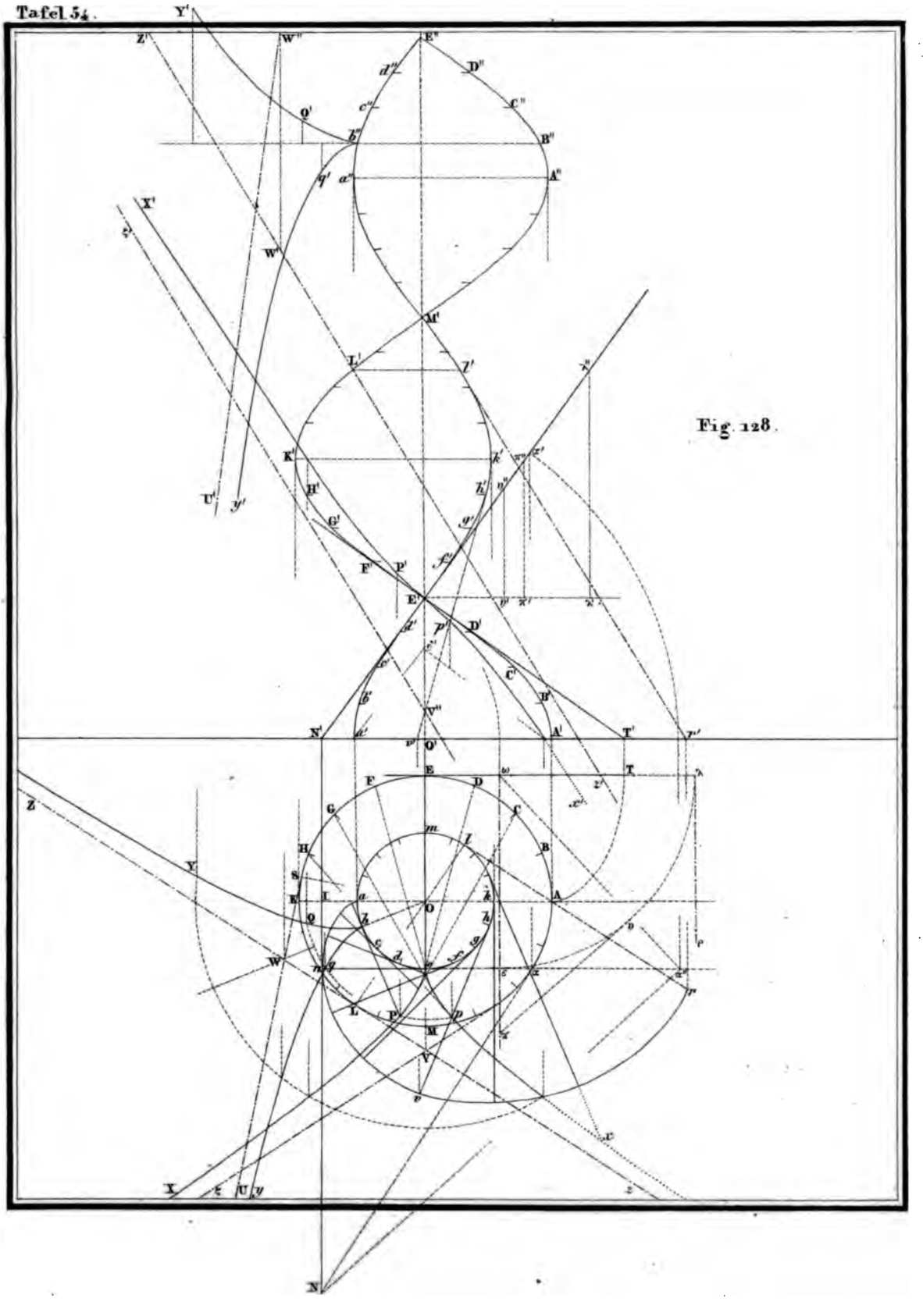


Fig. 128.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

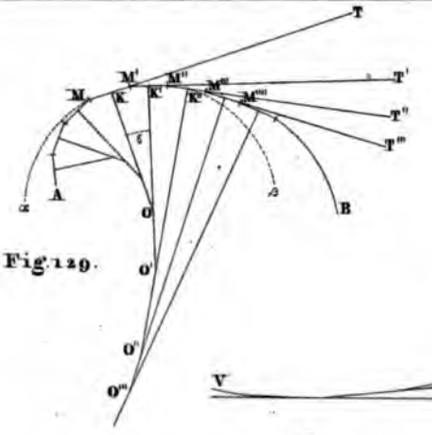


Fig. 129.

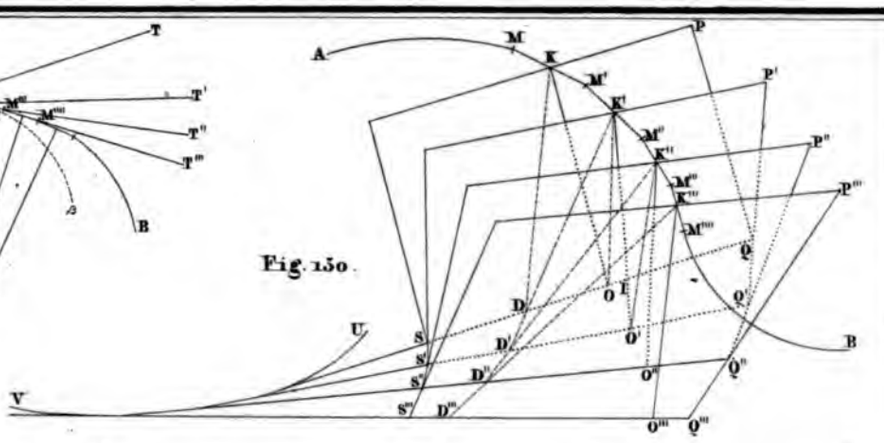


Fig. 130.

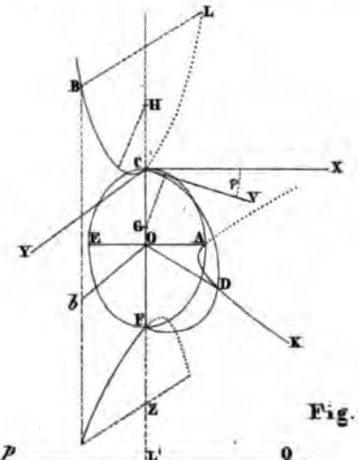


Fig. 132.

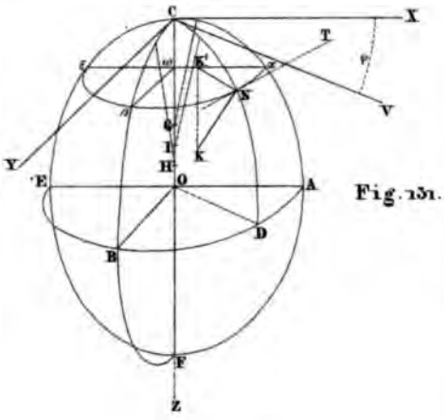
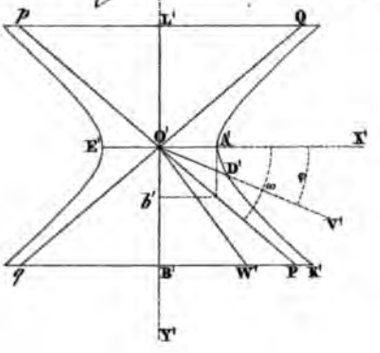


Fig. 131.



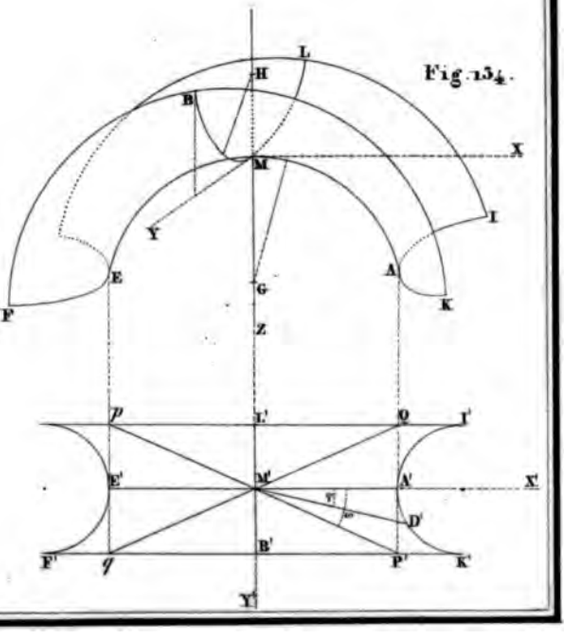


Fig. 134.

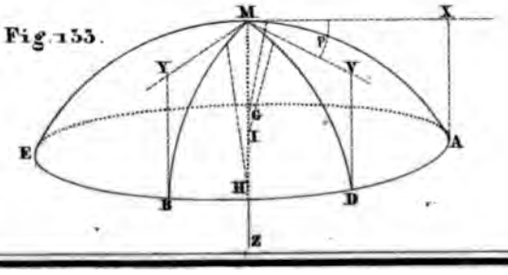


Fig. 133.

THE NEW YORK
PUBLIC
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

Tafel 56.

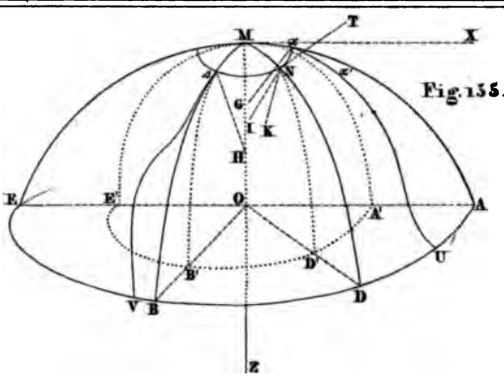


Fig. 135.

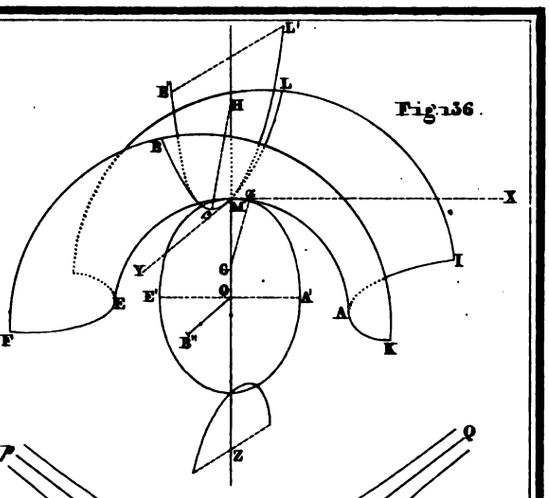


Fig. 136.

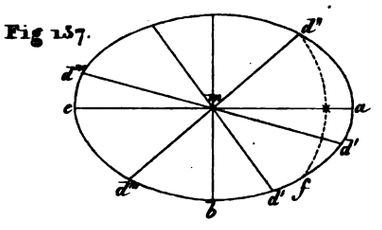


Fig. 137.

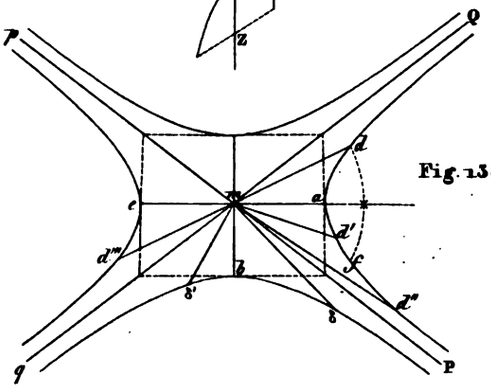


Fig. 138.

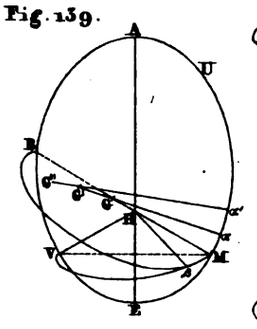


Fig. 139.

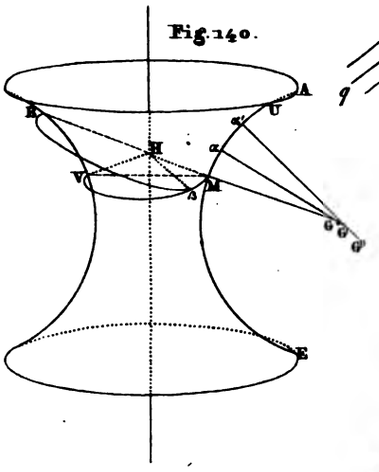


Fig. 140.

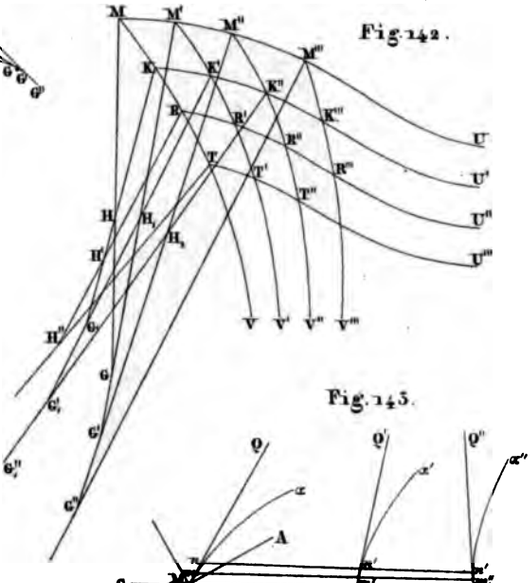


Fig. 142.

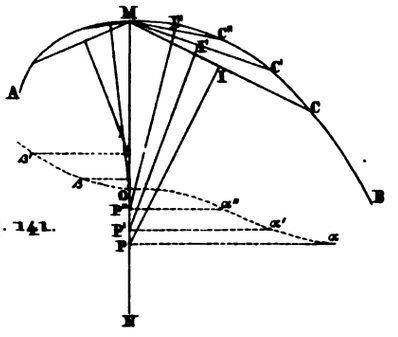


Fig. 141.

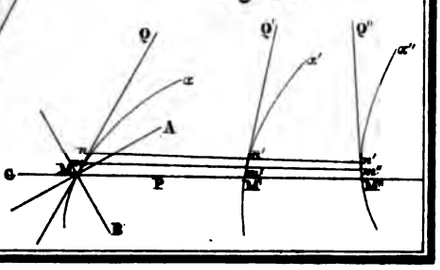
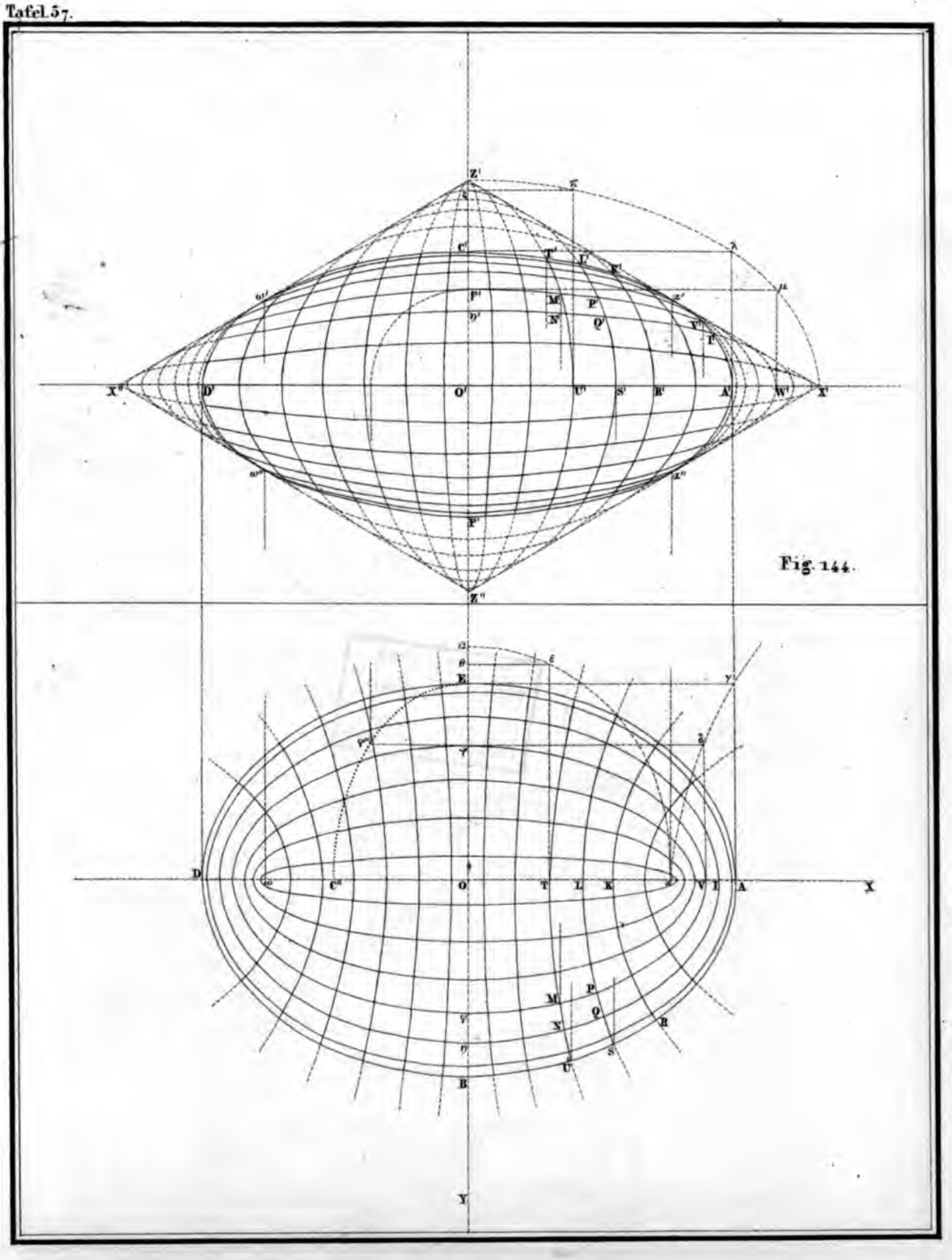


Fig. 143.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

Tafel 57.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 58.

Fig. 145.

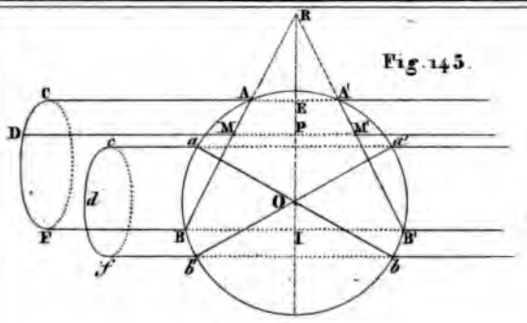


Fig. 146.

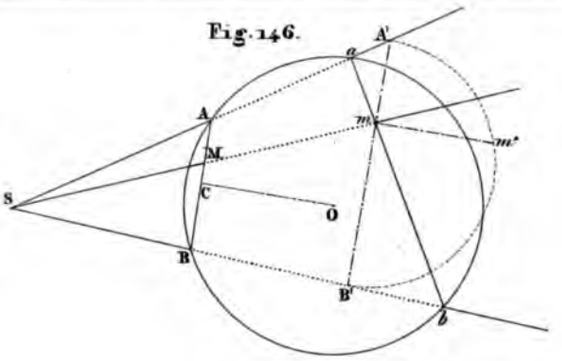


Fig. 147.

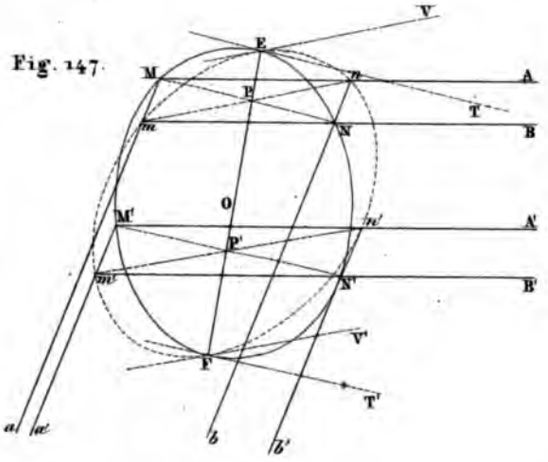


Fig. 148.

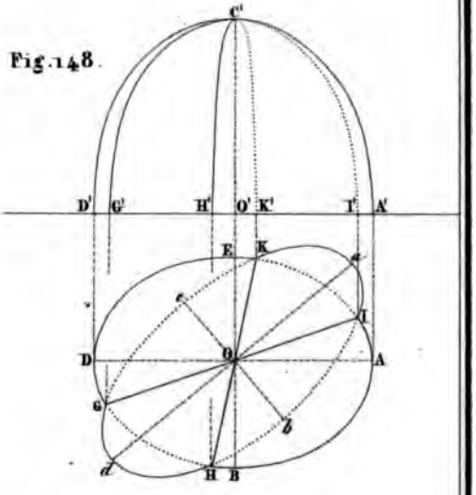


Fig. 149.

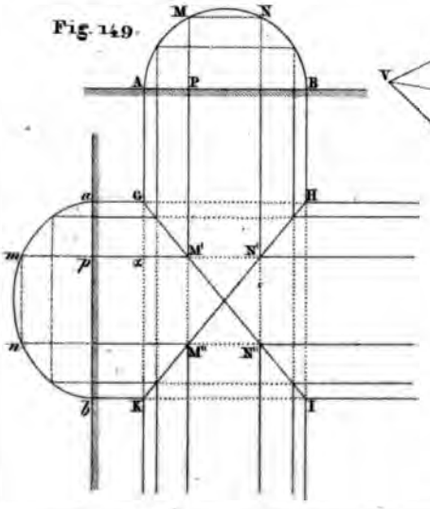


Fig. 150.

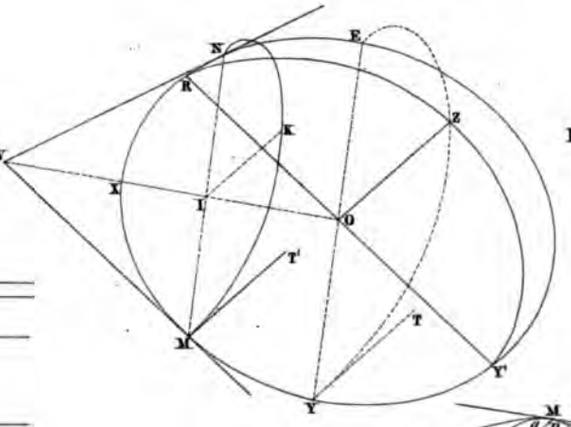
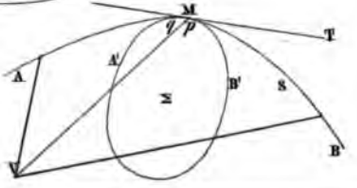


Fig. 151.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

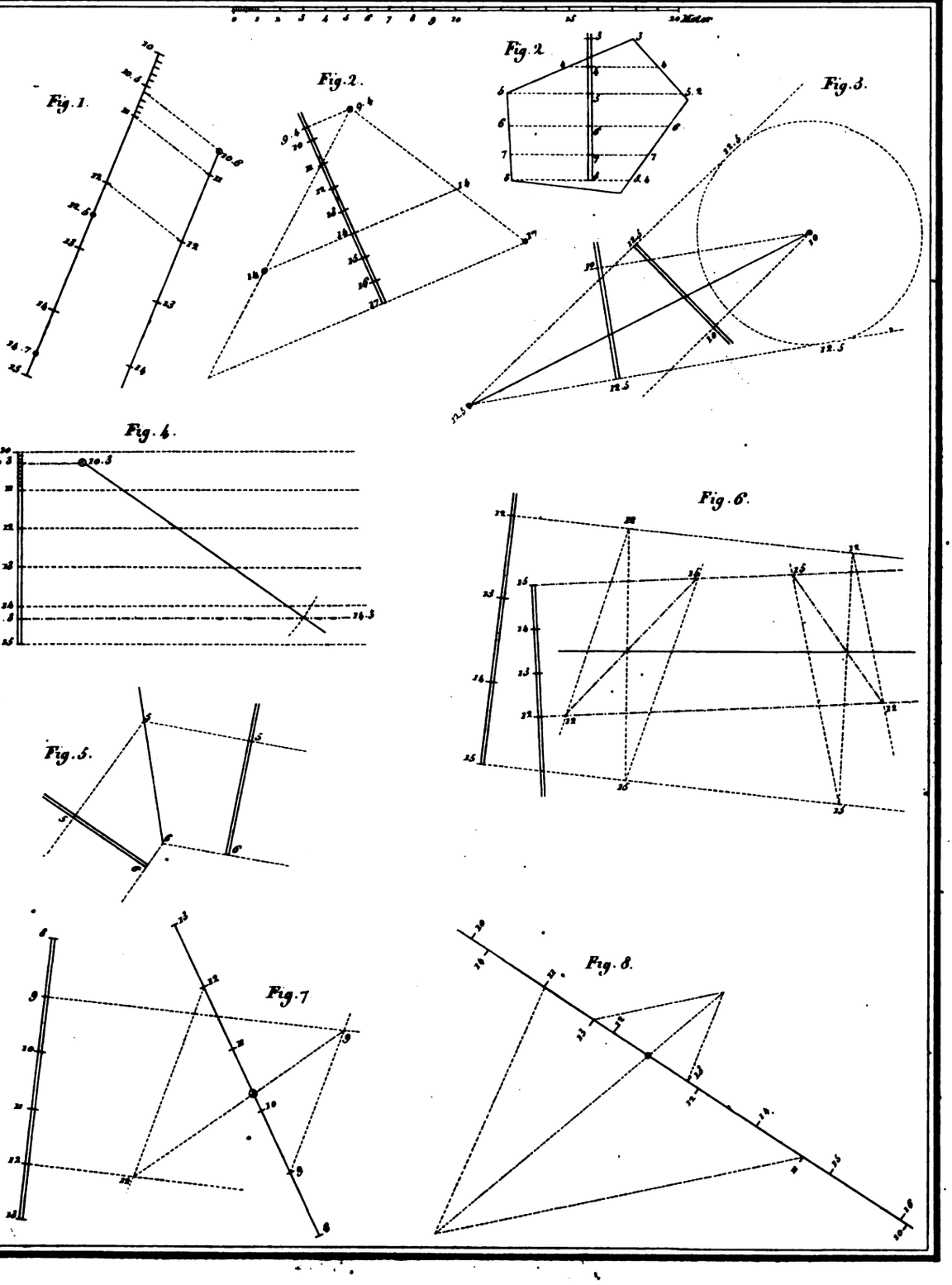


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

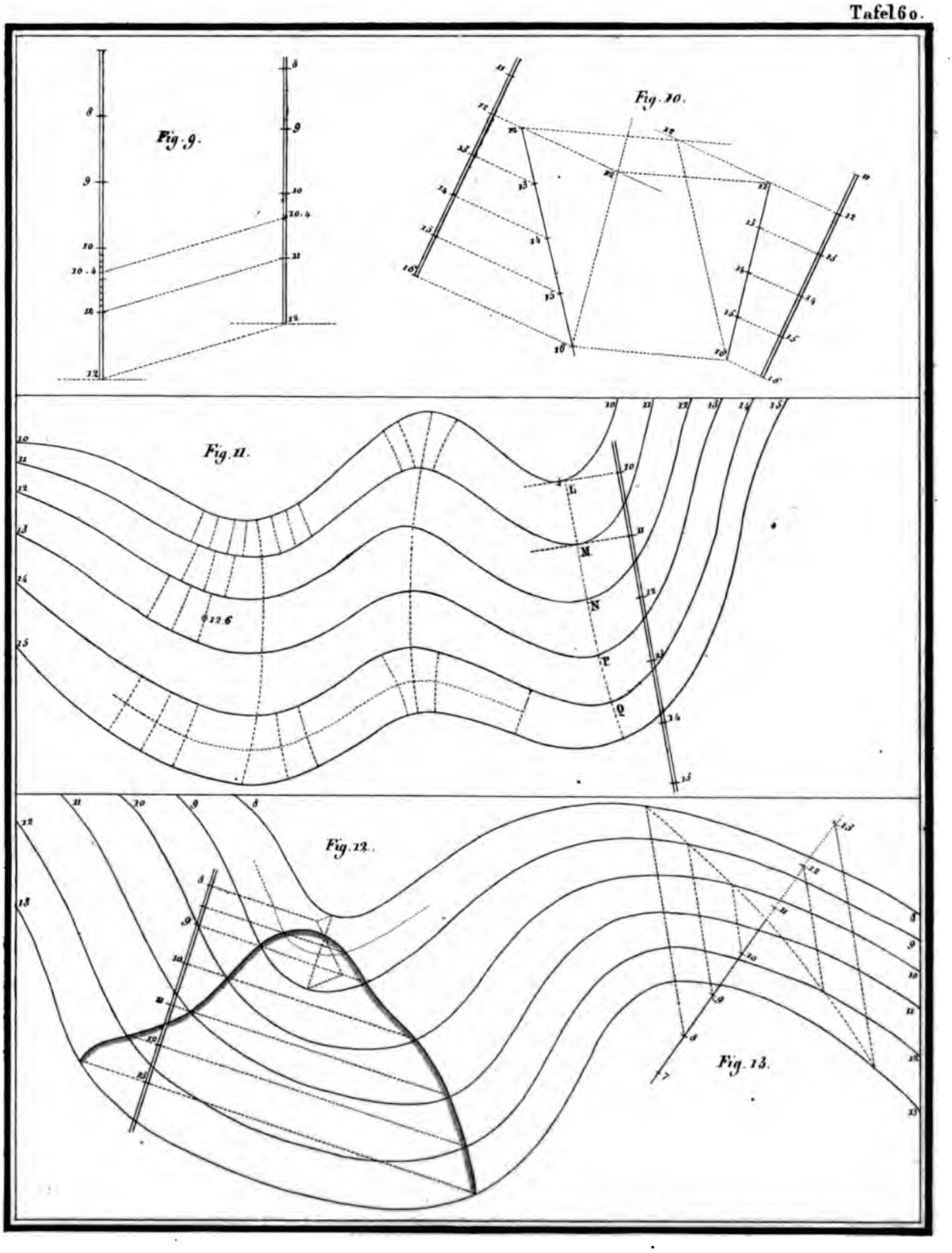


Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

Tafel 57.

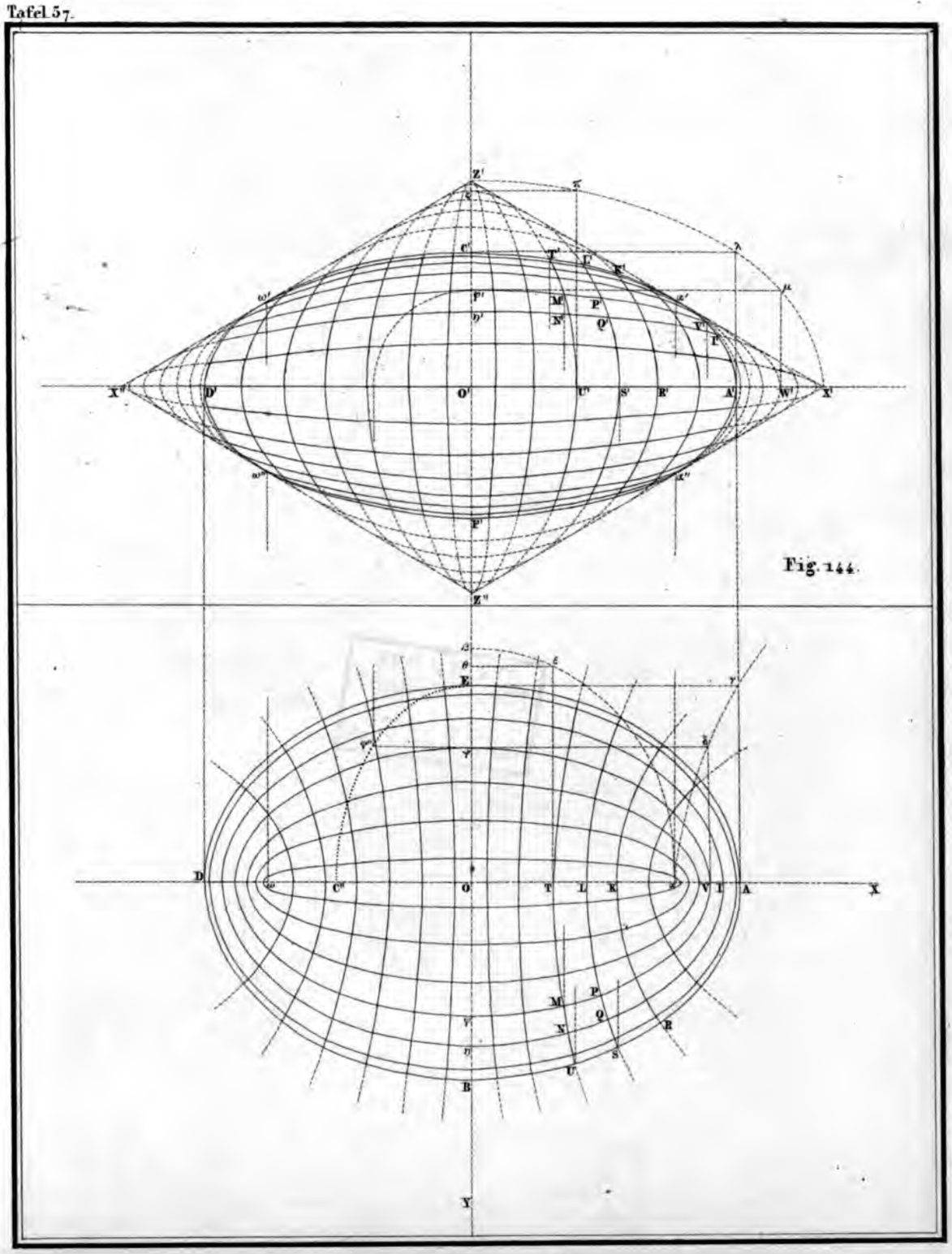


Fig. 144.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Tafel 58.

Fig. 145.

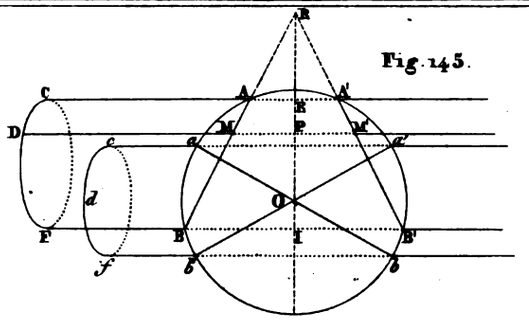


Fig. 146.

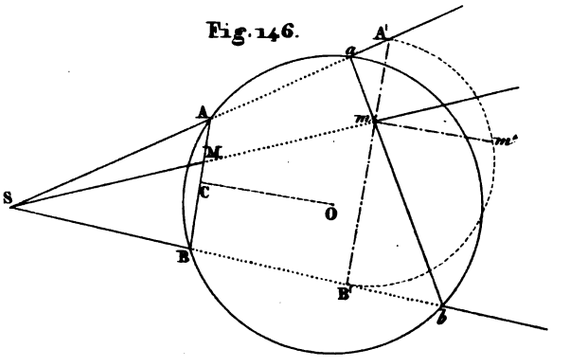


Fig. 147.

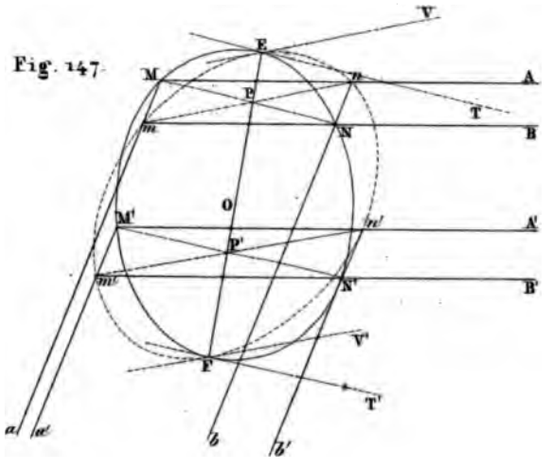


Fig. 148.

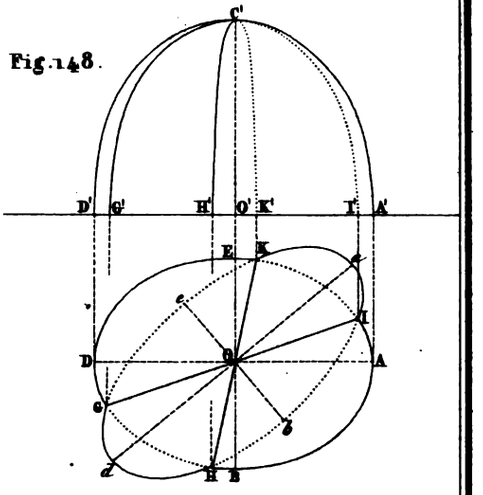
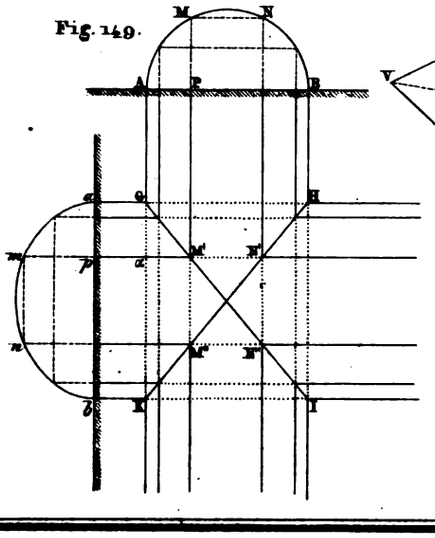


Fig. 149.



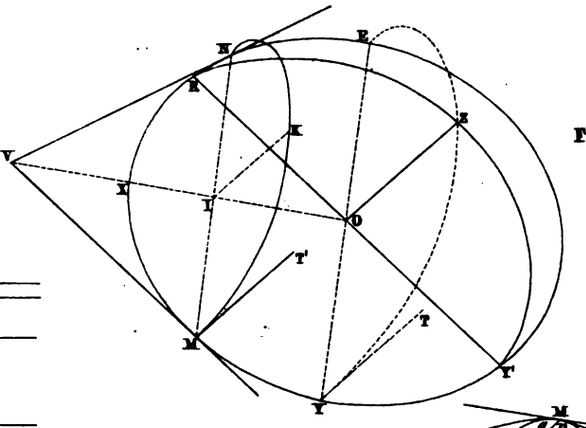
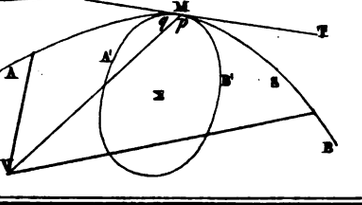


Fig. 150.

Fig. 151.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

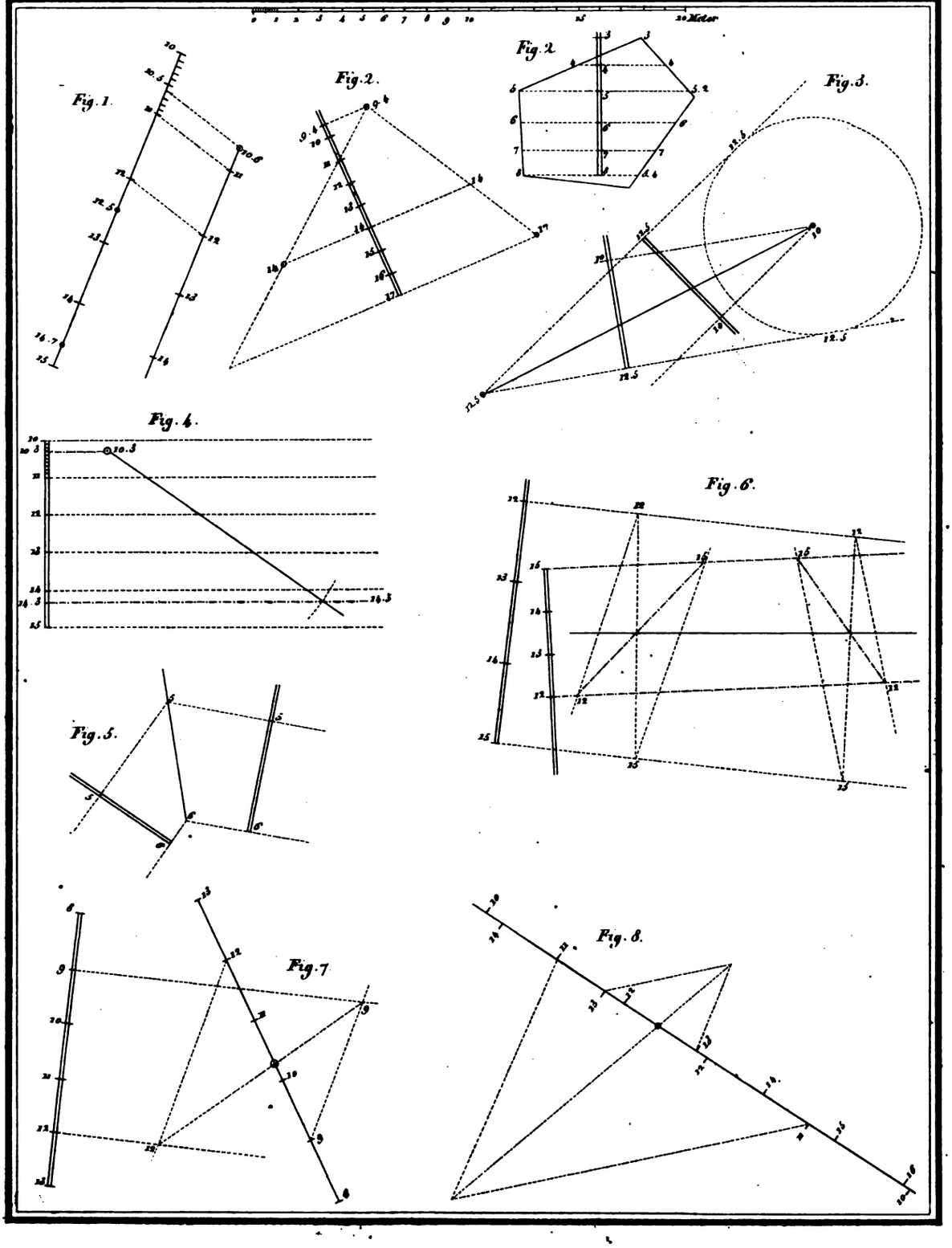


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

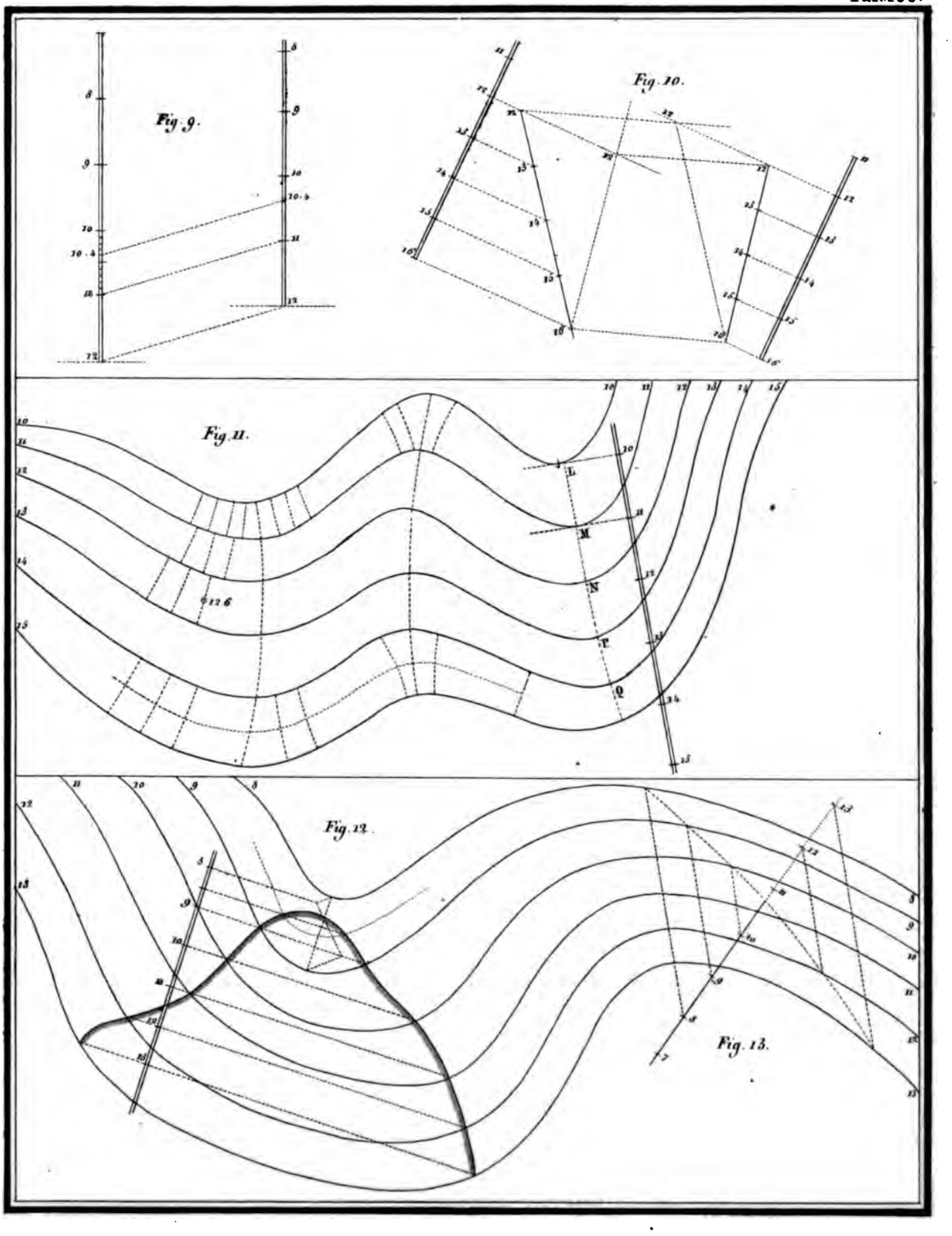
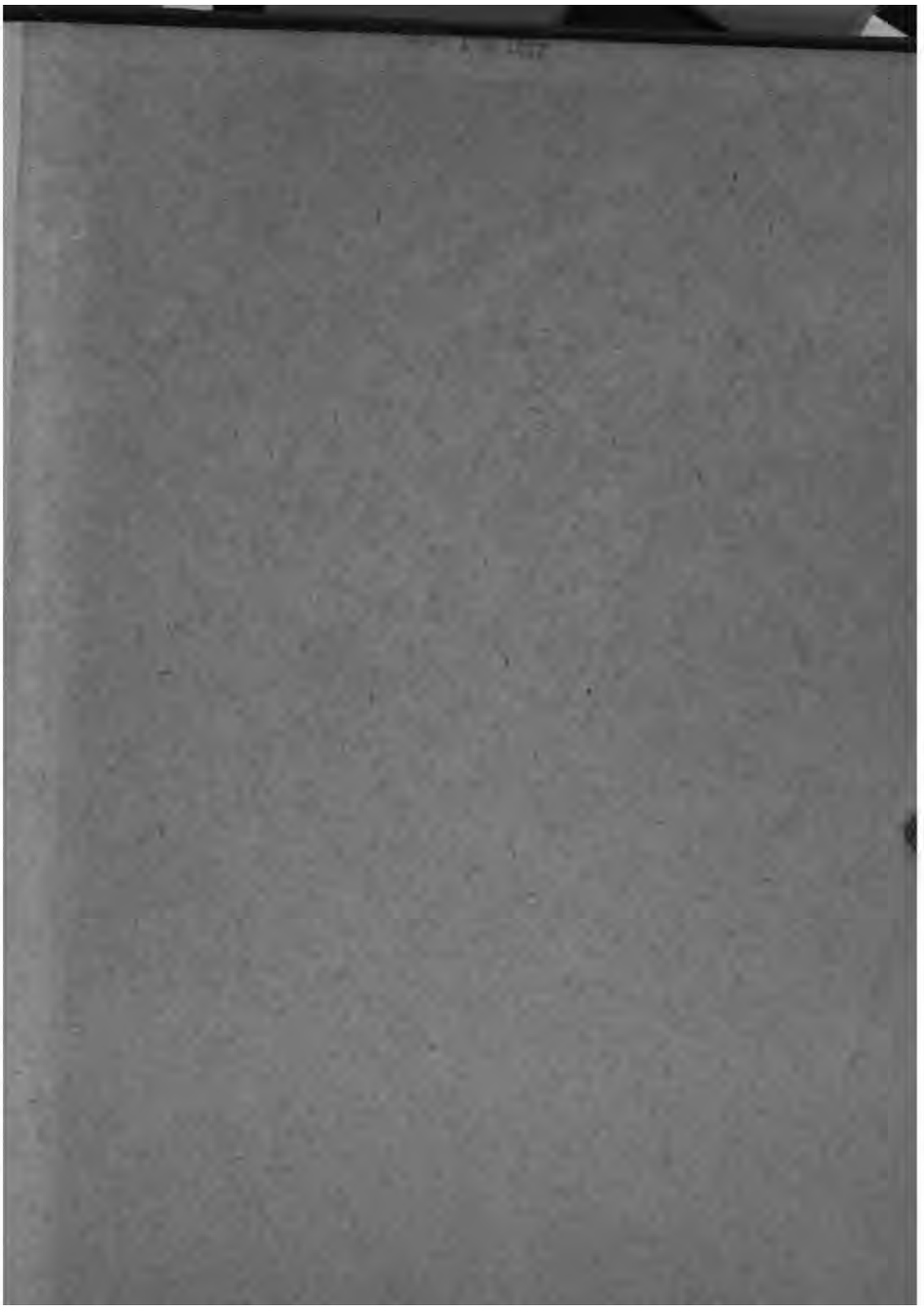


Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR
TILDEN

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building